УДК 519.7

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ В РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

Обухова П. В., Смирнов Д. К.
Научный руководитель Арасланова М. Н.
Сибирский федеральный университет

Представителям самых разных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр и иных объектов. Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется комбинаторикой.

Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни привилегированных слоев тогдашнего общества большое место занимали азартные игры. Эти игры явились движущей силой в развитии комбинаторики и развивающейся одновременно с ней теории вероятности.

Отцом современной теории вероятностей по праву считается Джероламо Кардано. Закон, им сформулированный и примененный к различным азартным играм, гласит: «Вероятность события — это число случаев благоприятного исхода данного события в сравнении с общим количеством возможных случаев при условии, что вероятность наступления любого из них абсолютно одинакова».

Для решения комбинаторных задач существуют различные средства, исключающие возможность «потери» какой-либо комбинации элементов. Для подсчета числа комбинаций из двух элементов таким средством является таблица вариантов. Подсчет вариантов облегчают графы. Так называемые геометрические фигуры, состоящие из точек и соединяющих их линий. При этом с помощью вершин изображают элементы некоторого множества, а с помощью ребер определенные связи между этими элементами.

Рассмотрим *задачу* 1. В урне 4 белых и 3 черных шара. Вынимают один из них, возвращают обратно, перемешивают и вынимают другой. Какова вероятность достать а) 2 белых, б) 2 черных, в) шары разных цветов?

Вероятность взять белый шар $\frac{4}{7}$, черный $\frac{3}{7}$. Зная вероятности для каждого из возможных случаев, построим вероятностный граф для определения вероятности совпадения комбинаций шаров при двух выниманиях. Заметим, что вероятностный граф представляет собой геометрическую иллюстрацию формулы полной вероятности, где в вершинах прописываются возможные исходы события, а над ребрами ставятся соответствующие вероятности данных исходов (рис. 1).

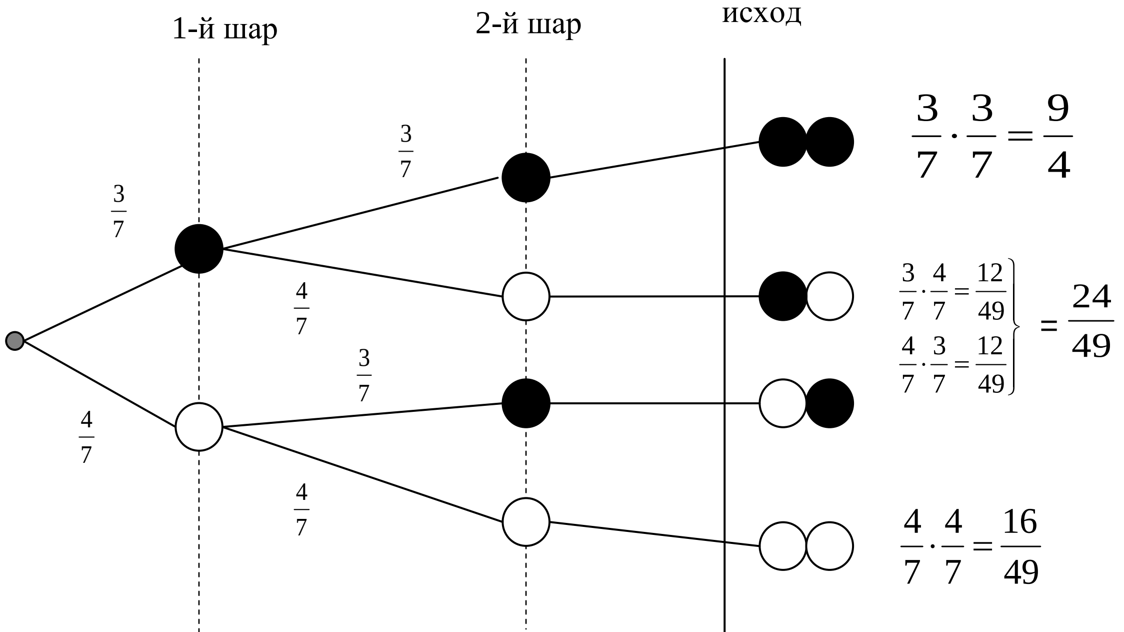

рис. 1

Задача 2. Пусть игрок бросает 3 монеты одинакового достоинства 2 раза. В случае совпадения комбинаций игрок получает приз в размере 100 рублей, а стоимость участия в игре составляет 40 рублей. Определим, стоит ли играть в такую игру.

Если подбрасываются монеты одинакового достоинства, то совпадение комбинаций после подбрасываний можно определить, как совпадение количества «гербов» и «решек».

Заметим, что если одновременно подбрасывается n монет, то возможных исходов будет 2^n.

