

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Институт космических и информационных технологий  
Кафедра «Прикладная математика и компьютерная безопасность»

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_ А.А. Кытманов  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

## **БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

01.03.04 Прикладная математика

Кубатурные формулы с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках

Научный руководитель \_\_\_\_\_ профессор, д. ф.-м. н. К.А. Кириллов

Выпускник \_\_\_\_\_ студент группы КИ14-18Б А.Г. Уделько

Красноярск 2018

## РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Кубатурные формулы с узлами на  $P_\tau$ -сетках» содержит 62 страниц текстового документа, 5 приложений, 7 использованных источников, 39 таблиц, 16 иллюстраций.

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ,  $P_\tau$ -СЕТКИ, РАВНОМЕРНЫЕ СЕТКИ, ПАРАЛЛЕПИПЕДАЛЬНЫЕ СЕТКИ, КЛАССЫ ФУНКЦИЙ  $S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$ ,  $H_\alpha(L_{i_1, \dots, i_s})$ ,  $W_1(L_{i_1, \dots, i_s})$  АРИФМЕТИЧЕСКИЙ И СВЕРХБЫСТРЫЙ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ  $P_\tau$ -СЕТОК.

Цели и задачи работы:

–изучение арифметического и сверхбыстрого алгоритмов построения  $P_\tau$ -сеток, сравнение их быстродействия в двумерном случае;

–исследование погрешности кубатурных формул, узлы которых образуют  $P_\tau$ -сетки, на классах функций  $S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$ ,  $H_\alpha(L_{i_1, \dots, i_s})$ ,  $W_1(L_{i_1, \dots, i_s})$ , сравнение погрешностей этих формул с погрешностями других формул на функциях указанных классов.

Актуальность работы заключается в том, что кубатурные формулы с узлами на  $P_\tau$ -сетках в  $n$ -мерном случае хорошо зарекомендовали себя в задачах приближённого вычисления кратных интегралов от негладких функций.

Новизна работы: численные эксперименты проводились для функций, которые ранее не исследовались.

В результате проведения численных экспериментов сделаны выводы о быстродействии изученных алгоритмов построения  $P_\tau$ -сеток, а также о том, для каких функций интеграл вычисляется точнее с помощью кубатурных формул с узлами на  $P_\tau$ -сетках

Разработаны рекомендации о том, в каких случаях целесообразно применять арифметический алгоритм построения  $P_\tau$ -сеток, а в каких – сверхбыстрый, а также предложения по использованию кубатурных формул с узлами на  $P_\tau$ -сетках.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
1. Некоторые сетки.....	5
1.1.Понятие $\Pi_\tau$ -сеток. Примеры .....	5
1.2.Равномерная сетка .....	11
1.3.Параллелепипедальная сетка .....	12
2. Некоторые классы функций .....	13
2.1.Классы $S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$ ( $p \geq 1$ ).....	13
2.2.Классы $H_\alpha(L_{i_1, \dots, i_s})$ ( $0 < \alpha \leq 1$ ).....	16
2.3.Классы $W_1(L_{i_1, \dots, i_s})$ .....	17
3. Алгоритмы построения $\Pi_\tau$ - сеток .....	18
3.1.Классический алгоритм. Пример вычисления координат узлов $\Pi_0$ - сеток в двумерном случае .....	18
3.2.Арифметический алгоритм .....	21
3.3.Сверхбыстрый алгоритм.....	23
4. Сравнение быстродействия арифметического и сверхбыстрого алгоритмов построения $\Pi_0$ -сеток в двумерном случае .....	25
5. Исследование на классах функций погрешностей кубатурных формул, узлы которых образуют $\Pi_\tau$ -сетки.....	27
5.1.Исследуемые функции .....	27
5.2.Результаты численных экспериментов .....	30
6. Заключение .....	51
Список использованных источников .....	52
Приложения А – Д .....	53

## ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению в  $n$ -мерном случае алгоритмов построения  $\Pi_\tau$ -сеток и исследованию погрешности кубатурных формул, узлы которых образуют  $\Pi_\tau$ -сетки, на классах функций;

$\Pi_\tau$ -сетки, и, в частности,  $\Pi_0$ -сетки ( $\tau=0$ ) получили широкое применение в довольно широком спектре многокритериальных задач.  $\Pi_\tau$ -сетки также используются в задачах приближенного вычисления кратных интегралов. Приближенные значения указанных интегралов вычисляются с помощью кубатурных формул вида

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(Q_i), \quad (1)$$

где узлы  $Q_i \in [0,1]^n$  образуют  $\Pi_\tau$ -сетку,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Кубатурные формулы (1) с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках в  $n$ -мерном случае хорошо зарекомендовали себя в задачах приближённого вычисления двойных интегралов от негладких функций.

# 1 Некоторые сетки

## 1.1 Понятие $\Pi$ -сетки. Примеры

Назовём двоичными промежутками все отрезки, которые могут быть получены при делении отрезка  $0 \leq x \leq 1$  на  $2^m$  равных частей,  $m = 0, 1, 2, \dots$  Для определенности все двоичные промежутки считаем замкнутыми слева и открытыми справа, если только правый конец промежутка отличен от 1. Если правый промежуток равен 1, то промежуток замкнут также и справа. При таком определении сумма всех двоичных промежутков длины  $2^{-m}$  составляет отрезок  $[0, 1]$ .

Например, двоичными промежутками являются промежутки  $[0, 1]$ ,  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ,  $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ ,  $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ ,  $\dots$

Промежутки  $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$  или  $\left[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right)$  двоичными не считаются.

Для двоичных промежутков введем следующее обозначение:

$$l_{mj} = \left[ \frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}} \right),$$

где  $j = 1, \dots, 2^{m-1}$ , а  $m = 1, 2, \dots$  (в случае  $j = 2^{m-1}$  надо считать  $l_{mj}$  замкнутым также справа.)

Легко видеть, что при каждом  $m$

$$l_{m1} + l_{m2} + \dots + l_{m2^{m-1}} = [0, 1].$$

Наряду с двойной нумерацией мы будем использовать также простую нумерацию, полагая  $l_{mj} = l_k$ , где

$$k = 2^{m-1} + j$$

При такой нумерации  $k = 2, 3, \dots$ .

Пусть  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ , где некоторые  $k_j$  могут совпадать. Назовём  $n$ -мерным двоичным параллелепипедом  $\Pi_{\mathbf{k}} = l_{k_1} \times l_{k_2} \times \dots \times l_{k_n}$ , то есть множество точек с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  такими, что  $x_j \in l_{k_j}$  при  $j = 1, 2, \dots, n$ . Очевидно, что любой такой двоичный параллелепипед принадлежит единичному  $n$ -мерному кубу  $K^n = [0, 1]^n$ .

В частности, для  $n=2$ , двоичный параллелепипед  $\Pi_{\mathbf{k}}$  представляет собой двоичный прямоугольник, то есть  $\Pi_{\mathbf{k}} = l_{k_1} \times l_{k_2}$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$  на рисунках 1.1-1.4 приведены всевозможные двоичные прямоугольники площади  $2^{-3}$ :

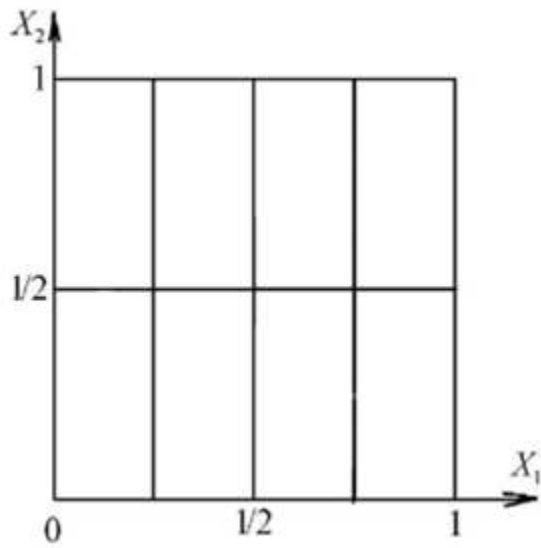


Рисунок 1.1 – двоичные прямоугольники площади  $2^{-3}$

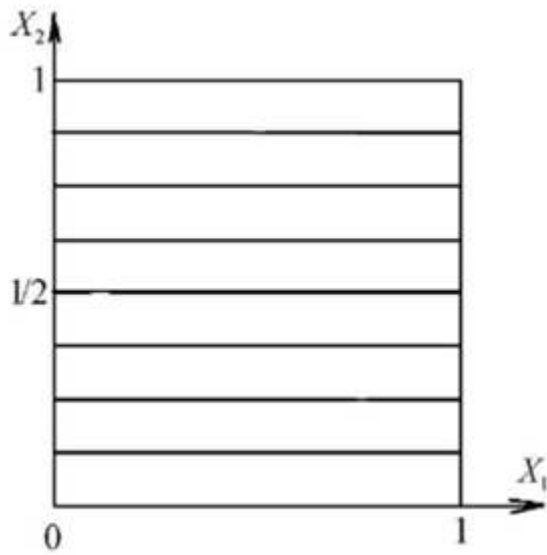


Рисунок 1.2 – двоичные прямоугольники площади  $2^{-3}$

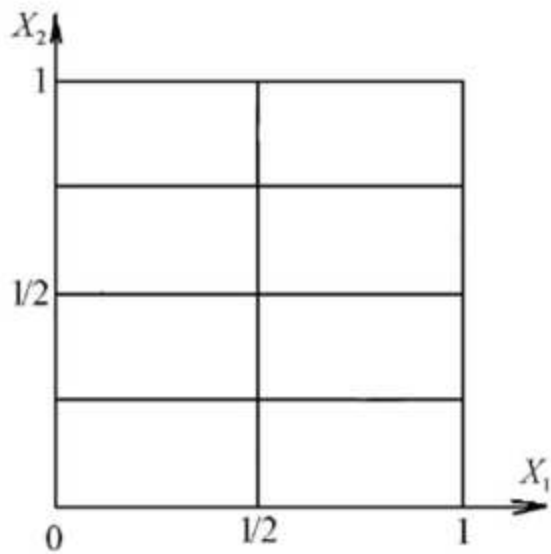


Рисунок 1.3 – двоичные прямоугольники площади  $2^{-3}$

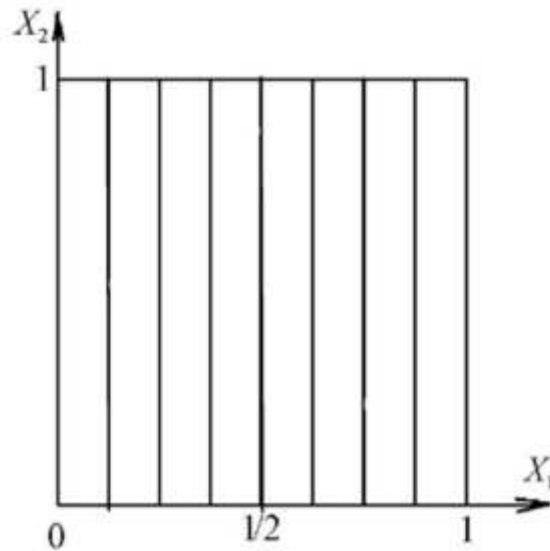


Рисунок 1.4 – двоичные прямоугольники площади  $2^{-3}$

Сетку, состоящую из  $N = 2^v$  точек, назовём  $\Pi_0$ -сеткой, если каждому двумерному двоичному параллелепипеду объемом  $1/N$  принадлежит ровно одна точка сетки.

На рисунках 1.5 – 1.12 в двумерном случае приведены схемы расположения узлов  $\Pi_0$ -сеток с  $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$  узлами соответственно.

