УДК 519.85

ТРЕУГОЛЬНЫЕ НОРМЫ И КОНОРМЫ

Кочанова Ю.С.
научный руководитель к.ф.-м.н.,доцент Семенова Д.В.
Сибирский федеральный университет

Рассматривается общий класс умножений, известный как треугольные нормы (кратко t-нормы). Это бинарные операции t: [0,1]×[0,1]→ [0,1], которые были предложены К. Менгером в [1] и приведены к современному виду Б. Швейцером и А. Скляром в [2]. Они представляют интерес для нечеткой логики потому, что сохраняют основные свойства связки «и» (которые выполняются одновременно), а именно: коммутативность, монотонность, ассоциативность и ограниченность, и, таким образом, они служат естественным обобщением классической конъюнкции для многозначных систем рассуждений. С понятием t-нормы связано понятие треугольной конормы (t - конормы) s: [0,1]×[0,1]→ [0,1]. Оно связано с поведением истинностных значений, соединенных связкой «или». Множество t-норм может быть разделено на несколько различных частично пересекающихся групп в соответствии с их специфическими свойствами. Особо мы рассматриваются три класса t-норм: непрерывные, архимедовы и неархимедовы. Понятие порядковой суммы дает возможность построить новые t-нормы [3]. В отличие от остальных оно позволяет доказать, что особое значение имеют непрерывные t-нормы, три основных t-нормы, а именно: произведение, конъюнкция Лукасевича и минимум. Понятие t-норм и t-конорм пришли в теорию нечетких множеств из теорий функциональных уравнений и вероятностных метрических пространств. Аксиомы этих операций дают возможность построения бесконечного числа логических связок.

Определение. Т-норма это двухместная функция $T : I^2 \to I$ (то есть бинарная операция на I), удовлетворяющая следующим условиям:

a) на границе I^2

$$T(x,0) = t(0,x) = 0, \qquad T(x,1) = T(1,x) = x$$

b) T не убывает в любой точке, то есть,

$$T(x_1, y_1) \le T(x_2, y_2), \text{ когда } x_1 \le x_2, \; y_1 \le y_2$$

c) T коммутативна, то есть для всех x , y на I

$$T(x, y) = T(y, x)$$

d) T ассоциативна, то есть для всех x , y , z на I

$$T(T(x, y), z) = T(x,T(y, z))$$

Геометрически график t- нормы это поверхность на единице площади, ограниченной четырехугольником, вершинами которого являются $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(1,1,1)$, который поднимается по горизонтали и вертикали и является симметричным по отношению к плоскости $x = y$.

Определение. *S-норма* это двухместная функция $S : I^2 \to I$ которая удовлетворяет условиям монотонности, коммутативности, ассоциативности и граничным условиям:

$$S(x,0) = S(0,x) = x,\ S(x,1) = S(1,x) = 1 .$$

Определение. *Диагональю* t- *нормы* T является функция $\delta_T : I \to I$, которая определяется следующим образом $\delta_T(x) = T(x,x)$.

Теорема представления. *Предположим, что* $T : I^2 \to I$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1. $T(x,0) = T(0,x) = 0$ *для всех* x *из* I ,
2. $T(1,1) = 1$,
3. T *ассоциативна, непрерывна,*
4. T *- Архимедова, то есть, для всех* x, y *из* $(0,1)$ *существует положительное целое* n *такое что* $x^n < y$.

Тогда T *допускает представление* $T(x,y) = t^{-1}(t(x) + t(y))$, *где* t *является непрерывной, строго убывающей функцией из* I *на* R^+ *с* $t(1) = 0$ *и* t^{-1} *- псевдо-обратная для* t.

Рассмотрим примеры некоторых Т-норм и родственных функций, многие из которых играют заметную роль в приложениях:

1) $(\max[x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1, 0])^{-\frac{1}{\alpha}}$ (Рис. 1), соответствующий этой t- норме генератор $\dfrac{x^{-\alpha} - 1}{\alpha}$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$ (Рис. 2)

2) $\max(1 - [(1-x)^{\alpha} + (1-y)^{\alpha}]^{\frac{1}{\alpha}}, 0)$ (Рис. 3), соответствующий этой t- норме генератор $(1-x)^{\alpha}$, $\alpha \in (0, \infty)$ (Рис. 4)

3) $\dfrac{xy}{[1 - \alpha(1-x)(1-y)]}$ (Рис. 5), соответствующий этой t- норме генератор $\log \dfrac{1 - \alpha + \alpha x}{x}$, $\alpha \in (-\infty, 1)$

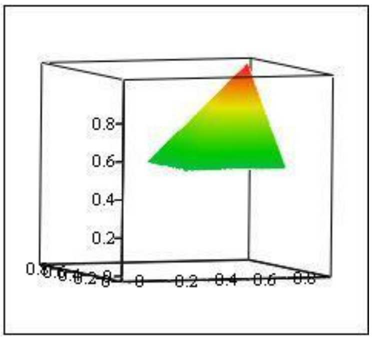


Рис. 1. Т-норма №1

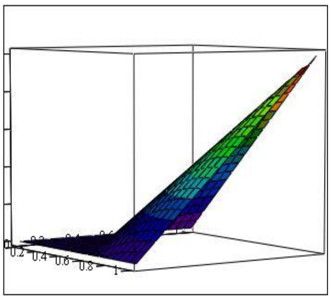


Рис. 3. Т-норма №2

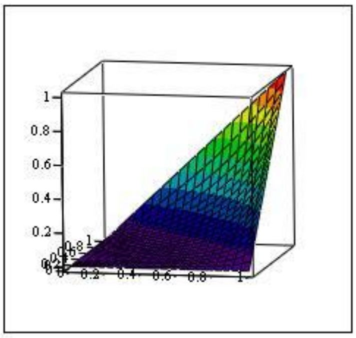
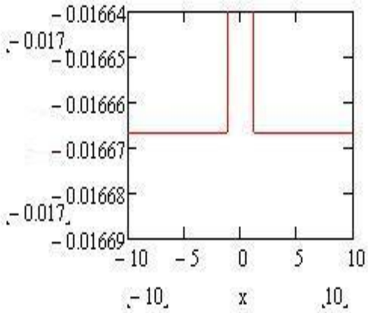


Рис. 5. Т-норма №3



2Рис. 2. Генератор для Т-нормы №1

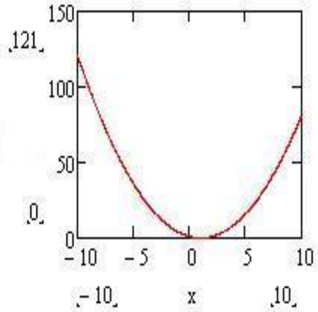


Рис. 4. Генератор для Т-нормы №2

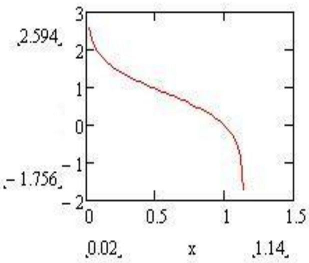


Рис .6. Генератор для Т-нормы №3

Эвентологическое обоснование теории нечётких множеств Заде было предложено О.Ю. Воробьевым в [6]. В докладе рассматривается эвентологическая модификация операций над нечеткими множествами, а также приводится полное доказательство леммы о смысле параметра в операциях Фреше. Рассмотрены обобщенные операции Фреше и проанализирована их связь с порядковыми суммами t-норм.