УДК 517

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ НА ОСОНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ НАД ЧИСЛАМИ

Стромов А. Е., Дудник К. В.,

Научный руководитель: к. ф.-м. н., профессор КГПУ, Ларин С. В.

МАОУ Гимназия 13

Введение

Компьютерные технологии все больше используются как в самой математике, так и при обучении математике. Сравнительно недавно появился новый программный продукт GeoGebra, который наилучшим образом подходит для наших целей – построений различных кривых в динамической геометрии, а также построений графиков функций на основе геометрического моделирования операций над числами. Разработка последней тематики является новой и актуальна не только в образовании.

Основные положения работы

GeoGebra — свободно распространяемая компьютерная среда, которая даёт возможность создавать на экране дисплея чертежи динамической геометрии, в частности, выполняемые с помощью циркуля и линейки. Программа написана Маркусом Хохенвартером на языке Java, переведена на 39 языков, включая русский. В настоящее время активно разрабатывается.

Особенностью этой среды является возможность строить чертежи с анимацией. Если некоторую точку чертежа переместить (с помощью мышки) в другое место, то все зависимые элементы чертежа изменяют свое положение так, что сохраняется взаимная принадлежность точек и прямых и параллельность прямых. Если, к примеру, по точке x и некоторому набору параметров (длин отрезков, радиусов окружностей) с помощью инструментов, заложенных в этой системе, построена зависимая точка $f(x)$, то можно задать анимацию точки x, при которой эта точка будет перемещаться по заданной линии (например, по оси абсцисс), тогда зависимая точка $f(x)$, оставляя след, будет вычерчивать некоторую кривую. Это позволяет, например, вычерчивать линии, заданные «механическими» определениями в динамической геометрии. Основываясь на этом, мы построили эллипс, гиперболу, параболу и некоторые другие замечательные кривые (см. приложение на диске).

Несмотря на геометрическую направленность данной компьютерной среды, ее можно заставить служить алгебре. Дело в том, что операции сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня можно выполнять геометрическими построениями. Геометрические модели сложения и умножения изображены на рисунках 1 и 2.

Приведем построение произведения (рис. 2). Первый сомножитель a (точку А) строим на оси ординат, а второй сомножитель b (точку В) на оси абсцисс. Первый сомножитель a (точку А) соединяем с единичной точкой оси абсцисс и через точку, соответствующую второму сомножителю b (точку В), проводим прямую, параллельную построенному отрезку. Отмечаем точку С пересечения построенной прямой с осью ординат – это и будет произведение ab.

Если теперь сомножители a и b (рис. 2) мышкой переместить в другие положения на осях координат, то новое положение точки С неизменно будет указывать произведение ab. Глядя на рисунок 2, понятно как построить результат деления c на b. На рисунке 3 изображено извлечение квадратного корня и построен график функции $y=sqrt(x)$.

На рисунке 4 построен график функции $y=ax^2+bx+c$. На оси ординат отмечаем точки, соответствующие коэффициентам a, b, c. На оси абсцисс отмечаем единичную точку и точку, изображающую переменную x. Через точку x проводим прямую, параллельную оси ординат. Рассмотрим равенство $ax^2+bx+c=(ax+b)x+c$. Сначала строим прямую $ax+b$ по точкам $(0, b)$ и $(1, a+b)$, находим точку пересечения построенной прямой с вертикальной прямой, проходящей через x, и ординату этой точки геометрически умножаем на x (см. построение произведения). Получаем точку, соответствующую $(ax+b)x$. Переносим эту точку на вертикальную прямую параллельно оси абсцисс и геометрически прибавляем c. Получаем на вертикальной прямой точку с координатами $(x, (ax+b)x+c)$. Заставляем эту точку оставлять след и задаём анимацию точки x. В результате точка x движется по оси абсцисс, а точка y, оставляя след, вычерчивает параболу. Все рисунки взяты с экрана.

Можно геометрически построить ось параболы и вершину, а используя оптическое свойство параболы, найти ее фокус и директрису. Линии построения можно спрятать, оставить только точки, соответствующие коэффициентам. Меняя положение этих точек, можно наблюдать как изменяется график.

Построение параболы можно продолжить и построить график функции $y=ax^3+bx^2+cx+d=((ax+b)x+c)x+d$. На рисунке 5 построен график многочлена степени 4. Линии построения спрятаны. Точки, соответствующие коэффициентам, можно передвигать и наблюдать как при этом изменяется график. Можно заказать координаты точки, вычерчивающей график, и найти корни многочлена.

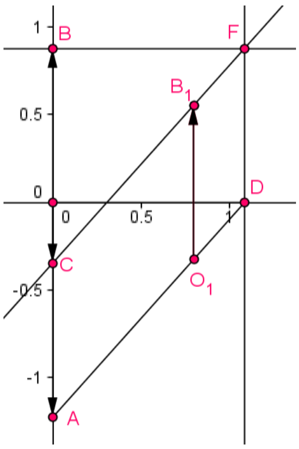

Рис.1 Сложение чисел

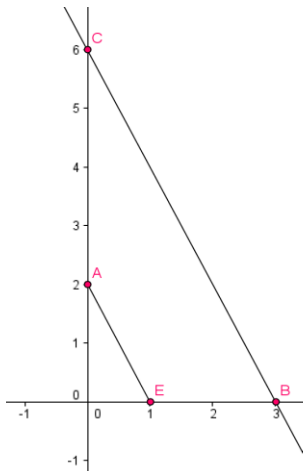

Рис.2 Умножение чисел

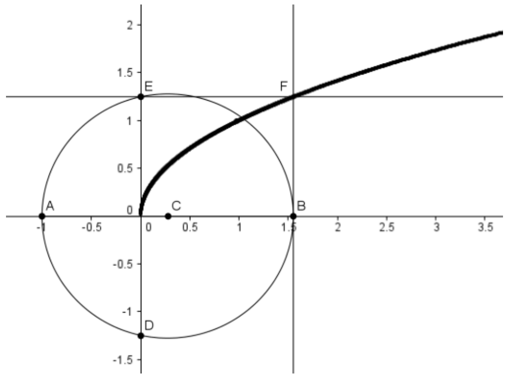

Рис. 3 График функции $y = \sqrt{x}$

Заключение

В нашем сообщении представлен метод геометрического моделирования операций над числами, который приводит к новой технике построения графиков функций. Это может найти широкое применение в компьютерном моделировании. Работа будет продолжена с использованием геометрического моделирования операций над комплексными числами