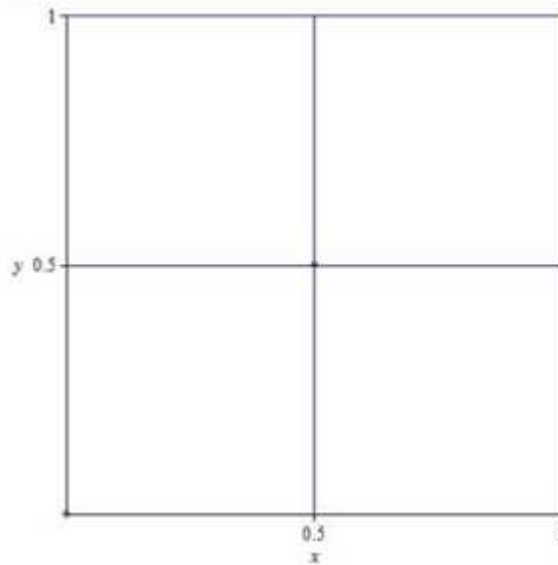


Рисунок 1.5 – схема расположения узлов  $\Pi_0$ -сеток с  $N = 2$

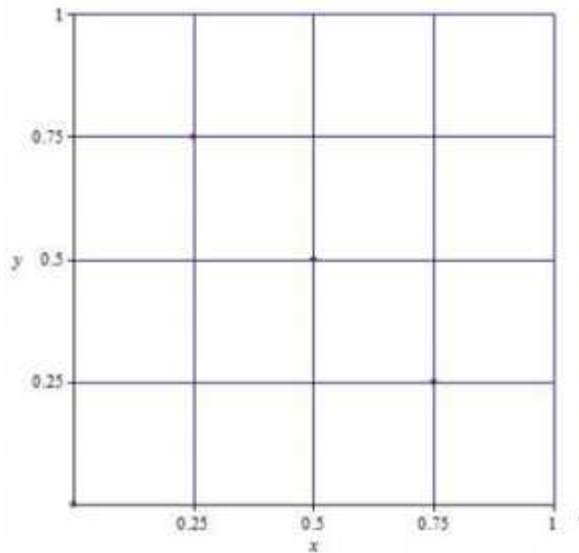


Рисунок 1.6 – схема расположения узлов  $\Pi_0$ -сеток с  $N = 4$

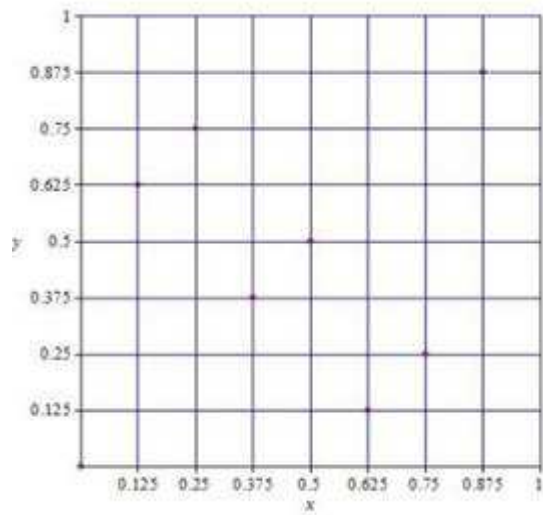


Рисунок 1.7 – схема расположения узлов  $\Pi_0$ -сеток с  $N = 8$

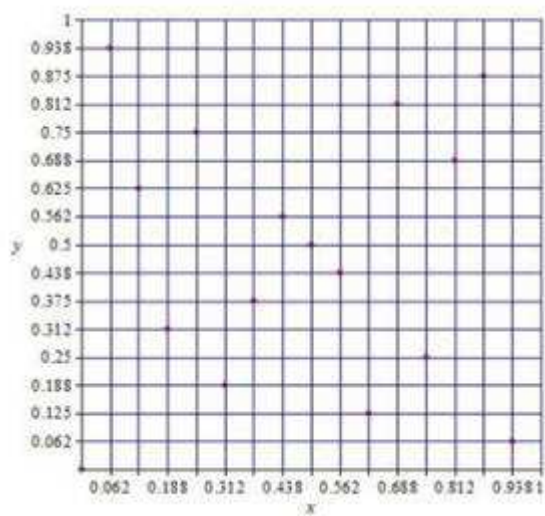


Рисунок 1.8 – схема расположения узлов  $\Pi_0$ -сеток с  $N = 16$



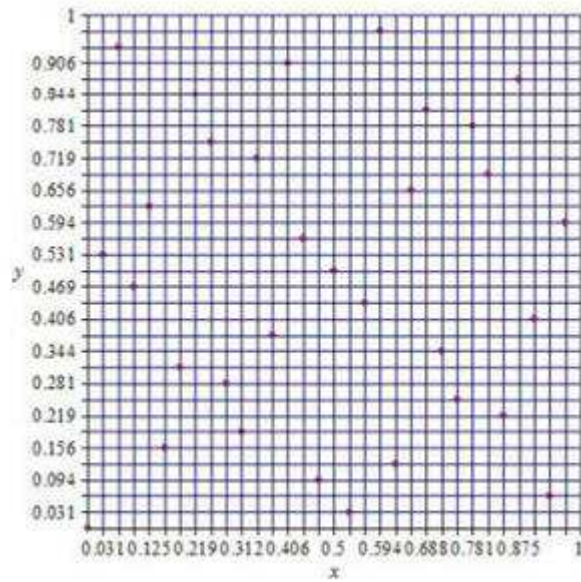


Рисунок 1.9 – схема расположения узлов  $\Pi_0$ -сеток с  $N = 32$

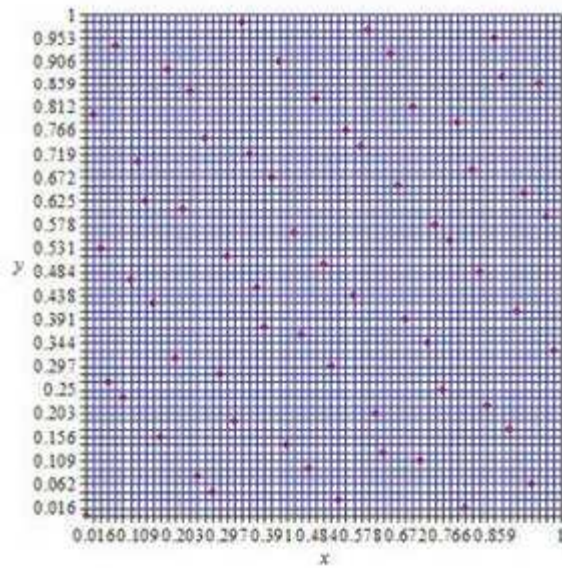


Рисунок 1.10 – схема расположения узлов  $\Pi_0$ -сеток с  $N = 64$

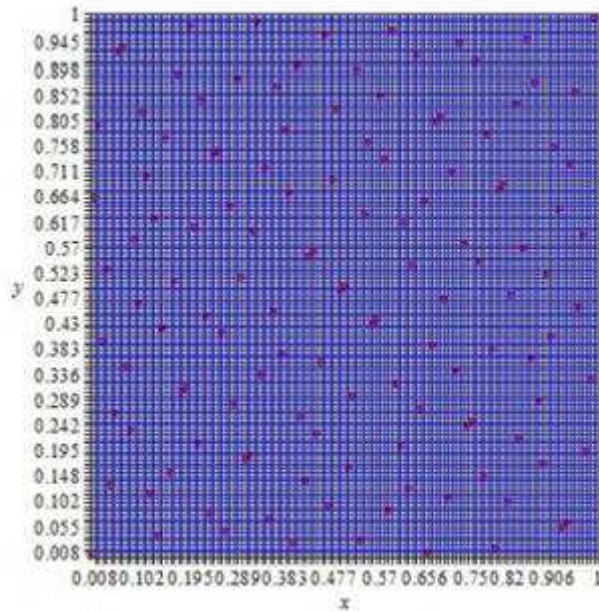


Рисунок 1.11 – схема расположения узлов  $\Pi_0$ -сеток с  $N = 128$

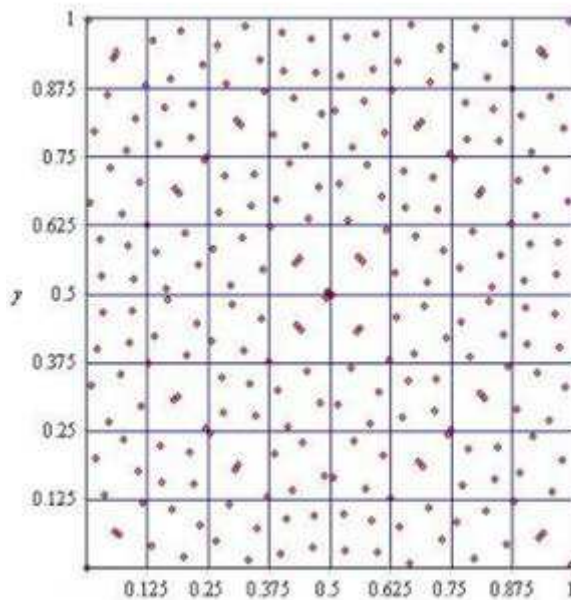


Рисунок 1.12 – схема расположения узлов  $\Pi_0$ -сеток с  $N = 256$

В  $K^1, K^2$  и  $K^3$  существуют  $\Pi_0$ -сетки с любым числом узлов  $N = 2^v$ .

Однако уже в  $K^4$  невозможно построить  $\Pi_0$ -сетку с числом узлов  $N \geq 4$  [7]. Для рассмотрения аналогичных сеток в  $K^n$  для любых  $n$ , в [7] введено следующее определение, обобщающее понятие  $\Pi_\tau$ -сетки:

Сетка, состоящая из  $N = 2^v$  точек куба  $K^n$ , называется  $\Pi_\tau$ -сеткой, если каждому  $n$ -мерному двоичному параллелепипеду  $\Pi_k$  объёма  $|\Pi_k| = 2^{\tau-v}$  принадлежит ровно  $2^\tau$  точек сетки. При этом предполагается, что  $v > \tau$ . Таким образом,  $\Pi_0$ -сетки являются частным случаем  $\Pi_\tau$ -сеток при  $\tau=0$ .

## 1.2 Равномерная сетка

Равномерной сеткой назовём сетку, состоящую из  $N = M^n$  точек с координатами

$$\left( \frac{r_1 + \beta_1}{M}, \dots, \frac{r_n + \beta_n}{M} \right),$$

где  $r_1, \dots, r_n = 0, \dots, M - 1$ , а величины  $\beta_v$  фиксированы:  $0 \leq \beta_v < 1$ .

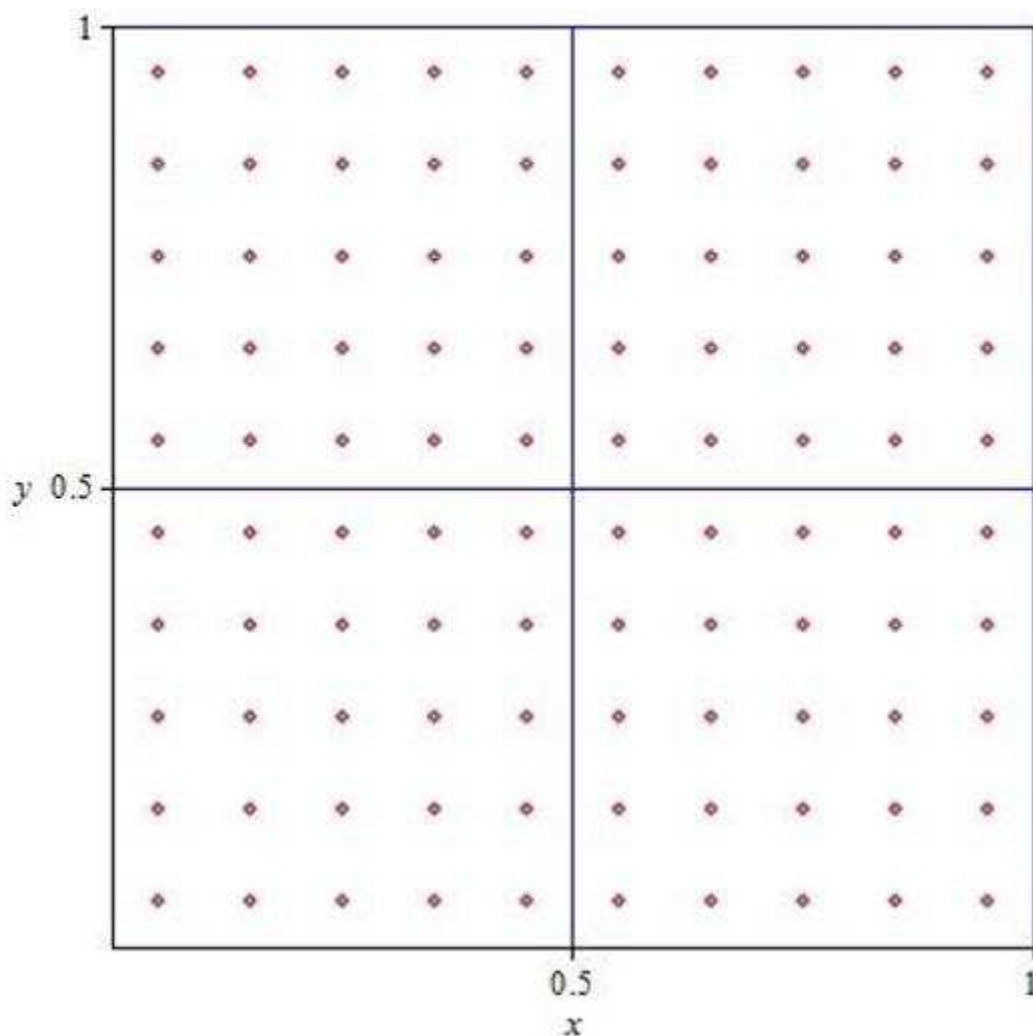
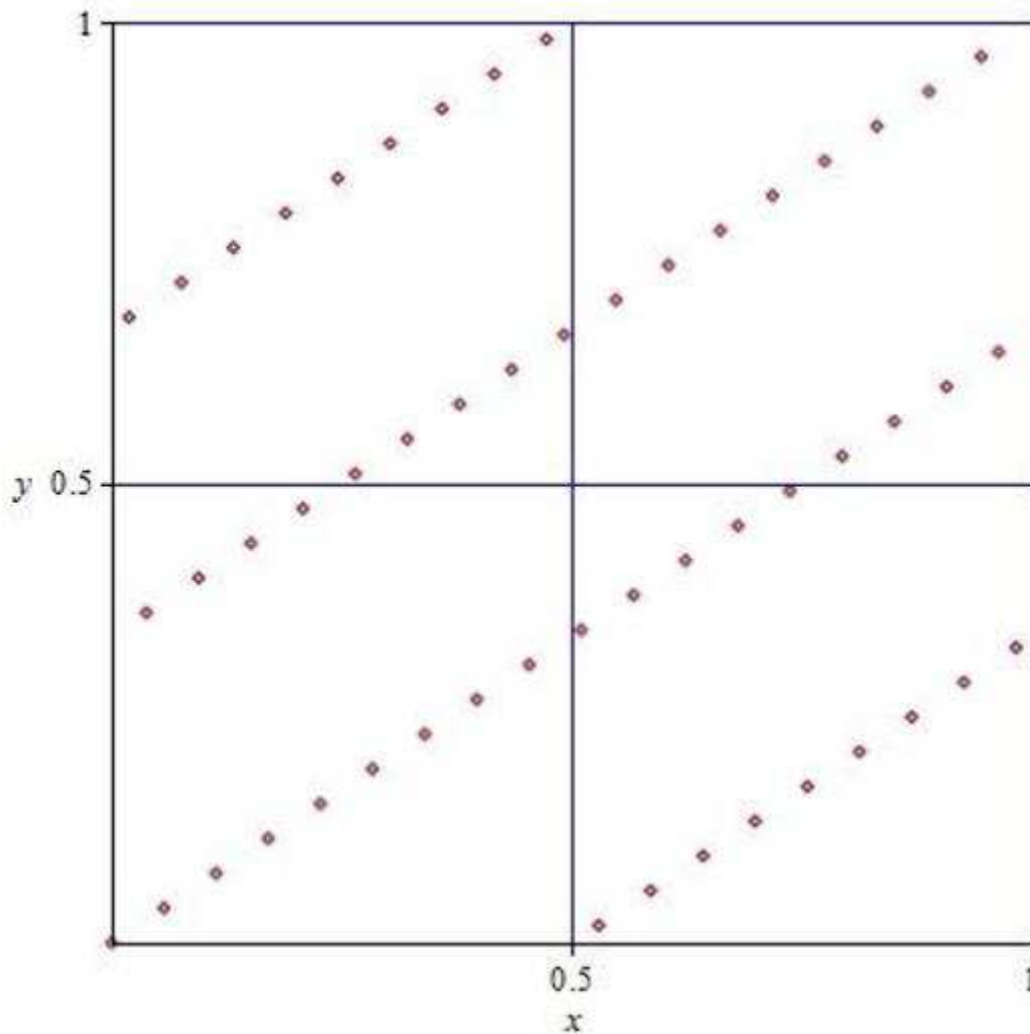


Рисунок 1.13 – приведена схема расположения узлов равномерной сетки в двумерном случае со значениями параметров  $M=10$  ( $N = 100$ ),  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$ .

Текст составленной на языке Maple программы, вычисляющей координаты узлов равномерной сетки, приведен в Приложении Г.

### 1.3 Параллелепipedальная сетка

Параллелепipedальной сеткой называется сетка, состоящая из точек  $P_\mu$  с координатами  $\left(\left\{\frac{a_1\mu}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_n\mu}{N}\right\}\right)$ ,  $\mu = 0, \dots, N - 1$ , где  $N > 3$  – простое число, числа  $a_1, \dots, a_n$  целые;  $\{z\}$  – дробная часть числа  $z$ .



Рисунке 1.14 – приведена схема расположения узлов параллелепipedальной сетки в двумерном случае со значениями параметров  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 2$ ,  $N = 53$ .

Текст составленной на языке Maple программы, вычисляющей координаты узлов параллелепipedальной сетки, приведен в Приложении Д.

## 2 Некоторые классы функций

### 2.1 Классы $S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$ ( $p \geq 1$ )

Приведем определение классов  $S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$  в  $n$ -мерном случае. Сначала введем понятия, сопутствующие этому определению.

Фиксируем  $s$  произвольных индексов  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq n$ , где  $1 \leq s \leq n$ , которые будем называть отмеченными индексами. Символом  $K_{i_1, \dots, i_s}$  будем обозначать  $s$ -мерную грань куба  $[0, 1]^n$ , на которой  $0 \leq x_{i_1}, \dots, x_{i_s} \leq 1$ , в то время как все остальные  $x_i$  (при  $i \neq i_1, \dots, i_s$ ) фиксированы:  $x_i \equiv 1$ . При этом  $[0, 1]^n = K_{12\dots n}$ .

Пусть на каждой грани  $K_{i_1, \dots, i_s}$  задано число  $B_{i_1, \dots, i_s}$ . Сумму всех  $B_{i_1, \dots, i_s}$  обозначим через  $\sum^{\sim} B_{i_1, \dots, i_s}$ , т.е.

$$\sum^{\sim} B_{i_1, \dots, i_s} = \sum_{i_1=1}^n B_{i_1} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} B_{i_1 i_2} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} B_{i_1 i_2 i_3} + \dots + B_{12\dots n}.$$

Рассмотрим кратный ряд Фурье–Хаара для функции  $f(P)$ :

$$f(P) = \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} c_{k_1, \dots, k_n} \chi_{k_1}(x_1), \dots, \chi_{k_n}(x_n), \quad (2)$$

$$c_{k_1, \dots, k_n} = \int_{[0, 1]^n} f(P) \chi_{k_1}(x_1), \dots, \chi_{k_n}(x_n) dP,$$

где  $\chi_{k_1}(x_1), \dots, \chi_{k_n}(x_n)$  – функции Хаара, определяемые следующим образом:

$$\chi_k(x) \equiv \chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{m-1}, & \text{при } x \in l_{mj}^- \\ -2^{m-1}, & \text{при } x \in l_{mj}^+ \\ 0, & \text{при } x \in l_{mj}. \end{cases}$$

Здесь  $k \geq 2$ ,  $j = 1, \dots, 2^{m-1}$ ,  $m=1, 2, \dots$ ,  $k = 2^{m-1} + j$ ;  $l_{mj}^- = l_{m+1, 2j-1}$  – левая половина промежутка  $l_{mj}$ ,  $l_{mj}^+ = l_{m+1, 2j}$  – правая половина промежутка  $l_{mj}$ . При  $k=1$  функция  $\chi_k(x)$  определяется формулой  $\chi_1(x) \equiv 1$ .