Для поставленной задачи количество выпавших после одного подбрасывания «гербов» может равняться: 0, 1, 2 или 3. Определим вероятность для каждого случая.

В общем случае, m «гербов» из n монет можно выбрать C_n^m способами, где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Таким образом, 0 «гербов» из 3 монет можно выбрать $C_0^3 = 1$ способом; 1 «герб» из 3 монет можно выбрать $C_1^3 = \dfrac{3!}{1!(3-1)!} = 3$ способами; 2 «герба» из 3 монет можно выбрать $C_2^3 = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ способами; 3 «герба» из 3 монет можно выбрать $C_3^3 = 1$ способом. Тогда вероятности для выпадения 0 и 3 «гербов» составят 1/8, а для 1 или 2 «гербов» 3/8.

Заметим что, так как подбрасывались одни и те же монеты, то вероятность выпадения некоторого числа «гербов» при первом подбрасывании совпадает с вероятностью выпадения такого же количества «гербов» при всяком последующем подбрасывании.

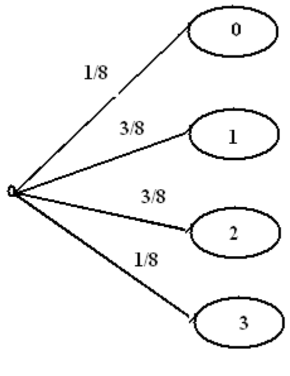

рис. 2

Определим вероятность совпадения комбинаций монет после двух подбрасываний, как вес всего графа с гипотезами:

$$p=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{16}.$$

Зная искомую вероятность, легко определить математическое ожидание выигрыша в игре:

$$M = (100-40)\cdot\frac{5}{16} + (0-40)\cdot\frac{11}{16} = -9{,}75 < 0 .$$

Если математическое ожидание оказалось меньше нуля, то играть в предложенную игру не выгодно.

На данной задаче удобно продемонстрировать и применение формулы Байеса.

Предположим, что игрок победил в игре, то есть монеты оба раза выпали одинаковым образом. Какова вероятность того, что выпало по 2 «герба»?

По формуле Байеса данная вероятность определяется следующим образом:

$$\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{5}{16}} = \frac{9}{20} .$$

Аналогично можно определить вероятность того, что в случае победы игрока выпало, например, 3 «герба»:

$$\frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{5}{16}} = \frac{1}{20} .$$

Рассмотрим ситуацию, когда подбрасываются монеты разного достоинства. Например, подбросили 2 раза по 3 разные монеты: 1 рубль, 5 рублей и 10 рублей. Определим вероятность того, что оба раза выпадет одинаковая комбинация монет.

В таком примере ситуация аналогична опыту, в котором все монеты подбрасываются по отдельности, и необходимо определить вероятность того, что монеты одного достоинства при первой серии подбрасывания упадут также, как монеты того же достоинства во всех последующих сериях подбрасывания. Например, если один рубль выпал «гербом» («решкой») при первом подбрасывании, то вероятность того, что один рубль выпадет и во второй раз также, равна 0,5.

Проведя аналогичные рассуждения для монеты каждого достоинства, построим вероятностный граф проведенного испытания (рис. 3).

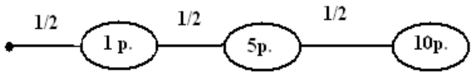

рис. 3

Таким образом, вероятность того, что монеты одного достоинства при первом подбрасывании выпадут так же, как монеты аналогичного достоинства при втором подбрасывании, равна:

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} .$$

Определим, какой должна быть стоимость участия в данной игре, если в случае совпадения комбинаций монет после двух подбрасываний игроку полагается приз в размере 100 рублей. В этом случае математическое ожидание выигрыша составит: 100·1/8=12,5 рублей. Следовательно, чтобы игра была «безобидной», стоимость участия в игре должна равняться 12,5 рублям, чтобы игра была выгодна игроку, стоимость участия должна быть менее 12,5 рублей, и чтобы игра была выгодна организатору, стоимость участия должна быть выше 12,5 рублей.

Теория вероятности находит свое практическое применение в повседневной жизни. Без этой науки трудно представить себе окружающий мир. Ее вклад в такие отрасли, например, как физика неизмеримы. Вся эта наука построена на статистическом подходе теории вероятности. Стоит только вспомнить огромное количество постоянных физических величин, установленных опытным путем и выявленных с помощью теории вероятности. Одна из них, скорость света так и не была точно установлена опытным путем, однако применение комбинаторики и теории вероятности сделала это возможным. Целые отрасли физики, такие, например, как квантовая механика, в основе которой лежит статистический подход к изучению мира, не существовали бы без теории вероятности, и человечество никогда не услышало бы о нанотехнологиях (изучение не отдельных структур, а вероятности их пребывания в определенном состоянии).