Выделим в (2) в явном виде функцию  $\chi_1(x)$ . Тогда в этой сумме окажутся члены, содержащие произведения различного числа функции Хаара, и удобно записать её в виде

$$f(P) = c_1 + \sum_{k_1, \dots, k_s}^{\sim} \sum_{k_1, \dots, k_s} c_{k_1, \dots, k_s}^{i_1, \dots, i_s} \chi_{k_1}(x_{i_1}), \dots, \chi_{k_s}(x_{i_s}), \quad (3)$$

где

$$c_1 = \int_{[0, 1]^n} f(P) dP,$$

$$c_{k_1, \dots, k_s}^{i_1, \dots, i_s} = \int_{[0, 1]^n} f(P) \chi_{k_1}(x_{i_1}), \dots, \chi_{k_s}(x_{i_s}) dP,$$

$$k_1, \dots, k_s = 2, 3, \dots$$

Например, разложение функции двух переменных  $f(x_1, x_2)$  в ряд (3) запишется следующим образом:

$$f(x_1, x_2) = c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^1 \chi_k(x_1) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^2 \chi_k(x_2) + \sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=2}^{\infty} c_{k_1 k_2}^{12} \chi_{k_1}(x_1) \chi_{k_2}(x_2).$$

Классом  $S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$  ( $1 \leq p < \infty$ ) назовем множество функций  $f(P)$ , представимых в виде ряда (3), коэффициенты Фурье – Хаара которых удовлетворяют условиям

$$A_p^{i_1, \dots, i_s} = \sum_{\mathbf{m}} 2^{\frac{m_1-1}{2} + \dots + \frac{m_s-1}{2}} (\sum_{\mathbf{j}} |c_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq A_{i_1, \dots, i_s},$$

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_s), \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_s), \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_s) \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s)$$

при любых отмеченных индексах  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq n$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ .

$A_{i_1, \dots, i_s}$  будем называть определяющими постоянными класса  $S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$ .

При  $1 < p < p'$  имеем:

$$S_1(A_{i_1, \dots, i_s}) \subset S_p(A_{i_1, \dots, i_s}) \subset S_{p'}(A_{i_1, \dots, i_s}).$$

В частности, при  $n=2$  определение классов  $S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$  примет следующий вид.

Множество функций  $f(x_1, x_2)$ , определённых в единичном квадрате  $[0,1]^2$  и представимых в виде ряда Фурье-Хаара

$$f(x_1, x_2) = c_{0,0}^{(1,1)} + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} c_{m_1, m_2}^{(j_1, j_2)} \chi_{m_1, j_1}(x_1) \chi_{m_2, j_2}(x_2) + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} c_{m_1, 0}^{(j_1, 1)} \chi_{m_1, j_1}(x_1) + \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} c_{0, m_2}^{(1, j_2)} \chi_{m_2, j_2}(x_2)$$

с вещественными коэффициентами  $c_{0,0}^{(1,1)}, c_{m_1,0}^{(j_1,1)}, c_{0,m_2}^{(1,j_2)}, c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$  ( $m_n = 1, 2, \dots, j_n = 1, 2, \dots, 2^{m_n-1}, n = 1, 2$ ), удовлетворяющими условиям

$$A_p^{(1)}(f) = \sum_{m_1=1}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2}} [\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} |c_{m_1,0}^{(j_1,1)}|^p]^{\frac{1}{p}} \leq A_1,$$

$$A_p^{(2)}(f) = \sum_{m_2=1}^{\infty} 2^{\frac{m_2-1}{2}} [\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} |c_{0,m_2}^{(1,j_2)}|^p]^{\frac{1}{p}} \leq A_2,$$

$$A_p^{(1,2)}(f) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2}} + 2^{\frac{m_2-1}{2}} \left[ \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} |c_{m_1, m_2}^{(j_1, j_2)}|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq A_{1,2}$$

( $p \geq 1$ ,  $A_1, A_2, A_{1,2}$  – вещественные константы), определяется как класс  $S_p(A_1, A_2, A_{1,2})$ .

Классы функций  $S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$  обладают следующим свойством

*Утверждение 1.* Любая функция  $f(P) \in S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$  ограничена.

Из этого утверждения, в частности, следует, что неограниченные функции не принадлежат классам  $S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$ .

## 2.2 Классы $H_\alpha(L_{i_1, \dots, i_s})$ ( $0 < \alpha \leq 1$ )

Приведем определение классов  $H_\alpha(L_{i_1, \dots, i_s})$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) в  $n$ -мерном случае.

Введем обозначение

$$\Delta_{t_s} f(P) = f(x_1, \dots, x_s + t_s, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n),$$

$$1 \leq s \leq n$$

Классом  $H_\alpha(L_{i_1, \dots, i_s})$  назовем множество функций  $f(P)$ , удовлетворяющих следующим условиям: если  $P \in [0,1]^n$  и  $P + Q \in [0,1]^n$ , то при любых  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq n$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$

$$|\Delta_{t_1}, \dots, \Delta_{t_{i_s}} f(P)| \leq L_{i_1, \dots, i_s} |t_1, \dots, t_{i_s}|^\alpha.$$

$L_{i_1, \dots, i_s}$  будем называть определяющими постоянными класса  $H_\alpha(L_{i_1, \dots, i_s})$ .

При  $\alpha < \alpha' \leq 1$  имеем:

$$H_1(L_{i_1, \dots, i_s}) \subset H_{\alpha'}(L_{i_1, \dots, i_s}) \subset H_\alpha(L_{i_1, \dots, i_s}).$$

В двумерном случае определение классов  $H_\alpha(L_{i_1, \dots, i_s})$  примет следующий вид.

Множество функций  $f(x_1, x_2)$ , определённых в  $[0,1]^2$  и удовлетворяющих неравенствам

$$|\Delta_{t_i} f(x_1, x_2)| \leq L_i |t_i|^\alpha, \quad i = 1, 2, \quad |\Delta_{t_1} \Delta_{t_2} f(x_1, x_2)| \leq L_{1,2} |t_1 t_2|^\alpha$$

для любых  $(x_1 + k_1 t_1, x_2 + k_2 t_2) \in [0,1]^2$ ,  $k_1, k_2 \in \{0,1\}$ , называют классом  $H_\alpha(L_1, L_2, L_{1,2})$ .

Имеет место следующее утверждение.

*Утверждение 2.* Если  $\alpha p > 1$ , то  $H_\alpha(L_{i_1, \dots, i_s}) \subset S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$ , где

$$A_{i_1, \dots, i_s} = (2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p})^{-s} L_{i_1, \dots, i_s}.$$



### 2.3 Классы $W_1(L_{i_1, \dots, i_s})$

Приведем определение классов  $W_1(L_{i_1, \dots, i_s})$  в  $n$ -мерном случае.

Обозначим через  $W_1(L_{i_1, \dots, i_s})$  множество функций  $f(P)$ , у которых все частные производные  $\frac{\partial^s f}{\partial x_1 \dots \partial x_s}$ ,  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq n$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$  кусочно-непрерывны и ограничены в  $[0, 1]^n$ :

$$\left| \frac{\partial^s f}{\partial x_1 \dots \partial x_s} \right| \leq L_{i_1, \dots, i_s}$$

В двумерном случае определение классов  $W_1(L_{i_1, \dots, i_s})$  примет следующий вид.

Классом  $W_1(L_1, L_2, L_{1,2})$  назовём множество функций  $f(P)$ , у которых все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$  кусочно-непрерывны и ограничены в  $[0, 1]^2$ :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \leq L_1, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \leq L_2, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right| \leq L_{1,2}.$$

Имеет место следующее утверждение.

*Утверждение 3.* Справедливо вложение

$$W_1(L_{i_1, \dots, i_s}) \subset H_1(L_{i_1, \dots, i_s}).$$

### 3 Алгоритмы построения $\Pi_\tau$ -сеток

#### 3.1 Классический алгоритм. Пример вычисления координат узлов $\Pi_0$ -сеток в двумерном случае

Рассмотрим классический алгоритм построения  $\Pi_\tau$ -сеток в  $n$ -мерном случае.

В таблице 1 (Приложение А) приведены числители  $r_j^{(l)}$  направляющих чисел  $V_j^{(l)} = r_j^{(l)} 2^{-l}$  при  $j = 1, \dots, 51$ ,  $l = 1, \dots, 20$ .

Перед началом расчета надо заменить таблицу  $r_j^{(l)}$  таблицей  $V_j^{(l)}$ .

Далее, если в двоичной системе номер точки  $i$  записывается в форме

$$i = e_m \dots e_2 e_1,$$

то все декартовы координаты точки  $Q_i = (q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$  вычисляются по формуле ( $j = 1, 2, \dots, n$ ):

$$q_{i,j} = e_1 V_j^{(1)} * e_2 V_j^{(2)} * \dots * e_m V_j^{(m)}, \quad (4)$$

где  $*$  означает поразрядное сложение по модулю два в двоичной системе (операция “исключающее ИЛИ”)

В формуле умножать  $e_m$  на  $V_j^{(l)}$  не надо: если  $e_m = 1$ , то соответствующее значение  $V_j^{(l)}$  то войдет в формулу, а если  $e_m = 0$ , то соответствующее значение  $V_j^{(l)}$  надо пропустить. Для расчета по формуле нужны только логические операции.

*Пример 1.* В двумерном случае найдем координаты узлов  $\Pi_0$ -сеток в случае  $N = 2, 4, 8, 16$ , где  $N$  – количество узлов.

Узлы  $Q_0, Q_1$  образуют  $\Pi_0$ -сетку с  $N = 2$  узлами.

Чтобы вычислить координаты точки  $Q_0$ , представляем число 0 в двоичном виде:

$$0_{10} = 0_2,$$

получим координаты точки  $Q_0$ :  $Q_0 = (0; 0)$ .

Теперь, чтобы вычислить координаты точки  $Q_1$ , представляем число 1 в двоичном виде:

$$1_{10} = 1_2,$$

то есть

$$Q_1 = 1 * V_1,$$

получаем координаты точки  $Q_1$ :  $Q_1 = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ .

При построении  $\Pi_0$ -сетки с  $N = 4$  узлами к найденным узлам  $Q_0$  и  $Q_1$  добавляются узлы  $Q_2$  и  $Q_3$ .

Вычисляем координаты точки  $Q_2$ , число 2 в двоичном виде записывается следующим образом:

$$2_{10} = 10_2,$$

то есть

$$Q_2 = 0V_1 * V_2 = V_2,$$

$$q_{2,1} = \frac{1}{4}, \quad q_{2,2} = \frac{3}{4},$$

получаем координаты точки  $Q_2$ :  $Q_2 = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$ .

Координаты точки  $Q_3$ , число 3 в двоичном виде записывается следующим образом:

$$3_{10} = 11_2,$$

то есть

$$Q_3 = V_1 * V_2,$$

$$q_{3,1} = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} = 0,1 * 0,01 = 0,11 = \frac{3}{4},$$

$$q_{3,2} = \frac{1}{2} * \frac{3}{4} = 0,1 * 0,11 = 0,01 = \frac{1}{4},$$

получаем координаты точки  $Q_3$ :  $Q_3 = \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$ .

Мы получили  $\Pi_0$ -сетку с  $N = 4$  узлами. Далее для получения  $\Pi_0$ -сетки с  $N = 8$  узлами, к уже найденным узлам  $Q_0, Q_1, Q_2$  и  $Q_3$  добавляем следующие четыре узла –  $Q_4, Q_5, Q_6, Q_7$ , координаты которых вычисляются следующим образом.

$$Q_4-? \quad 4_{10} = 100_2 \Rightarrow Q_4 = V_3,$$

$$q_{4,1} = \frac{1}{8}, \quad q_{4,2} = \frac{5}{8} \Rightarrow Q_4 = \left(\frac{1}{8}; \frac{5}{8}\right).$$

$$Q_5-? \quad 5_{10} = 101_2 \Rightarrow Q_5 = V_1 * V_3,$$

$$q_{5,1} = \frac{1}{2} * \frac{1}{8} = 0,1 * 0,001 = 0,101 = \frac{5}{8},$$

$$q_{5,2} = \frac{1}{2} * \frac{5}{8} = 0,1 * 0,101 = 0,0001 = \frac{1}{8} \Rightarrow Q_5 = \left(\frac{5}{8}; \frac{1}{8}\right).$$

$$Q_6-? \quad 6_{10} = 110_2 \Rightarrow Q_6 = V_2 * V_3,$$

$$q_{6,1} = \frac{1}{4} * \frac{1}{8} = 0,01 * 0,001 = 0,011 = \frac{3}{8},$$

$$q_{6,2} = \frac{3}{4} * \frac{5}{8} = 0,11 * 0,101 = 0,011 = \frac{3}{8} \Rightarrow Q_6 = \left(\frac{3}{8}; \frac{3}{8}\right).$$

$$Q_7-? \quad 7_{10} = 111_2 \Rightarrow Q_7 = V_1 * V_2 * V_3,$$

$$q_{7,1} = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{8} = 0,1 * 0,01 * 0,001 = 0,111 = \frac{7}{8},$$

$$q_{7,2} = \frac{1}{2} * \frac{3}{4} * \frac{5}{8} = 0,1 * 0,11 * 0,101 = 0,011 = \frac{7}{8} \Rightarrow Q_7 = \left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}\right).$$

Получили сетку с количеством узлов  $N = 8$ . Следующим шагом мы находим последние восемь точек и прибавляем их к восьми уже найденным.

$$Q_8-? \quad 8_{10} = 1000_2 \Rightarrow Q_8 = V_4,$$

$$q_{8,1} = \frac{1}{16}, \quad q_{8,2} = \frac{15}{16} \Rightarrow Q_8 = \left(\frac{1}{16}; \frac{15}{16}\right),$$

$$Q_9-? 9_{10} = 1001_2 \Rightarrow Q_9 = V_1 * V_4,$$

$$q_{9,1} = \frac{1}{2} * \frac{1}{16} = 0,1 * 0,0001 = 0,1001 = \frac{9}{16},$$

$$q_{9,2} = \frac{1}{2} * \frac{15}{16} = 0,1 * 0,1111 = 0,0111 = \frac{7}{16} \Rightarrow Q_9 = \left(\frac{9}{16}; \frac{7}{16}\right),$$

$$Q_{10}-? 10_{10} = 1010_2 \Rightarrow Q_{10} = V_2 * V_4,$$

$$q_{10,1} = \frac{1}{4} * \frac{1}{16} = 0,01 * 0,0001 = 0,0101 = \frac{5}{16},$$

$$q_{10,2} = \frac{3}{4} * \frac{15}{16} = 0,11 * 0,1111 = 0,0011 = \frac{3}{16} \Rightarrow Q_{10} = \left(\frac{5}{16}; \frac{3}{16}\right),$$

$$Q_{11}-? 11_{10} = 1011_2 \Rightarrow Q_{11} = V_1 * V_2 * V_4,$$

$$q_{11,1} = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{16} = 0,1 * 0,01 * 0,0001 = 0,1101 = \frac{13}{16},$$

$$q_{11,2} = \frac{1}{2} * \frac{3}{4} * \frac{15}{16} = 0,1 * 0,11 * 0,1111 = 0,1011 = \frac{11}{16} \Rightarrow Q_{11} = \left(\frac{13}{16}; \frac{11}{16}\right),$$

$$Q_{12}-? 12_{10} = 1100_2 \Rightarrow Q_{12} = V_3 * V_4,$$

$$q_{12,1} = \frac{1}{8} * \frac{1}{16} = 0,001 * 0,0001 = 0,0011 = \frac{3}{16},$$

$$q_{12,2} = \frac{5}{8} * \frac{15}{16} = 0,101 * 0,1111 = 0,0101 = \frac{5}{16} \Rightarrow Q_{12} = \left(\frac{3}{16}; \frac{5}{16}\right),$$

$$Q_{13}-? 13_{10} = 1101_2 \Rightarrow Q_{13} = V_1 * V_3 * V_4,$$

$$q_{13,1} = \frac{1}{2} * \frac{1}{8} * \frac{1}{16} = 0,1 * 0,001 * 0,0001 = 0,1011 = \frac{11}{16},$$

$$q_{13,2} = \frac{1}{2} * \frac{5}{8} * \frac{15}{16} = 0,1 * 0,101 * 0,1111 = 0,1101 = \frac{13}{16} \Rightarrow Q_{13} = \left(\frac{11}{16}; \frac{13}{16}\right),$$

$$Q_{14}-? 14_{10} = 1110_2 \Rightarrow Q_{14} = V_2 * V_3 * V_4,$$

$$q_{14,1} = \frac{1}{4} * \frac{1}{8} * \frac{1}{16} = 0,01 * 0,001 * 0,0001 = 0,0111 = \frac{7}{16},$$

$$q_{14,2} = \frac{3}{4} * \frac{5}{8} * \frac{15}{16} = 0,11 * 0,101 * 0,1111 = 0,1001 = \frac{9}{16} \Rightarrow Q_{14} = \left(\frac{7}{16}; \frac{9}{16}\right),$$

$$Q_{15}-? 15_{10} = 1111_2 \Rightarrow Q_{15} = V_1 * V_2 * V_3 * V,$$

$$q_{15,1} = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{8} * \frac{1}{16} = 0,1111 = \frac{15}{16},$$

$$q_{15,2} = \frac{1}{2} * \frac{3}{4} * \frac{5}{8} * \frac{15}{16} = 0,1 * 0,11 * 0,101 * 0,1111 = 0,0001 = \frac{1}{16} \Rightarrow Q_{15} = \left(\frac{15}{16}; \frac{1}{16}\right).$$

В результате получили  $\Pi_0$ -сетку с  $N = 16$  узлами

### 3.2 Арифметический алгоритм

Для реализации формулы (4) удобно использовать машинные команды. Если такой возможности нет или использование процедур в машинном коде нежелательно, то можно прибегнуть к расчету непосредственно по таблице  $r_j^{(l)}$ . Для этого по заданному номеру  $i$  вычисляем

$$m = 1 + [\ln i / \ln 2],$$

а затем для

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^m 2^{-k+1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=k}^m [2\{i2^{-l}\}][2\{r_j^{(l)}2^{k-1-l}\}] \right\}, \quad (5)$$

в последних двух формулах  $[a]$  – целая часть, а  $\{a\}$  – дробная часть числа  $a$ .

Расчет по арифметическому алгоритму гораздо медленнее, чем расчет по формуле (4), но если количество используемых в расчете точек  $Q_i$  не превосходит  $10^4$ , то он вполне приемлем.

Для вычисления координат  $n$ -мерных векторов  $Q_i$  при  $i = 1, 2, \dots, N$ , нужно выполнить

$$K(N) = N(9n + 7) + 4n \sum_{i=1}^m i2^i,$$

операций, где  $m$  – минимальное количество двоичных разрядов, необходимых для записи числа  $N$ .

На рисунке 3.1 представлена блок-схема арифметического алгоритма.

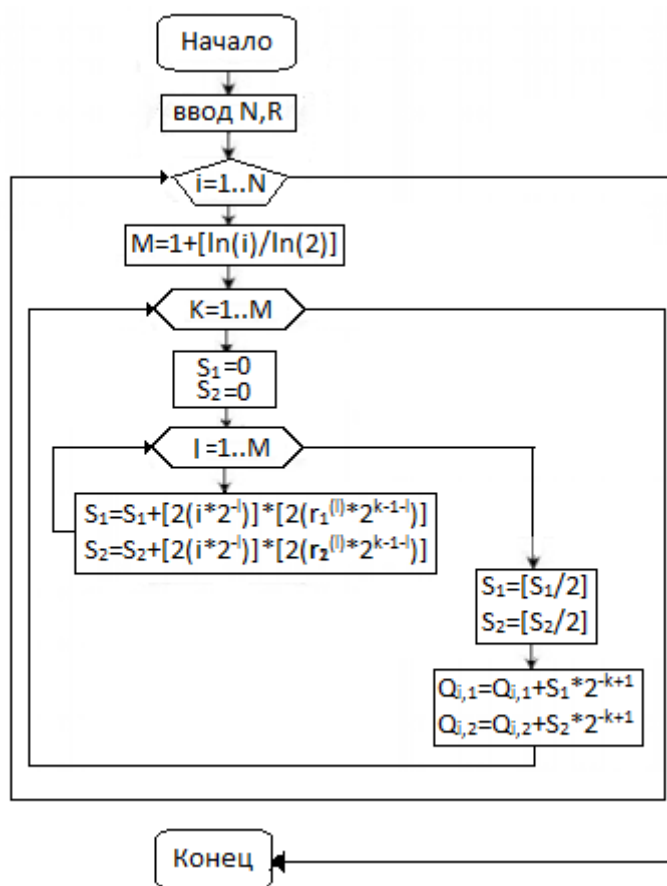


Рисунок 3.2 – Блок-схема арифметического алгоритма

Цикл внутри  $K=1..M$  считает правую сумму в формуле (5), а цикл  $k=1..M$  считает внешнюю (левую) сумму по формуле (5). Выходные данные – это массив  $Q$ .  $S1$  – первая координата,  $S2$  – вторая координата точки. В  $n$ -мерном случае число координат  $S$  будет равно  $n$ .

Текст программы, составленной по этому алгоритму на языке Maple, приведен в Приложении Б.

### 3.3 Сверхбыстрый алгоритм

Сверхбыстрый алгоритм заключается в том, что порядок следования точек  $Q_i$  меняется так, чтобы каждая следующая точка  $Q'_i$  легко вычислялась по предыдущей точке  $Q'_{i-1}$  и чтобы при этом двоичные участки новой последовательности  $Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_i, \dots$  совпадали с двоичными участками последовательности  $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$ . Последнее условие гарантирует сохранение всех основных и дополнительных свойств равномерности.

Пусть  $\Gamma(i)$  – так называемый код Грея, соответствующий номеру  $i$ . По определению

$$\Gamma(i) = i * [i/2],$$

где  $[z]$  – целая часть  $z$ .

Например,  $\Gamma(3) = 2$ , так как в двоичной системе  $i = 11$ ,  $[i/2] = 1$ ,  $i * [i/2] = 10$ ; или  $\Gamma(10) = 15$ , так как  $i = 1010$ ,  $[i/2] = 101$ ,  $i * [i/2] = 1111$ .

Два соседних кода  $\Gamma(i)$  и  $\Gamma(i-1)$  всегда различаются в одном и только одном разряде  $l = l(i)$ , номер которого можно вычислить по формуле

$$l = 1 + \log_2[\Gamma(i) * \Gamma(i-1)]. \quad (6)$$

Поэтому, полагая  $Q'_i = Q_{\Gamma(i)}$ , получаем для расчета  $Q'_i$  следующий простой алгоритм:

$$q_{0,1} = \dots = q_{0,n} = 0,$$

$$q_{i,j} = q_{i-1,j} * V_j^{(l)} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Так как вычисление по последней формуле и по формуле (6) может быть осуществлено при помощи одних логических операций, то при больших  $n$  этот алгоритм оказывается быстрее, чем стандартные алгоритмы получения псевдслучайных чисел, в которых для получения  $n$  чисел надо затратить  $n$  умножений.

Для вычисления координат  $n$ -мерных векторов  $Q'_i$  при  $i = 1, 2, \dots, N$  необходимо выполнить  $K'(N) = N(5n + 12)$  операций.

На рисунке 3.2 приведена блок-схема сверхбыстрого алгоритма.

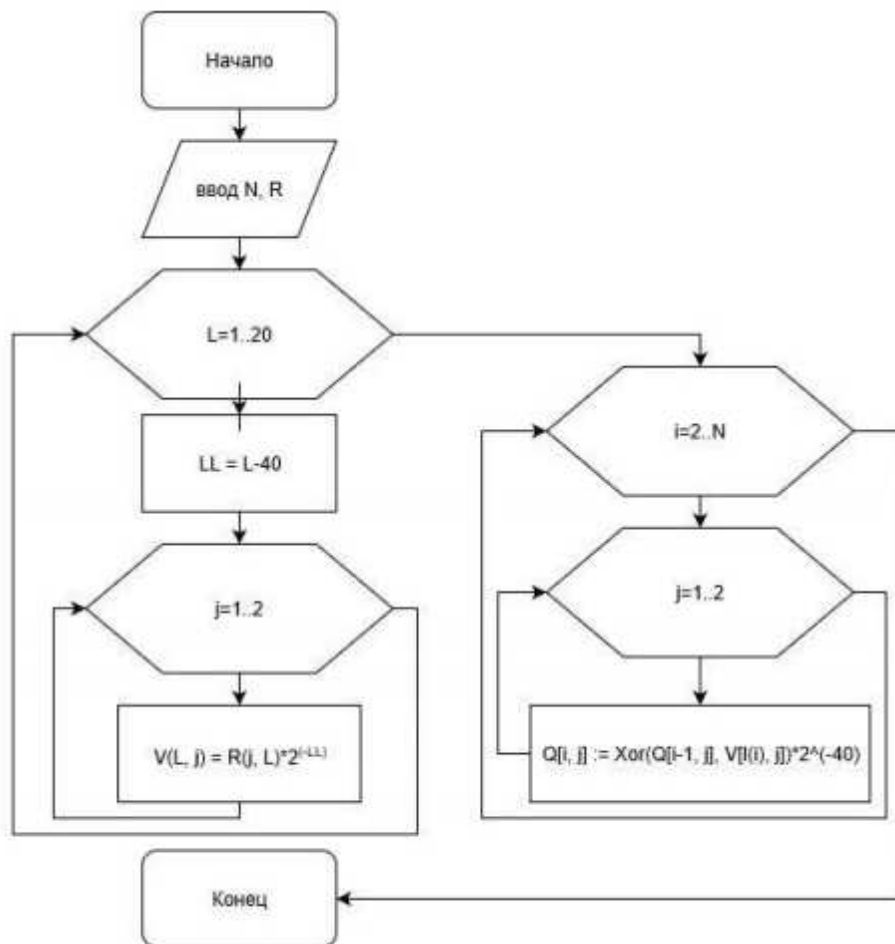


Рисунок 3.3 – Блок-схема сверхбыстрого алгоритма

Здесь используются следующие обозначения:

$N$  – число узлов,

$R$  – таблица числителей,

$LL$  – количество бит, на которое сдвигается число в двоичном представлении,

$V(L, j)$  – направляющие числа,

$Xor(a, b) = a \oplus_2 b$  – исключающее “или” (сложение по модулю 2).

На рисунках 2.5-2.15 приведены схемы расположения точек  $\Pi_0$ -сеток с

$N = 2^1, 2^2, \dots, 2^8$  узлами, построенных по арифметическому и сверхбыстрому алгоритмам

Текст программы, составленной по этому алгоритму на языке Maple, приведен в Приложении В.



#### 4 Сравнение быстродействия арифметического и сверхбыстрого алгоритмов построения $\Pi_0$ -сеток в двумерном случае

Были проведены численные эксперименты по построению  $\Pi_0$ -сеток с помощью арифметического и сверхбыстрого алгоритмов. При этом были построены  $\Pi_0$ -сетки с числом узлов  $N = 2^2, \dots, 2^{13}$ . Ниже приведена таблица 1 с результатами этих численных экспериментов. В первой колонке таблицы приведены значения параметра  $N$  (количество узлов генерируемых  $\Pi_0$ -сеток), во второй и третьей колонках – время  $t(N)$  и  $t'(N)$ , затраченное на построение  $\Pi_0$ -сеток с помощью арифметического и сверхбыстрого алгоритмов соответственно, в четвертой колонке - отношение

$$\frac{t(N)}{t'(N)},$$

в пятой и шестой колонках – количество арифметических операций  $K(N)$  и  $K'(N)$ , затраченных на построение  $\Pi_0$ -сеток с помощью арифметического и сверхбыстрого алгоритмов соответственно, в седьмой колонке – отношение

$$\frac{K(N)}{K'(N)}.$$

При этом величины  $K(N)$  и  $K'(N)$  вычисляются по формулам

$$K(N) = N(9n + 7) + 4n \sum_{i=1}^m i2^i,$$

$$K'(N) = N(5n + 12),$$

где  $n = 2$  – размерность, а  $m$  - минимальное количество двоичных разрядов, необходимых для записи числа  $N$ :

Таблица 1 – Результаты сравнения быстродействия алгоритмов

N	Время работы в секундах		$\frac{t(N)}{t'(N)}$	Количество операций		$\frac{K(N)}{K'(N)}$
	Сверхбыстрый $t'(N)$	Арифметический $t(N)$		Сверхбыстрый $K'(N)$	Арифметический $K(N)$	
4	0.016	0.016	1	88	180	2,045454545
8	0.016	0.016	1	176	472	2,681818182
16	0.016	0.031	1,9375	352	1184	3,363636364
32	0.016	0.062	3.875	704	2864	4,068181818
64	0.016	0.125	7,8125	1408	6736	4,784090909
128	0.016	0.25	15,625	2816	15504	5,505681818
256	0.032	0.609	19,03125	5632	35088	6,230113636
512	0.032	1.438	44,9375	11264	78352	6,955965909
1024	0.047	3.328	70,808510	22528	173072	7,682528409
2048	0.078	7.968	102,15384	45056	378896	8,409446023
4096	0.156	18.453	118,28846	90112	823312	9,136541193

8196	0.297	42.906	144,46464	180312	1778196	9,861772927
------	-------	--------	-----------	--------	---------	-------------

Таким образом, в результате проведения численных экспериментов выяснилось, что отношение  $\frac{t(N)}{t'(N)}$ , как и  $\frac{K(N)}{K'(N)}$ , увеличивается с ростом  $N$ . Следовательно, эффективность сверхбыстрого алгоритма по сравнению с арифметическим алгоритмом возрастает с ростом числа  $N$  узлов  $\Pi_0$ -сеток.

## 5 Исследование на классах функций погрешностей кубатурных формул, узлы которых образуют $\Pi_\tau$ -сетки

Будем рассматривать кубатурные формулы вида

$$I(\varphi) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \varphi(x_1^i, \dots, x_n^i) = Q(\varphi), \quad (7)$$

узлы  $(x_1^i, \dots, x_n^i)$  которых принадлежат единичному  $n$ -мерному кубу  $[0,1]^n$ .

### 5.1 Исследуемые функции

Рассмотрим следующие функции:

$$\varphi_{1,2}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, & 0 \leq x_1 < \frac{1}{3}, 0 \leq x_2 < \frac{1}{3}, \\ x_1 + 3x_2, & 0 \leq x_1 < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \leq x_2 < \frac{2}{3}, \\ 3x_1 + x_2, & \frac{1}{3} \leq x_1 < \frac{2}{3}, 0 \leq x_2 < \frac{1}{3}, \\ 3x_1 + 3x_2, & \frac{1}{3} \leq x_1 < \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \leq x_2 < \frac{2}{3}, \\ x_1 + 6x_2, & 0 \leq x_1 < \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \leq x_2 \leq 1, \\ 6x_1 + x_2, & \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 < \frac{1}{3}, \\ 3x_1 + 6x_2, & \frac{1}{3} \leq x_1 < \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \leq x_2 \leq 1, \\ 6x_1 + 3x_2, & \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, \frac{1}{3} \leq x_2 < \frac{2}{3}, \\ 6x_1 + 6x_2, & \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, \frac{2}{3} \leq x_2 \leq 1; \end{cases}$$

$$\varphi_{2,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \left| x_1 - \frac{1}{2} \right| * \left| x_2 - \frac{1}{3} \right| * \dots * \left| x_n - \frac{1}{n+1} \right| \right)^{\frac{1}{2}}, n = 2, 3, \dots, 10;$$

$$\varphi_{3,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sin(x_1 + x_2 + \dots + x_n), n = 2, 3, \dots, 10;$$

$$\varphi_{4,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n, n = 2, 3, \dots, 10;$$

$$\varphi_{5,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2) * g(x_2, x_3) * \dots * g(x_{n-1}, x_n), n = 2, 3, \dots, 10,$$

$$\text{где } g(x_k, x_{k+1}) = \begin{cases} x_k^{x_{k+1}}, & \text{при } x_k^2 + x_{k+1}^2 \neq 0, \\ 1, & \text{при } x_k = x_{k+1} = 0. \end{cases}$$

Проверим, каким классам принадлежит функция

$$\varphi_{2,2}(x_1, x_2) = \left( \left| x_1 - \frac{1}{2} \right| * \left| x_2 - \frac{1}{3} \right| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Частная производная  $\frac{\partial(\varphi_{2,3}(x_1, x_2))}{\partial x_1} = \frac{(2x_1-1)\sqrt{|x_2-\frac{1}{3}|}}{4|x_1-\frac{1}{2}|^{\frac{3}{2}}}$  неограничена в окрестности

точек с координатой  $x_1 = \frac{1}{2}$ , поэтому  $\varphi_{2,2}(x_1, x_2)$  не принадлежит классам функций с кусочно-непрерывными ограниченными частными производными. Аналогично доказывается, что функции  $\varphi_{2,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n = 3, \dots, 10$ , также не принадлежат указанным классам.

Докажем, что  $\varphi_{3,2}(x_1, x_2)$ ,  $\varphi_{4,2}(x_1, x_2)$ ,  $\varphi_{5,2}(x_1, x_2)$  принадлежат классам функций с кусочно-непрерывными ограниченными частными производными. Вычислим все частные производные первого и второго порядков этих функций. Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_{3,2}(x_1, x_2) &= \sin(x_1 + x_2), \\ \frac{\partial \varphi_{3,2}(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= \cos(x_1 + x_2), & \frac{\partial \varphi_{3,2}(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= \cos(x_1 + x_2), \\ \frac{\partial^2 \varphi_{3,2}(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} &= -\sin(x_1 + x_2), & \frac{\partial^2 \varphi_{3,2}(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} &= -\sin(x_1 + x_2), \\ \frac{\partial^2 \varphi_{3,2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \varphi_{3,2}(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = -\sin(x_1 + x_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{4,2}(x_1, x_2) &= \cos x_1 + \cos x_2, \\ \frac{\partial \varphi_{4,2}(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= -\sin x_1, & \frac{\partial \varphi_{4,2}(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= -\sin x_2, \\ \frac{\partial^2 \varphi_{4,2}(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} &= -\cos x_1, & \frac{\partial^2 \varphi_{4,2}(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} &= -\cos x_2, \\ \frac{\partial^2 \varphi_{4,2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \varphi_{4,2}(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} \equiv 0. \end{aligned}$$

Функции  $\varphi_{3,2}(x_1, x_2)$ ,  $\varphi_{4,2}(x_1, x_2)$  и все их частные производные до 2-го порядка включительно непрерывны и ограничены в  $[0,1]^2$ , поэтому  $\varphi_{3,2}(x_1, x_2)$ ,  $\varphi_{4,2}(x_1, x_2) \in W_1(L_1, L_2, L_{1,2})$ . Тогда в соответствии с утверждениями 3, 2 эти функции будут принадлежать классу  $H_1(L_1, L_2, L_{1,2})$ , а следовательно, и классу  $S_p(A_1, A_2, A_{1,2})$  для любого  $p > 1$ .

В случаях  $n = 3, \dots, 10$  принадлежность функций  $\varphi_{3,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\varphi_{4,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  классам  $W_1(L_{i_1, \dots, i_s})$ ,  $H_\alpha(L_{i_1, \dots, i_s})$ ,  $S_p(A_{i_1, \dots, i_s})$  ( $p > 1$ ) доказывается аналогично.

Проверим, каким классам принадлежит функция

$$\varphi_{5,2}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^{x_2}, & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 1, & \text{при } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

В любой точке  $(x_1, x_2) \neq (0,0)$  частная производная  $\frac{\partial \varphi_{5,2}(x_1, x_2)}{\partial x_2} = x_1^{x_2} \ln x_1$ , при фиксированном  $x_2 \neq 0$   $\lim_{x_1 \rightarrow 0+0} x_1^{x_2} \ln x_1 = \infty$ , следовательно, в окрестности точек  $(0, x_2)$   $\frac{\partial \varphi_{5,2}(x_1, x_2)}{\partial x_2}$  неограничена, а значит  $\varphi_{5,2}(x_1, x_2)$  не принадлежит классам функций с кусочно-непрерывными ограниченными

частными производными. Аналогично доказывается, что функции  $\varphi_{5,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n=3, \dots, 10$ , также не принадлежат указанным классам.

## 5.2 Результаты численных экспериментов

С помощью кубатурных формул вида (7), узлы которых образуют равномерные, параллелипипедальные сетки и  $\Pi_\tau$ -сетки, в  $n$ -мерном случае ( $n=2, \dots, 10$ ) были вычислены приближенные значения кратных интегралов от функций, приведенных в разделе 5.1.

Количество узлов каждой из упомянутых сеток взято так, чтобы оно было максимально близким к  $2^\nu$ , где  $\nu$  – некоторое натуральное число.

Координаты узлов равномерной сетки вычислялись по формуле

$$P = \left( \frac{r_1 + \beta_1}{M}, \dots, \frac{r_n + \beta_n}{M} \right) \text{ при } \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \frac{1}{2},$$
$$N = M^n, \quad r_1, \dots, r_n = 0, \dots, M - 1$$

Узлы параллелипипедальной сетки вычислялись по формуле

$$P_\mu = \left( \left\{ \frac{a_1 \mu}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_n \mu}{N} \right\} \right), \text{ при } a_1 = 3, a_2 = 2, N > 3 \text{ – простое число, } \mu = 0, \dots, N - 1.$$

Узлы  $\Pi_\tau$ -сетки были вычислены по арифметическому алгоритму, изложенному в разделе 3.2.

В таблицах 2 – 38 приведены значения числа  $N$  узлов, а также значения абсолютной

$$\Delta(\varphi) = |I(\varphi) - Q(\varphi)|$$

и относительной

$$\delta(\varphi) = \left| \frac{\Delta(\varphi)}{I(\varphi)} \right|$$

погрешностей каждой из кубатурных формул.

Таблица 2 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $P_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_2(x_1, x_2)$

Число узлов в N	Ptau -сетка		Число узлов в N	Параллелепидальная сетка		Число узлов в N	Равномерная сетка	
	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$		Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$		Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,788193	0,177343	7	2,460068	0,5535154	8	1,11111	0,25
16	0,342880	0,077148	17	1,2920992	0,2907224	16	0,913193	0,205468
32	0,2003023	0,045068	31	1,1235445	0,2302976	32	0,276443	0,0622
64	0,0865328	0,019469	61	0,1066793	0,1095028	64	0,073349	0,016036
128	0,0502779	0,011312	127	0,0920430	0,0387097	128	0,018448	0,004151
256	0,0216829	0,004878	257	0,0875246	0,0196930	256	0,017134	0,003205
512	0,0125811	0,002830	509	0,0712156	0,0227732	512	0,015407	0,003467
1024	0,0054228	0,001220	1021	0,0537541	0,0120946	1024	0,014701	0,003533
2048	7,14E-03	0,000907	2053	0,0118485	0,0044092	2048	0,009859	0,002318
4096	3,14E-03	0,000707	4093	0,0108485	0,0024092	4096	0,005859	0,001318
8192	0,0003376	7,60E-05	8191	0,0019595	0,0004409	8192	0,0005363	0,004485

Таблица 3 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{2,3}(x_1, x_2)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,04629271	0,1999270	7	0,081430	0,3516787	8	0,0201674	0,087098
16	0,01784660	0,0770751	17	0,040516	0,1749813	16	0,0252559	0,109074
32	0,01458320	0,0629813	31	0,025889	0,1118112	32	0,0166170	0,071764
64	0,00694606	0,0299983	61	0,023107	0,0997972	64	0,0090944	0,039276
128	0,00389226	0,0168097	127	0,012647	0,0546194	128	0,0043392	0,018740
256	0,00206513	0,0089188	257	0,010786	0,0465830	256	0,0019322	0,008344
512	0,00096447	0,0041653	509	0,008136	0,0351392	512	0,0007221	0,003118
1024	0,00045318	0,0019572	1021	0,007280	0,0314437	1024	9,024E-05	0,000389
2048	0,00022055	0,0009525	2053	0,006839	0,0295386	2048	0,0002293	0,000990
4096	0,00010910	0,0004711	4093	0,004343	0,0187597	4096	0,0003881	0,001676
8192	5,6345E-05	0,0002433	8191	0,001292	0,0055838	8192	0,0004683	0,002022

Таблица 4 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{2,3}(x_1, x_2, x_3)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,04154496	0,3474854	7	0,0615992	0,5152213		0,065516	0,547982
16	0,00988805	0,0827044	17	0,0346072	0,2894581	16	0,029951	0,250514
32	0,00824252	0,0689411	31	0,0343442	0,2872583		-	-
64	0,0027307	0,0228397	61	0,0155306	0,1298994	81	0,001779	0,014885
128	0,00260263	0,0217686	127	0,0045150	0,0377645		0,013896	0,116233
256	0,00111930	0,0093619	257	0,0017620	0,0147371	256	0,005715	0,047804
512	0,00050361	0,0042122	509	0,0014281	0,0119453	625	0,000798	0,006675
1024	0,00026102	0,0021832	1021	0,0010085	0,0084356	1296	0,003172	0,026535
2048	0,00015838	0,0013247	2053	0,0008293	0,0069367	2407	0,002642	0,022103
4096	8,8982E-05	0,0007442	4093	0,0006370	0,0053285	2096	0,000536	0,004485
8192	3,5662E-05	0,0002982	8191	0,0004279	0,0035792	6561	0,000419	0,003505



Таблица 5 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $P_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{2,4}(x_1, x_2, \dots, x_4)$

Число узлов в N	Птау -сетка		Число узлов в N	Параллелепидальная сетка		Число узлов в N	Равномерная сетка	
	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$		Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$		Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,01697696	0,2645952	7	0,0023837	0,0371525		-	-
16	0,00959829	0,1495946	17	0,0207631	0,3236044	16	0,03489	0,543792
32	0,00607116	0,0946223	31	0,0093063	0,1450446		-	-
64	0,00467797	0,0729087	61	0,0274278	0,4274775	81	0,01576	0,245733
128	0,00111451	0,0173702	127	0,0118180	0,1841984		-	-
256	0,00061893	0,0096463	257	0,0054048	0,0842375	256	0,00147	0,023022
512	0,00033680	0,0052492	509	0,0020355	0,0317257	625	0,00543	0,084775
1024	0,00016946	0,0026412	1021	0,0007565	0,0117905	1296	0,00198	0,030896
2048	0,00012164	0,0018959	2053	0,0003859	0,0060156	2407	0,00438	0,068376
4096	5,4590E-05	0,0008508	4093	0,0001452	0,0022635	2096	8,59E-05	0,001340
8192	2,5830E-05	0,0004025	8191	5,118E-05	0,0007976	6561	0,00147	0,022930

Таблица 6 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $P_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{2,5}(x_1, x_2, \dots, x_5)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,00728414	0,2054749	7	0,0125407	0,3537569		-	-
16	0,00773649	0,2182353	17	0,0086951	0,2452788		-	-
32	0,00623935	0,1760030	31	0,0073165	0,2063894	32	0,018520	0,522432
64	0,00342945	0,0967368	61	0,0029430	0,0830191		-	-
128	0,00072100	0,0203385	127	0,0015650	0,0441474		-	-
256	0,00071092	0,0200524	257	0,0010477	0,0295555	243	0,012375	0,349094
512	0,00023065	0,0065063	509	0,0003714	0,0104782		-	-
1024	3,7551E-05	0,0010592	1021	0,0002769	0,0078124	1024	0,004307	0,121517
2048	3,0822E-05	0,0008694	2053	0,0001365	0,0037421		-	-
4096	5,2804E-06	0,0001489	4093	0,0001031	0,0029107	3125	0,002515	0,070966
8192	5,0003E-06	0,0001410	8191	1,804E-05	0,0005091	7776	0,000597	0,016840

Таблица 7 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $P_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{2,6}(x_1, x_2, \dots, x_6)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,01253658	0,6253630	7	0,0077212	0,3851832		-	-
16	0,00837140	0,4175911	17	0,0068415	0,3412677		-	-
32	0,00546740	0,2727308	31	0,0064017	0,3193099		-	-
64	0,00165352	0,0824830	61	0,0130039	0,6486761	64	0,010019	0,499784
128	0,00100350	0,0500577	127	0,0097061	0,4841701		-	-
256	0,00094725	0,0472521	257	0,0096531	0,4815268		-	-
512	0,00027310	0,0136233	509	0,0047993	0,2394067	729	0,007663	0,382262
1024	9,1490E-05	0,0045638	1021	0,0032111	0,1601821		-	-
2048	6,0502E-05	0,0030180	2053	0,0018732	0,0934438		-	-
4096	2,7866E-05	0,0013900	4093	0,0007605	0,0379361	4096	0,001453	0,072497
8192	1,7957E-05	0,0008957	8191	1,408E-05	0,0007024	9564	0,000401	0,020046

Таблица 8 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{2,7}(x_1, x_2, \dots, x_7)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,00736556	0,6388506	7	0,0056315	0,4884535		-	-
16	0,00487232	0,4225999	17	0,0056277	0,4881200		-	-
32	0,00318913	0,2766090	31	0,0051231	0,4443595		-	-
64	0,00075223	0,065244	61	0,0049384	0,4283326		-	-
128	0,00039092	0,0339070	127	0,0618793	5,3670983	128	0,005514	0,478314
256	0,00047537	0,0412316	257	0,0034483	0,2990942		-	-
512	0,00010647	0,0092350	509	0,0030960	0,2685387		-	-
1024	0,00017363	0,0150598	1021	0,0019288	0,1673020		-	-
2048	5,3965E-05	0,0046806	2053	0,0012146	0,1053489	2187	0,004621	0,400885
4096	5,2028E-06	0,0004512	4093	0,0010840	0,0940279		-	-
8192	2,7849E-06	0,0002415	8191	0,0010140	0,0879546	9564	0,001332	0,115545

Таблица 9 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{2,8}(x_1, x_2, \dots, x_8)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,00533407	0,7930330	7	0,0059736	0,8881141		-	-
16	0,00317305	0,4717475	17	0,0046629	0,6932602		-	-
32	0,00222649	0,3310193	31	0,0036413	0,5413735		-	-
64	0,00016707	0,0248387	61	0,0016749	0,2490198		-	-
128	2,9807E-05	0,0044315	127	0,0012722	0,1891555		-	-
256	3,0639E-05	0,0045552	257	0,0010409	0,1547636	256	0,003085	0,458756
512	3,1058E-05	0,0046175	509	0,0006287	0,0934835		-	-
1024	5,3704E-06	0,0007984	1021	0,0005378	0,0799654		-	-
2048	5,0309E-05	0,0074796	2053	0,0001023	0,0152108		-	-
4096	8,8930E-06	0,0013225	4093	2,180E-05	0,0032415		-	-
8192	9,6841E-06	0,0014397	8191	1,412E-05	0,0020995	9564	0,002772	0,412171

Таблица 10 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{2,9}(x_1, x_2, \dots, x_9)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,00299947	0,7554593	7	0,0034765	0,8756274		-	-
16	0,00176372	0,4442194	17	0,0030793	0,7755846		-	-
32	0,00140157	0,3530061	31	0,0024673	0,6214352		-	-
64	0,00016883	0,0425227	61	0,0019744	0,4972890		-	-
128	0,00014518	0,0365658	127	0,0019182	0,4831307		-	-
256	1,1379E-05	0,0028660	257	0,0018894	0,4758922		-	-
512	2,3768E-05	0,0059865	509	0,0018330	0,4616775	512	0,001749	0,440697
1024	2,7572E-05	0,0069444	1021	0,0015723	0,3960252		-	-
2048	2,7467E-06	0,0006918	2053	0,0014823	0,3733617		-	-
4096	3,7773E-05	0,0095136	4093	0,0004179	0,1052692		-	-
8192	5,6414E-06	0,0014208	8191	2,037E-05	0,0051145	9564	0,001662	0,418723

Таблица 11 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{2,10}(x_1, x_2, \dots, x_{10})$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,00177649	0,7505660	7	0,0022303	0,9423311		-	-
16	0,00084046	0,3550939	17	0,0021439	0,9058306		-	-
32	0,00078636	0,3322376	31	0,0020327	0,8588471		-	-
64	0,00048348	0,2042726	61	0,0019626	0,8292270		-	-
128	0,00018636	0,0787366	127	0,001947	0,8226631		-	-
256	1,5392E-05	0,0065032	257	0,0018983	0,8020650		-	-
512	1,2896E-05	0,0054488	509	0,0018175	0,7678968		-	-
1024	1,1574E-05	0,0048903	1021	0,0008501	0,3591876	1024	0,000998	0,421918
2048	3,3735E-05	0,0142531	2053	0,0005979	0,2526475		-	-
4096	2,9766E-06	0,0012576	4093	0,0003937	0,1663747		-	-
8192	2,8084E-06	0,0011865	8191	8,443E-06	0,0035671	9564	0,000398	0,159181

Таблица 12 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{3,2}(x_1, x_2)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,07948014	0,1027347	7	0,1033975	0,1336499	8	0,223414	0,288781
16	0,03157953	0,0408191	17	0,0574571	0,0742680	16	0,093873	0,121339
32	0,01609241	0,020800	31	0,0363699	0,0470111	32	0,058203	0,075232
64	0,00850671	0,0109956	61	0,0250326	0,0323567	64	0,034433	0,044508
128	0,00469910	0,0060739	127	0,0182601	0,0236027	128	0,022007	0,028445
256	0,00194003	0,0025076	257	0,0138994	0,0179662	256	0,016092	0,020800
512	0,00096633	0,0012490	509	0,0109299	0,0141278	512	0,010929	0,014128
1024	0,00048569	0,0006278	1021	0,0088179	0,0113979	1024	0,008817	0,011397
2048	0,0002437	0,0003150	2053	0,007263	0,0093880	2048	0,006263	0,007388
4096	0,00012409	0,0001604	4093	0,0060853	0,0078658	4096	0,003924	0,005460
8192	7,3461E-05	9,202E-05	8191	0,0051721	0,0066854	8192	6,34E-05	8,20E-05

Таблица 13 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{3,3}(x_1, x_2, x_3)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,03357451	0,0381808	7	0,2694644	0,3064342		0,069286	0,078791
16	0,00758058	0,0086206	17	0,0987535	0,1123022	16	0,009855	0,011207
32	0,00371445	0,0042240	31	0,0175848	0,0199974		-	-
64	0,00331245	0,0037669	61	0,0104000	0,0118269	81	0,000817	0,000929
128	0,00156491	0,0017796	127	0,0102282	0,0116315		0,000990	0,001126
256	0,00021935	0,0002494	257	0,0072815	0,0082805	256	0,001292	0,001469
512	0,00016911	0,0001923	509	0,0069006	0,0078524	625	0,001088	0,001237
1024	0,00010703	0,0001217	1021	0,0068634	0,0078050	1296	0,000812	0,000923
2048	4,5784E-05	5,206E-05	2053	0,0062837	0,0071458	2407	0,000534	0,000608
4096	2,4546E-05	2,791E-05	4093	0,0025428	0,0028917	2096	0,000372	0,000423
8192	1,2618E-05	1,434E-05	8191	7,575E-05	8,614E-05	6561	0,000247	0,000282

Таблица 14 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{3,4}(x_1, x_2, \dots, x_4)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,02863977	0,0372613	7	0,2078715	0,2704484		-	-
16	0,02819131	0,0366779	17	0,0971267	0,1263654	16	0,023952	0,031162
32	0,02134661	0,0277727	31	0,0882431	0,1148075		-	-
64	0,01235200	0,0160678	61	0,0207616	0,0270117	81	0,012732	0,011769
128	0,00519468	0,0067584	127	0,0171036	0,0222525		-	-
256	0,00302453	0,0039350	257	0,0053943	0,0070182	256	0,006422	0,009259
512	0,00588450	0,0076312	509	0,0020808	0,0027072	625	0,001497	0,001947
1024	0,00339554	0,0051544	1021	0,002058	0,0026785	1296	0,000687	0,000898
2048	0,00286344	0,0037401	2053	0,0019673	0,0025595	2407	0,000336	0,000437
4096	0,00161414	0,0006479	4093	0,0011573	0,0015058	2096	0,000171	0,000223
8192	9,4068E-05	0,0002093	8191	3,551E-05	4,620E-05	6561	8,40E-05	0,000109

Таблица 15 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{3,5}(x_1, x_2, \dots, x_5)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,01875720	0,0386694	7	0,2149241	0,4430833		-	-
16	0,0351987	0,0725649	17	0,1589403	0,3276683		-	-
32	0,03008216	0,0620168	31	0,0779480	0,1606961	32	0,043850	0,090400
64	0,01815001	0,0374177	61	0,1123922	0,2317057		-	-
128	0,00976429	0,0201298	127	0,0702581	0,1448427		-	-
256	0,00428794	0,0088399	257	0,0556879	0,1148042	243	0,014887	0,030691
512	0,00357078	0,0073614	509	0,0187687	0,0386933		-	-
1024	0,00168763	0,0034791	1021	0,0149241	0,0307672	1024	0,007282	0,015012
2048	0,00075562	0,0015577	2053	0,0096778	0,0199516		-	-
4096	0,00035482	0,0007315	4093	0,0096755	0,0199468	3125	0,004373	0,009015
8192	0,00019223	0,0003963	8191	6,086E-05	0,0001253	7776	0,002943	0,006068

Таблица 16 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_T$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{3,6}(x_1, x_2, \dots, x_6)$

Птау -сетка			Параллелепипедальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,02809107	0,2561373	7	0,0418872	0,3819322		-	-
16	0,01684295	0,1535761	17	0,0218258	0,1990102		-	-
32	0,00813211	0,0741494	31	0,0213486	0,1946593		-	-
64	0,00181701	0,0165677	61	0,0209675	0,1911838	64	0,022362	0,203906
128	0,00570525	0,0520210	127	0,0208532	0,1901419		-	-
256	0,00310879	0,0283463	257	0,0207966	0,1896257		-	-
512	0,00160990	0,0146793	509	0,0142532	0,1299626	729	0,004407	0,040187
1024	0,00061009	0,0055629	1021	0,0105133	0,0958614		-	-
2048	0,00058441	0,0053287	2053	0,0062916	0,0573681		-	-
4096	0,00030254	0,0027585	4093	0,0026274	0,0239573	4096	0,008185	0,001621
8192	6,5970E-05	0,0006015	8191	0,0004396	8,707E-05	9564	0,017915	0,003548

Таблица 19 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_T$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{3,9}(x_1, x_2, \dots, x_9)$

Птау -сетка			Параллелепипедальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,87628360	0,1157079	7	0,8443221	0,1114875		-	-
16	0,43567543	0,0575282	17	0,3077409	0,0406353		-	-
32	0,21722133	0,0286827	31	0,1771446	0,0233908		-	-
64	0,10845658	0,0143210	61	0,0891148	0,0117670		-	-
128	0,05418977	0,0071554	127	0,0432508	0,0057110		-	-
256	0,02708525	0,0035764	257	0,0186526	0,0024629		-	-
512	0,01354022	0,0017879	509	0,0096536	0,0012747	512	0,066605	0,008794
1024	0,00676949	0,0008938	1021	0,0048807	0,0006444		-	-
2048	0,00338460	0,0004469	2053	0,0020868	0,0002755		-	-
4096	0,00169225	0,0002234	4093	0,0010731	0,0001417		-	-
8192	0,00084616	0,0001117	8191	0,0004969	6,561E-05	9564	0,034867	0,004604

Таблица 20 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $P_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{3,10}(x_1, x_2, \dots, x_{10})$

Число узлов в N	Птау -сетка		Число узлов в N	Параллелепидальная сетка		Число узлов в N	Равномерная сетка	
	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$		Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$		Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,17977622	0,2853884	7	0,0531415	0,0843602		-	-
16	0,13747178	0,2182316	17	0,0535370	0,0849882		-	-
32	0,13363670	0,2121435	31	0,0524215	0,0832173		-	-
64	0,04156913	0,0659895	61	0,0514671	0,0817022		-	-
128	0,03329375	0,0528526	127	0,0518679	0,0823386		-	-
256	0,01854780	0,0294439	257	0,0517078	0,0820844		-	-
512	0,00868789	0,0137917	509	0,0496431	0,0788067		-	-
1024	0,00533509	0,0084692	1021	0,0446176	0,0708290	1024	0,070226	0,111481
2048	0,00235064	0,0037315	2053	0,0101957	0,0161854		-	-
4096	0,00124501	0,0019764	4093	0,0047277	0,0075050		-	-
8192	0,0010611	0,0016844	8191	7,950E-05	0,0001262	9564	0,029892	0,047453



Таблица 21 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{4,2}(x_1, x_2)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,19472968	0,1157079	7	0,1416082	0,0841432	8	0,165290	0,098215
16	0,09681676	0,0575282	17	0,0757339	0,0450009	16	0,050795	0,030182
32	0,04827140	0,0286827	31	0,0469206	0,0278801	32	0,024430	0,014516
64	0,02410146	0,0143210	61	0,0318543	0,0189278	64	0,011331	0,006733
128	0,01204217	0,0071554	127	0,0230161	0,0136761	128	0,005156	0,003064
256	0,00601894	0,003576	257	0,0173977	0,0103376	256	0,002481	0,001474
512	0,00300893	0,0017879	509	0,0136078	0,0080857	512	0,001236	0,000734
1024	0,00150432	0,0008938	1021	0,0109322	0,0064959	1024	0,000612	0,000363
2048	0,00075213	0,0004469	2053	0,0089737	0,0053321	2048	0,000303	0,000180
4096	0,00037606	0,0002234	4093	0,0074974	0,0044549	4096	0,000151	9,02E-05
8192	0,00018805	0,0001117	8191	0,0063572	0,0037774	8192	7,58E-05	4,50E-05

Таблица 22 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{4,3}(x_1, x_2, x_3)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,29209453	0,1157079	7	0,2630645	0,1042082		0,247894	0,098198
16	0,14522514	0,0575282	17	0,1071713	0,0424539	16	0,062987	0,024951
32	0,07240711	0,0286827	31	0,0485596	0,0192360		-	-
64	0,03615219	0,0143210	61	0,0204210	0,0080894	81	0,023460	0,009293
128	0,01806325	0,0071554	127	0,0085636	0,0033923		0,010706	0,004241
256	0,00902842	0,0035764	257	0,0039287	0,0015563	256	0,005526	0,002189
512	0,00451339	0,0017879	509	0,0019080	0,0007558	625	0,001823	0,000722
1024	0,00225650	0,0008938	1021	0,0009317	0,0003690	1296	0,000692	0,000274
2048	0,00112819	0,0004469	2053	0,0004584	0,0001816	2407	0,000158	6,29E-05
4096	0,00056409	0,0002234	4093	0,0002287	9,061E-05	2096	3,87E-06	1,53E-06
8192	0,00028203	0,0001117	8191	0,0001140	4,516E-05	6561	5,25E-05	2,08E-05

Таблица 23 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{4,4}(x_1, x_2, \dots, x_4)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,38945937	0,1157079	7	0,3305813	0,0982153		-	-
16	0,19363352	0,0575282	17	0,1462792	0,0434593	16	0,147603	0,043852
32	0,09654281	0,0286827	31	0,0720489	0,0214056		-	-
64	0,04820292	0,0143210	61	0,0353711	0,0105087	81	0,017572	0,005220
128	0,02408434	0,0071554	127	0,0164134	0,0048764		-	-
256	0,01203788	0,0035764	257	0,0083939	0,0024938	256	0,001234	0,000366
512	0,00601788	0,0017879	509	0,0039873	0,0011846	625	0,001638	0,000486
1024	0,00300867	0,0008938	1021	0,0020776	0,0006172	1296	0,002020	0,000600
2048	0,00150427	0,0004469	2053	0,0009537	0,0002833	2407	0,000186	0,000354
4096	0,00075212	0,000223	4093	0,0005165	0,0001534	2096	0,000161	0,000247
8192	0,00037607	0,0001117	8191	0,0002216	6,583E-05	6561	0,000137	7,53E-05

Таблица 24 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{4,5}(x_1, x_2, \dots, x_5)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,48682422	0,1157079	7	0,3880444	0,0922300		-	-
16	0,24204190	0,0575282	17	0,1479166	0,0351566		-	-
32	0,12067851	0,0286827	31	0,0580988	0,0138087	32	0,070178	0,016679
64	0,06025366	0,0143210	61	0,0360068	0,0085580		-	-
128	0,03010542	0,0071554	127	0,0166134	0,0039486		-	-
256	0,01504736	0,0035764	257	0,0091950	0,0021854	243	0,005706	0,001356
512	0,00752235	0,0017879	509	0,0048173	0,0011449		-	-
1024	0,00376084	0,0008938	1021	0,0022927	0,0005449	1024	0,007846	0,001865
2048	0,00188032	0,0004469	2053	0,0009971	0,0002370		-	-
4096	0,00094012	0,0002234	4093	0,0004452	0,0001058	3125	0,006025	0,001432
8192	0,00047006	0,0001117	8191	0,0002065	4,909E-05	7776	0,004482	0,001065

Таблица 25 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_T$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{4,6}(x_1, x_2, \dots, x_6)$

Птау -сетка			Параллелепипедальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,58418906	0,1157079	7	0,2086811	0,0413326		-	-
16	0,29045028	0,0575282	17	0,1336651	0,0264744		-	-
32	0,14481422	0,0286827	31	0,0482995	0,0095664		-	-
64	0,07230439	0,0143210	61	0,0280291	0,0055516	64	0,015617	0,003093
128	0,03612651	0,0071554	127	0,0131905	0,0026125		-	-
256	0,01805683	0,0035764	257	0,0075879	0,0015029		-	-
512	0,00902681	0,0017879	509	0,0077207	0,0015292		-	-
1024	0,00451300	0,0008938	1021	0,0040164	0,0007955	729	0,012233	0,002422
2048	0,00225641	0,0004469	2053	0,0017067	0,0003380		-	-
4096	0,00112818	0,0002234	4093	0,0009360	0,0001854	4096	0,008188	0,001621
8192	0,00056409	0,0001117	8191	0,0004396	8,707E-05	9564	0,017915	0,003548

Таблица 28 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_T$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{4,9}(x_1, x_2, \dots, x_9)$

Птау -сетка			Параллелепипедальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,15913624	0,2376175	7	0,1447788	0,2161794		-	-
16	0,14391130	0,2148841	17	0,1079964	0,1612570		-	-
32	0,12052516	0,1799646	31	0,0977189	0,1459110		-	-
64	0,03926981	0,0586365	61	0,0633133	0,0945376		-	-
128	0,03301662	0,0492994	127	0,0515521	0,0769761		-	-
256	1,35120372	2,0175775	257	0,0423422	0,0632241		-	-
512	0,00303733	0,0045352	509	0,0370522	0,0553253	512	0,066846	0,099813
1024	0,0006842	0,0010216	1021	0,0122213	0,0182485		-	-
2048	0,00018554	0,0002770	2053	0,0009208	0,0013750		-	-
4096	0,00033694	0,0005031	4093	0,0001153	0,0001722		-	-
8192	8,8052E-05	0,0001314	8191	8,129E-05	0,0001213	9564	0,028568	0,042658

Таблица 29 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $P_\tau$ -сетках, параллелепипедальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{4,10}(x_1, x_2, \dots, x_{10})$

Число узлов в N	Птау -сетка		Число узлов в N	Параллелепипедальная сетка		Число узлов в N	Равномерная сетка	
	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$		Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$		Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,97364845	0,1157079	7	0,7533229	0,0895245		-	-
16	0,48408381	0,0575282	17	0,3194000	0,0379573		-	-
32	0,24135703	0,0286827	31	0,1451060	0,0172443		-	-
64	0,12050731	0,0143210	61	0,0630320	0,0074906		-	-
128	0,06021085	0,0071554	127	0,0273056	0,0032449		-	-
256	0,03009472	0,0035764	257	0,0127850	0,0015193		-	-
512	0,01504468	0,0017879	509	0,0062798	0,0007462		-	-
1024	0,00752168	0,0008938	1021	0,0030856	0,0003666	1024	0,774865	0,092084
2048	0,00376067	0,0004469	2053	0,0015233	0,0001810		-	-
4096	0,00188027	0,0002234	4093	0,0007613	9,047E-05		-	-
8192	0,00094015	0,0001117	8191	0,0003797	4,512E-05	9564	0,006603	0,000784

Таблица 31 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{5,2}(x_1, x_2)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,03095938	0,2567755	7	0,8481801	7,0347631		0,043269	0,065987
16	0,03555297	0,2948745	17	0,8169301	6,7755772		0,010984	0,037770
32	0,01622759	0,134590	31	0,7544301	6,2572054		0,076594	0,024365
64	0,00539070	0,0447102	61	0,3794301	3,1469745	64	0,004617	0,015876
128	0,00322049	0,0267106	127	0,2057065	1,7061196		0,005365	0,076394
256	0,00083999	0,0069668	257	0,0986735	0,8183937		0,005690	0,019567
512	0,00183371	0,0152087	509	0,0433396	0,3594571		0,005053	0,017375
1024	0,0011495	0,0095342	1021	0,0229979	0,1907441		0,004292	0,014761
2048	0,00106842	0,0088614	2053	0,0221267	0,1835179		0,003647	0,012540
4096	0,00072206	0,0059887	4093	0,0206240	0,1710550	4096	0,003129	0,010760
8192	0,00064755	0,0053707	8191	2,980E-05	0,0002472	9564	0,002716	0,009341

Таблица 31 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{5,3}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2) * g(x_2, x_3)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,07394768	0,1637522	7	0,2015827	0,4463915		0,063956	0,141626
16	0,04460169	0,0987674	17	0,3265827	0,7231957	16	0,017135	0,037944
32	0,02333750	0,0516793	31	0,1775808	0,3932409		-	-
64	0,01348842	0,0298692	61	0,0886703	0,1963547	81	0,005290	0,011714
128	0,00661106	0,0146397	127	0,0302732	0,0670380		0,001295	0,002868
256	0,00362555	0,0080285	257	0,0084654	0,0187460	256	0,001282	0,002840
512	0,0018822	0,0041680	509	0,0060771	0,0134575	625	0,001201	0,002660
1024	0,00090151	0,0019963	1021	0,0057622	0,0127601	1296	0,001149	0,002544
2048	0,00045696	0,0010119	2053	0,0030635	0,0067840	2407	0,000972	0,002153
4096	0,00023420	0,0005186	4093	0,0010648	0,0023581	2096	0,000781	0,001731
8192	0,00012339	0,0002732	8191	0,0001182	0,0002617	6561	0,000285	0,000631

Таблица 32 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{5,4}(x_1, x_2, \dots, x_4)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,06229271	0,2141911	7	0,2595777	0,8925480		-	-
16	0,04024388	0,138377	17	0,2283277	0,7850961	16	0,010984	0,037770
32	0,02348230	0,0807429	31	0,1658277	0,5701922		-	-
64	0,01316133	0,0452547	61	0,1217796	0,4187346	81	0,004617	0,015876
128	0,00671233	0,0230837	127	0,0516765	0,1776876		-	-
256	0,00339606	0,0116772	257	0,0208602	0,0717270	256	0,005690	0,019567
512	0,00172250	0,0059227	509	0,0116962	0,0402172	625	0,005053	0,017375
1024	0,00076031	0,0026143	1021	0,0038857	0,013360	1296	0,004292	0,014761
2048	0,00044899	0,0015438	2053	0,0015043	0,0051724	2407	0,003647	0,012540
4096	0,00023872	0,0008208	4093	0,0008912	0,003064	2096	0,003129	0,010760
8192	0,00012596	0,0004331	8191	8,923E-05	0,0003068	6561	0,002716	0,009341

Таблица 33 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{5,5}(x_1, x_2, \dots, x_5)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,04540540	0,2422061	7	0,0426611	0,2275676		-	-
16	0,03657033	0,1950772	17	0,0404314	0,2156734		-	-
32	0,02175571	0,1160515	31	0,0363907	0,1941192	32	0,170536	0,909690
64	0,01015941	0,0541933	61	0,0273935	0,1461255		-	-
128	0,00305947	0,0163201	127	0,0203528	0,1085683		-	-
256	0,00126683	0,0067576	257	0,0147461	0,0786602	243	0,164391	0,876912
512	0,00170811	0,0091116	509	0,0109283	0,0582950		-	-
1024	0,00141787	0,0075633	1021	0,0108724	0,0579970	1024	0,151323	0,807205
2048	0,00098461	0,0052522	2053	0,0107734	0,0574689		-	-
4096	0,00077366	0,0041269	4093	0,0088708	0,0473199	3125	0,154531	0,824317
8192	0,00070533	0,0037624	8191	0,0001418	0,0007564	7776	0,152612	0,814082

Таблица 34 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_7$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{5,6}(x_1, x_2, \dots, x_6)$

Птау -сетка			Параллелепипедальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,03095938	0,2567755	7	0,8481801	7,0347631		-	-
16	0,03555297	0,2948745	17	0,8169301	6,7755772		-	-
32	0,01622759	0,1345908	31	0,7544301	6,2572054		-	-
64	0,00539070	0,0447102	61	0,3794301	3,1469745	64	0,012824	0,106365
128	0,00322049	0,0267106	127	0,2057065	1,7061196		-	-
256	0,00083999	0,0069668	257	0,0986735	0,8183937		-	-
512	0,00183371	0,0152087	509	0,0433396	0,3594571		-	-
1024	0,00114954	0,0095322	1021	0,0229979	0,1907441		-	-
2048	0,00106842	0,0088614	2053	0,0221267	0,1835179		-	-
4096	0,00072206	0,0059887	4093	0,0206240	0,1710550	4096	0,006239	0,051746
8192	0,00064755	0,0053707	8191	2,980E-05	0,0002472	9564	0,004474	0,037136

Таблица 35 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_7$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{5,7}(x_1, x_2, \dots, x_7)$

Птау -сетка			Параллелепипедальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,0234213	0,301944	7	0,1724315	2,2229608		-	-
16	0,0214082	0,2759923	17	0,0474315	0,6114804		-	-
32	0,0089043	0,1147929	31	0,0336773	0,4341633		-	-
64	0,0057794	0,0745081	61	0,0329798	0,4251705		-	-
128	0,0045029	0,0580508	127	0,0326409	0,4208013	128	0,012686	0,163553
256	0,0021268	0,0274187	257	0,0324413	0,4182285		-	-
512	0,0010816	0,0139455	509	0,0288942	0,3725001		-	-
1024	0,0008823	0,0113756	1021	0,0182472	0,2352405		-	-
2048	0,0006379	0,008224	2053	0,0115587	0,1490130	2187	0,007759	0,100033
4096	0,0005327	0,0068678	4093	0,0101158	0,1304124		-	-
8192	0,0004881	0,0062926	8191	0,0002282	0,0029427	9564	0,005062	0,065271

Таблица 36 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{5,8}(x_1, x_2, \dots, x_8)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,02069940	0,3516211	7	0,0661315	1,1233769		-	-
16	0,02211250	0,3756255	17	0,0510559	0,8672889		-	-
32	0,0181312	0,3079952	31	0,0432434	0,7345778		-	-
64	0,01337986	0,227281	61	0,0276184	0,4691557		-	-
128	0,0115487	0,1961782	127	0,0245731	0,4174243		-	-
256	0,01125591	0,1912048	257	0,0059250	0,1006493	256	0,001815	0,030842
512	0,01024649	0,1740536	509	0,0123385	0,2095957		-	-
1024	0,00975504	0,1657090	1021	0,0036315	0,0616884		-	-
2048	0,00950876	0,1615255	2053	0,0029234	0,0496613		-	-
4096	0,00941241	0,1598887	4093	0,0013119	0,0222863		-	-
8192	0,00934806	0,1587956	8191	0,0003405	0,0057853	9564	0,002853	0,048476

Таблица 37 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{5,9}(x_1, x_2, \dots, x_9)$

Птау -сетка			Параллелепидальная сетка			Равномерная сетка		
Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$	Число узлов в N	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,01190891	0,3369058	7	0,2146520	6,0725531		-	-
16	0,01358790	0,3844047	17	0,0896520	2,5362765		-	-
32	0,01134855	0,3210531	31	0,0571520	1,6168446		-	-
64	0,00835388	0,2363332	61	0,0459020	1,2985797		-	-
128	0,00608376	0,1721110	127	0,0302770	0,8565451		-	-
256	0,00454435	0,1285608	257	0,0224645	0,6355279		-	-
512	0,00405522	0,1147232	509	0,0149078	0,4217461	512	0,005302	0,149997
1024	0,00374624	0,1059820	1021	0,0100015	0,2829467		-	-
2048	0,00357734	0,1012037	2053	0,00532	0,141451		-	-
4096	0,00353226	0,0999286	4093	0,0020890	0,0591004		-	-
8192	0,00352473	0,0997154	8191	0,0012175	0,0344446	9564	0,001398	0,039567



Таблица 38 – Абсолютная и относительная погрешности кубатурных формул с узлами на  $\Pi_7$ -сетках, параллелепидальных и равномерных сетках для подынтегральной функции  $\varphi_{5,10}(x_1, x_2, \dots, x_{10})$

Число узлов в N	Птау -сетка		Число узлов в N	Параллелепипедальная сетка		Число узлов в N	Равномерная сетка	
	Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$		Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$		Абсолютная погрешность $\Delta(\varphi)$	Относительная погрешность $\delta(\varphi)$
8	0,00412749	0,1985831	7	0,2292153	11,028083		-	-
16	0,00623126	0,2998005	17	0,1042153	5,0140417		-	-
32	0,00406989	0,1958123	31	0,0417153	2,0070208		-	-
64	0,00427407	0,2056355	61	0,0198012	0,9530152		-	-
128	0,00303522	0,1460319	127	0,0188315	0,9060305		-	-
256	0,00162608	0,0782349	257	0,0176596	0,8496489		-	-
512	0,00056260	0,0270681	509	0,0168744	0,8120611		-	-
1024	0,00045089	0,0216937	1021	0,0129721	0,6241223	1024	0,006384	0,307179
2048	0,00038667	0,0186038	2053	0,0090190	0,4339280		-	-
4096	0,00030985	0,0149079	4093	0,0076980	0,3703698		-	-
8192	0,00028590	0,0137554	8191	0,0012175	0,0344446	9564	0,003314	0,159463

В результате проведения численных экспериментов выяснилось, что  
– для функций  $\varphi_{1,2}(x_1, x_2)$ ,  $\varphi_{3,3}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\varphi_{2,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n = 2, \dots, 10$ ) кубатурные формулы с узлами, образующими  $\Pi_\tau$ -сетки, имеют меньшие абсолютные и относительные погрешности, чем другие исследованные кубатурные формулы;

– для функций  $\varphi_{5,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n=2, \dots, 10$ ),  $\varphi_{4,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n=5, \dots, 10$ ),  $\varphi_{3,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n=5, \dots, 10$ ) кубатурные формулы с узлами, образующими параллелипипедальные сетки, имеют меньшие абсолютные и относительные погрешности, чем другие исследованные кубатурные формулы;

– для функций  $\varphi_{3,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n=2, 4$ ),  $\varphi_{4,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n=2, 3, 4$ ) кубатурные формулы с узлами, образующими равномерные сетки, имеют меньшие абсолютные и относительные погрешности, чем другие исследованные кубатурные формулы.

Таким образом, на основании этих результатов можно сделать вывод о том, что кубатурные формулы с узлами на  $\Pi_\tau$ -сетках для кусочно-линейной и негладких функций имеют меньшие погрешности, чем остальные из исследованных кубатурных формул.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Изучены арифметический и сверхбыстрый алгоритмы построения  $P_\tau$ -сеток. Эти алгоритмы реализованы на языке программирования MAPLE.

2. В двумерном случае для различного числа  $N$  узлов  $P_0$ -сеток проведены численные эксперименты с целью сравнения быстродействия сверхбыстрого и арифметического алгоритмов. В результате проведения этих экспериментов выяснилось, что отношение  $\frac{t(N)}{t'(N)}$  увеличивается с ростом  $N$ , где  $t(N)$  – время, затраченное на реализацию арифметического, а  $t'(N)$  – сверхбыстрого алгоритмов построения  $P_0$ -сеток, то есть эффективность сверхбыстрого алгоритма по сравнению с арифметическим алгоритмом возрастает с ростом числа  $N$  узлов  $P_0$ -сеток.

Следовательно, арифметический алгоритм построения  $P_0$ -сеток целесообразно применять при относительно небольших значениях числа  $N$  узлов ( $N \leq 2^{14}$ ), в остальных случаях гораздо эффективнее использовать сверхбыстрый алгоритм.

3. В  $n$ -мерном случае ( $n = 2, \dots, 10$ ) проведены численные эксперименты, в ходе которых были вычислены приближенные значения кратных интегралов от гладких, негладких и кусочно-гладких функций с помощью кубатурных формул с узлами на равномерных, параллелепипедальных сетках и  $P_\tau$ -сетках. В результате выполнения этих экспериментов сделан вывод о том, что кубатурные формулы с узлами на  $P_\tau$ -сетках для кусочно-гладких и негладких функций имеют меньшие погрешности, чем остальные из исследованных кубатурных формул.

Следовательно, кубатурные формулы с узлами на  $P_\tau$ -сетках целесообразно применять для приближенного вычисления интегралов от негладких и кусочно-гладких функций.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Антонов, И. А. Экономичный способ вычисления ЛПт-последовательностей / И. А. Антонов, В. М. Салеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19, № 1. – С. 243–245.

2. Соболев, С. Л. Лекции по теории кубатурных формул : учебник / С. Л. Соболев. – Новосибирск : Наука, 1964. – 586 с.

3. Соболев, И. М. О распределении точек в кубе и сетках интегрирования / И. М. Соболев // Успехи математических наук. – 1966. – Т. 21, № 5. – С. 271–272.

4. Соболев, И. М. О распределении точек в кубе и приближенном вычислении интегралов / И. М. Соболев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – Т. 7, № 4. – С. 784-802.

5. Соболев, И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара : монография / И. М. Соболев. – Москва : Наука, 1969. – 288 с.

6. Соболев, И. М. Получение точек, равномерно расположенных в многомерном кубе : препринт № 40 / И. М. Соболев, Ю. Л. Левитан. – Москва : Институт прикладной математики, 1976. – 40 с.

7. Соболев, И. М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями : монография / И. М. Соболев, Р. Б. Статников. – Москва : Наука, 1981. – 110 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Таблица числителей направляющих чисел

#### Таблица А.1 – Числители направляющих чисел

J	l=i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	5	15	17	51	85	255	257	771	1285
3	1	1	7	11	13	61	67	79	465	721	823
4	1	3	7	5	7	43	49	147	439	1013	727
5	1	1	5	3	15	51	125	141	177	759	267
6	1	3	1	1	9	59	25	89	321	835	833
7	1	1	3	7	31	47	109	173	181	949	471
8	1	3	3	9	9	57	43	43	225	113	1601
9	1	3	7	13	3	35	89	9	235	929	1341
10	1	1	5	11	27	53	69	25	103	615	913
11	1	3	5	1	15	19	113	115	411	157	1725
12	1	1	7	3	29	51	47	97	233	39	2021
13	1	3	7	7	21	61	55	19	59	761	1905
14	1	1	1	9	23	37	97	97	353	169	375
15	1	3	3	5	19	33	3	197	329	983	893
16	1	1	3	13	11	7	37	101	463	657	1599
17	1	1	7	13	25	5	83	255	385	647	415
18	1	3	5	11	7	11	103	89	111	581	605
19	1	1	1	3	13	39	27	203	475	505	819
20	1	3	1	15	17	63	13	65	451	833	975
21	1	1	5	5	1	27	33	195	263	139	915
22	1	3	3	3	25	17	115	177	19	147	1715
23	1	1	3	15	29	15	41	105	249	203	1223
24	1	3	1	7	3	23	79	17	275	81	1367
25	1	3	7	9	31	29	17	47	369	337	663
26	1	1	5	13	11	3	29	169	393	829	629
27	1	3	1	9	5	21	119	109	167	989	525
28	1	1	3	1	23	13	75	149	333	375	469
29	1	3	3	11	27	31	73	15	43	365	981
30	1	1	7	7	19	25	105	213	469	131	1667
31	1	3	5	5	21	9	7	135	101	215	1587
32	1	1	1	15	5	49	59	253	21	733	1251
33	1	1	1	1	1	33	65	191	451	451	451
34	1	3	5	15	17	19	21	155	229	447	481
35	1	1	7	11	13	29	3	175	247	177	721
36	1	3	7	5	7	11	113	63	297	57	483
37	1	1	5	3	15	19	61	47	403	471	1209

38	1	3	1	1	9	27	89	7	497	979	1457
39	1	1	3	7	31	15	45	23	61	197	415
40	1	3	3	9	9	25	107	39	361	251	1435
41	1	3	7	13	3	3	25	55	215	517	725
42	1	1	5	11	27	21	5	71	393	137	861
43	1	3	5	1	15	51	49	87	125	567	41
44	1	1	7	3	29	17	111	103	285	1021	1619
45	1	3	7	7	21	29	119	119	501	167	1579
46	1	1	1	9	23	5	33	135	277	877	1701
47	1	3	3	5	13	1	67	153	199	929	869
48	1	1	3	13	11	39	101	169	301	269	1151
49	1	3	5	11	7	43	39	201	83	997	1897
50	1	3	5	11	7	43	39	201	83	997	1679
51	1	1	1	3	13	7	31	217	351	91	1355
J	12	13	14	15	16	17	18	19	l=20		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
2	3855	4369	13107	21845	65535	65537	196611	327658	983055		
3	4091	4125	4141	28723	45311	53505	250113	276231	326411		
4	987	5889	6915	16647	49925	116487	83243	116529	715667		
5	1839	6929	16241	16565	17139	82207	50979	252717	851901		
6	4033	3913	11643	18777	35225	102401	45059	36865	299009		
7	2515	6211	2147	3169	35873	33841	99889	247315	1032727		
8	579	1731	11977	7241	63609	81003	15595	144417	685617		
9	3863	1347	4417	5087	12631	103445	152645	130127	775365		
10	977	6197	14651	2507	27109	5205	91369	302231	172023		
11	3463	2817	9997	7451	12055	44877	24895	508255	574033		
12	2909	5459	2615	13329	35887	97323	83101	320901	810643		
13	3379	8119	13207	8965	9997	75591	226659	187499	628265		
14	1349	5121	13313	19457	1033	62487	250917	234593	308321		
15	3739	7669	2671	18391	31161	12111	259781	36159	232401		
16	347	2481	5201	3123	32253	78043	63447	508757	974837		
17	387	7101	11469	11699	15865	49173	147489	81991	802875		
18	2381	2677	14855	721	26903	100419	206167	241771	987201		
19	2821	1405	12165	709	41543	57545	77163	357231	378135		
20	1873	7423	5837	20481	12291	86017	12303	299025	774207		
21	1959	725	5387	19285	5165	27985	69809	128325	164575		
22	1929	2465	12483	13057	28931	54019	21251	62233	248081		
23	2389	471	12945	32321	29377	127427	103759	472541	1008719		
24	3251	2887	1279	4865	64771	24321	42247	338691	599831		
25	1149	1715	187	12285	53631	110851	4357	153347	671033		
26	243	5595	8133	4929	10817	8261	189901	255947	734787		
27	3609	5689	11819	15889	48083	67537	63993	336469	749285		
28	1131	441	14471	12625	8881	34707	85105	479495	911133		
29	1701	3169	7615	8405	41135	106823	107847	339031	977907		

30	143	4485	2981	12593	60913	15703	26967	507907	344073
31	1339	6311	4081	28637	60935	94129	109273	475921	281389
32	3497	3557	7223	13425	58577	69521	217151	424277	789985
33	2499	483	11843	28285	12029	86021	217093	348165	176165
34	1571	3781	10799	15893	959	19793	213491	377941	414943
35	983	3195	9277	15405	19637	87283	186143	343297	1041185
36	4021	5213	2031	4677	26607	20931	54345	259163	741087
37	1625	5085	15371	19493	56445	26369	27399	521499	132383
38	3217	185	6603	1129	36087	66817	98051	451841	175361
39	1163	7323	7563	25321	52563	37745	81777	235347	539895
40	2977	1713	11617	14979	5455	68289	209987	346179	521289
41	3391	4021	4129	4099	12345	102733	21287	128115	20689
42	675	5875	12061	25469	47423	29505	124097	444613	430923
43	3093	5363	3471	17589	50131	33137	98739	361365	426737
44	1495	4977	15919	6731	43771	23313	151281	270519	11187
45	3443	5441	1097	13483	58779	36561	116819	420599	998391
46	557	1779	10369	15325	33331	118321	59665	498897	494137
47	675	6777	14343	18465	63615	43349	30799	322567	939017
48	1489	287	8475	6929	46013	52785	75249	14035	507165
49	2303	6919	16139	16677	34579	120981	239693	73299	863545
50	3925	1517	305	21765	45827	91157	113679	204881	761911
51	3705	1875	7621	4381	9079	94533	37261	431301	176455

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Арифметический алгоритм, реализованный на языке программирования MAPLE

```
restart;
st := time();
with(LinearAlgebra);
with(Bits);
N := 2^8;
Q := Matrix(N, 2, fill = 0);
R1 := Matrix(1, 20, fill = 1);
R2 := Matrix([1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255, 257, 771, 1285, 3855, 4369, 13107, 21845,
65535, 65537, 196611, 327685, 983055]);
R := Matrix([[R1], [R2]]);
for i to N-1 do M := 1+floor(ln(i)/ln(2)); for k to M do s1 := 0; s2 := 0; for l from k to
M do s1 := s1+floor(2*frac(i*2^(-l))*floor(2*frac(R[1, l]*2^(k-1-l))))); s2 :=
s2+floor(2*frac(i*2^(-l))*floor(2*frac(R[2, l]*2^(k-1-l)))) end do; s1 :=
frac((1/2)*s1); s2 := frac((1/2)*s2); Q[i, 1] := Q[i, 1]+s1*2^(-k+1); Q[i, 2] := Q[i,
2]+s2*2^(-k+1) end do end do;
time()-st;
for i to N-1 do Q[i, 1], Q[i, 2] end do;
for i to N-1 do F[i] := 4.5*abs(Q[i, 1]-Q[i, 2])*sqrt(abs(Q[i, 2]-1/4)*sqrt(abs(Q[i, 1]-
1/5))) end do;
LL := simplify((sum(F[d], d = 1 .. N-1))/N);
int((4.5*(x-y))*sqrt(abs(y-1/4)*sqrt(abs(x-1/5))), [x = 0 .. 1, y = 0 .. 1], numeric);
with(ListTools);
plot(Q, x = 0 .. 1, y = 0 .. 1, style = point, axis = [gridlines = [[seq(i/N, i = 1 .. N)], color
= blue]]);
for i to N-1 do F[i] := sin(3*abs(Q[i, 1]-Q[i, 2])) end do;
LLK := evalf((sum(F[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 0 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 0 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i]
> 0, c[i] > 0) then f[i] := m[i]+c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[1] := sim-
plify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 0 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 1/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 2/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if
`and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := m[i]+3*c[i] else f[i] := 0 end if end do;
LLL[2] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
```



```

for i to N-1 do if 1/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 2/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0
end if; if 0 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if
`and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 3*m[i]+c[i] else f[i] := 0 end if end do;
LLL[3] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 1/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 2/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0
end if; if 1/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 2/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if
`and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 3*m[i]+3*c[i] else f[i] := 0 end if end do;
LLL[4] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 0 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 2/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i]
> 0, c[i] > 0) then f[i] := m[i]+6*c[i] else f[i] := 0 end if end do;
LLL[5] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 2/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 0 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i]
> 0, c[i] > 0) then f[i] := 6*m[i]+c[i] else f[i] := 0 end if end do;
LLL[6] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 1/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 2/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0
end if; if 2/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if
`and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 3*m[i]+6*c[i] else f[i] := 0 end if end do;
LLL[7] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 2/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 1/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 2/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if
`and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 6*m[i]+3*c[i] else f[i] := 0 end if end do;
LLL[8] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 2/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 2/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i]
> 0, c[i] > 0) then f[i] := 6*m[i]+6*c[i] else f[i] := 0 end if end do;
LLL[9] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
evalf(LLL[1]+LLL[2]+LLL[3]+LLL[4]+LLL[5]+LLL[6]+LLL[7]+LLL[8]+LLL[9])
;
for i to N-1 do if `and`(Q[i, 1] > 0, Q[i, 2] > 0) then F[i] := Q[i, 1]^abs(Q[i, 2]) else
F[i] = 0 end if end do;
LLKK := evalf((sum(F[d], d = 1 .. N-1))/N);

```

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### Сверхбыстрый алгоритм, реализованный на языке программирования MAPLE

```
restart;
st := time();
with(Bits);
N := 2^10;
G := proc (i) options operator, arrow; Xor(i, floor((1/2)*i)) end proc;
i -> Bits:-Xor|i, floor|- i||
l := proc (i) options operator, arrow; 1+log[2](floor(Xor(G(i), G(i-1)))) end proc;
i -> 1 + log[2](floor(Bits:-Xor(G(i), G(i - 1))))
R1 := Matrix(1, 20, fill = 1);
R2 := Matrix([1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255, 257, 771, 1285, 3855, 4369, 13107, 21845,
65535, 65537, 196611, 327685, 983055]);
R := Matrix([[R1], [R2]]);
V := Matrix(20, 2, fill = 0);
Q := Matrix(N, 2, fill = 0);
Q1 := Matrix(N, 2, fill = 0);
for L to 20 do LL := L-40; for j to 2 do V[L, j] := R[j, L]*2^(-LL) end do end do; Q[1,
1] := 0; Q[1, 2] := 0; for i from 2 to N do len := l(i); for j to 2 do Q[i, j] := Xor(Q[i-1,
j], V[len, j]) end do end do;
time()-st;
with(ListTools);
plot(Q/2^40, x = 0 .. 1, y = 0 .. 1, style = point, axis = [gridlines = [[seq(i/N, i = 1 ..
N)], color = blue]]);
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

**Текст составленной на языке Maple программы, вычисляющей координаты узлов равномерной сетки.**

```
restart;
M := 8;
N := M^2;
betta1 := .5;
betta2 := .5;
Q := Matrix(N, 2, fill = 0);
k := 1;
for r1 from 0 to M-1 do for r2 from 0 to M-1 do Q[k, 1] := (r1+betta1)/M; Q[k, 2] :=
(r2+betta2)/M; k := k+1 end do end do;
for i to N-1 do F[i] := 4.5*abs(Q[i, 1]-Q[i, 2])*sqrt(abs(Q[i, 2]-1/4)*sqrt(abs(Q[i, 1]-
1/5))) end do;
LL := simplify((sum(F[d], d = 1 .. N-1))/N);
with(ListTools);
plot(Q, x = 0 .. 1, y = 0 .. 1, style = point, axis = [gridlines = [[seq(i/M, i = 1 .. N)],
color = blue]]);
for i to N-1 do if 0 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 0 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i]
> 0, c[i] > 0) then f[i] := m[i]+c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[1] := sim-
plify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 0 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 1/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 2/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if
`and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := m[i]+3*c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[2] :=
simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 1/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 2/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0
end if; if 0 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if
`and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 3*m[i]+c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[3] :=
simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 1/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 2/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0
end if; if 1/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 2/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if
`and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 3*m[i]+3*c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[4]
:= simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 0 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 2/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i]
```

```

> 0, c[i] > 0) then f[i] := m[i]+6*c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[5] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 2/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end if; if 0 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 6*m[i]+c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[6] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 1/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 2/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end if; if 2/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 3*m[i]+6*c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[7] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 2/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end if; if 1/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 2/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 6*m[i]+3*c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[8] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 2/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end if; if 2/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 6*m[i]+6*c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[9] := simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
evalf(LLL[1]+LLL[2]+LLL[3]+LLL[4]+LLL[5]+LLL[6]+LLL[7]+LLL[8]+LLL[9])
;
for i to N-1 do F[i] := sin(3*abs(Q[i, 1]-Q[i, 2])) end do;
LLK := evalf((sum(F[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if `and`(Q[i, 1] > 0, Q[i, 2] > 0) then F[i] := Q[i, 1]^abs(Q[i, 2]) else F[i] = 0 end if end do;
LLKK := evalf((sum(F[d], d = 1 .. N-1))/N);

```

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д

**Текст составленной на языке Maple программы, вычисляющей координаты узлов параллелепipedальной сетки.**

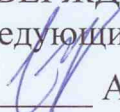
```
restart; l := 10;
N := 2^l;
a1 := 3*l+2;
a2 := 3*l;
Q := Matrix(N, 2, fill = 0);
for nu from 0 to N-1 do Q[nu+1, 1] := frac(nu*a1/N); Q[nu+1, 2] := frac(nu*a2/N) end
do;
for i to N do F[i] := 4.5*abs(Q[i, 1]-Q[i, 2])*sqrt(abs(Q[i, 2]-1/4)*sqrt(abs(Q[i, 1]-
1/5))) end do;
LL := simplify((sum(F[d], d = 1 .. N-1))/N);
with(ListTools);
plot(Q, x = 0 .. 1, y = 0 .. 1, style = point, axis = [gridlines = [[seq((1/2)*i/l, i = 1 .. N)],
color = blue]]);
for i to N-1 do if 0 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 0 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i]
> 0, c[i] > 0) then f[i] := m[i]+c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[1] := sim-
plify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 0 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 1/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 2/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if
`and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := m[i]+3*c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[2] :=
simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 1/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 2/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0
end if; if 0 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if
`and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 3*m[i]+c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[3] :=
simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 1/3 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 2/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0
end if; if 1/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 2/3 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if
`and`(m[i] > 0, c[i] > 0) then f[i] := 3*m[i]+3*c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[4]
:= simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if 0 <= Q[i, 1] and Q[i, 1] <= 1/3 then m[i] := Q[i, 1] else m[i] := 0 end
if; if 2/3 <= Q[i, 2] and Q[i, 2] <= 1 then c[i] := Q[i, 2] else c[i] := 0 end if; if `and`(m[i]
> 0, c[i] > 0) then f[i] := m[i]+6*c[i] else f[i] := 0 end if end do; LLL[5] := sim-
plify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
```

```

for i to N-1 do if  $2/3 \leq Q[i, 1]$  and  $Q[i, 1] \leq 1$  then  $m[i] := Q[i, 1]$  else  $m[i] := 0$  end
if; if  $0 \leq Q[i, 2]$  and  $Q[i, 2] \leq 1/3$  then  $c[i] := Q[i, 2]$  else  $c[i] := 0$  end if; if `and` ( $m[i]$ 
 $> 0$ ,  $c[i] > 0$ ) then  $f[i] := 6*m[i]+c[i]$  else  $f[i] := 0$  end if end do; LLL[6] := sim-
plify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if  $1/3 \leq Q[i, 1]$  and  $Q[i, 1] \leq 2/3$  then  $m[i] := Q[i, 1]$  else  $m[i] := 0$ 
end if; if  $2/3 \leq Q[i, 2]$  and  $Q[i, 2] \leq 1$  then  $c[i] := Q[i, 2]$  else  $c[i] := 0$  end if; if
`and` ( $m[i] > 0$ ,  $c[i] > 0$ ) then  $f[i] := 3*m[i]+6*c[i]$  else  $f[i] := 0$  end if end do; LLL[7]
:= simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if  $2/3 \leq Q[i, 1]$  and  $Q[i, 1] \leq 1$  then  $m[i] := Q[i, 1]$  else  $m[i] := 0$  end
if; if  $1/3 \leq Q[i, 2]$  and  $Q[i, 2] \leq 2/3$  then  $c[i] := Q[i, 2]$  else  $c[i] := 0$  end if; if
`and` ( $m[i] > 0$ ,  $c[i] > 0$ ) then  $f[i] := 6*m[i]+3*c[i]$  else  $f[i] := 0$  end if end do; LLL[8]
:= simplify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if  $2/3 \leq Q[i, 1]$  and  $Q[i, 1] \leq 1$  then  $m[i] := Q[i, 1]$  else  $m[i] := 0$  end
if; if  $2/3 \leq Q[i, 2]$  and  $Q[i, 2] \leq 1$  then  $c[i] := Q[i, 2]$  else  $c[i] := 0$  end if; if `and` ( $m[i]$ 
 $> 0$ ,  $c[i] > 0$ ) then  $f[i] := 6*m[i]+6*c[i]$  else  $f[i] := 0$  end if end do; LLL[9] := sim-
plify((sum(f[d], d = 1 .. N-1))/N);
evalf(LLL[1]+LLL[2]+LLL[3]+LLL[4]+LLL[5]+LLL[6]+LLL[7]+LLL[8]+LLL[9])
;
for i to N-1 do  $F[i] := \sin(3*\text{abs}(Q[i, 1]-Q[i, 2]))$  end do;
LLK := evalf((sum(F[d], d = 1 .. N-1))/N);
for i to N-1 do if `and` ( $Q[i, 1] \geq 0$ ,  $Q[i, 2] \geq 0$ ) then  $F[i] := Q[i, 1]^{\text{abs}(Q[i, 2])}$  else
 $F[i] = 0$  end if end do;
LLKK := evalf((sum(F[d], d = 1 .. N-1))/N);

```


Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Институт космических и информационных технологий  
Кафедра «Прикладная математика и компьютерная безопасность»

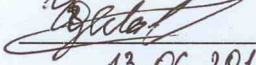
УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой  
  
\_\_\_\_\_ А.А. Кытманов  
« 18 » 06 2018 г.

**БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

01.03.04 Прикладная математика

Кубатурные формулы с узлами на  $\Pi_T$ -сетках

Научный руководитель  профессор, д. ф.-м. н. К.А. Кириллов  
16.06.2018

Выпускник  студент группы КИ14-18Б А.Г. Уделько  
13.06.2018

Красноярск 2018