УДК 512.54

МИНИМИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Федотова А.И.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Киреев И.В.
Институт математики,
Сибирский федеральный университет

При численном решении задач математической физики хорошо зарекомендовал себя метод разделения переменных, естественное развитие которого привело к задаче следующего типа: построить наилучшую в некоторой норме аппроксимацию функции нескольких независимых переменных, определенной на многомерном кубе, суммой произведений функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной. При этом в пространстве аппроксимируемых функций естественным образом вводится структура тензорного произведения. В работе Аграновского М.Л., Баглай Р.Д. «Об одном разложении в гильбертовом пространстве и его приложения» прилагается достаточное условие сходимости итерационного процесса, которое, к сожалению, приводит жестким ограничениям на норму в пространстве аппроксимируемых функций. В работе Поспелова В.В. «К теории сингулярного разложения в тензорном произведении гильбертовых пространств» приводится оценка скорости сходимости процесса. В работе Викторова Е.Д. «О сходимости процедуры вычисления приближенного решения в обобщенном методе Канторовича» для получения достаточного условия сходимости процесса привлекается теория возмущений, что приводит к сильным ограничениям на исходный функционал.

Однотипные по существу итерационные процессы описанные в разных работах, названы в каждой из работ по-разному:

«разложение в ряд Шмидта» - в работе Поспелова В.В. со ссылкой на работу Шмидта 1907 года, однако в более поздней работе того же автора употреблено слово сочетание “сингулярное разложение”;

«метод вариационных итераций» - в работе Кириченко В.Ф., Крысько В.А. «Метод вариационных итераций в теории пластин и его основание», авторы ссылаются на статью Шунка, опубликованную в 1933 году;

«метод Канторовича» - в работе Викторова Е.Д., ссылаясь на работу Канторовича, выполненную в 1937 году;

«метод Власова-Канторовича для линейных задач» - в работе Кириченко В.Ф., Крысько В.А. со ссылкой на работу Власова 1946 года.

Поскольку вопросы истории математики являются для данной работы второстепенными, то подобные итерационные процессы будем называть методом вариационных итераций (МВИ).

Решение задач методом вариационных итераций в различных работах осуществлялось в три этапа

1: введение структуры тензорного произведения (в пространстве аппроксимируемых функций);

2: дискретизация (в пространстве аппроксимирующих функций одной независимой переменной);

3: численное решение "конечномерных" уравнений. В ряде работ отмечается высокая эффективность описанного подхода. Однако трудности с введением структуры тензорного произведения и отсутствие легко проверяемых критериев сходимости вызывают определенные затруднения при численной реализации “функционального”

МВИ. Поэтому попробуем поменять местами первый и второй этапы в функциональном МВИ, что приводит к дискретному аналогу метода. В его основе лежит понятие тензорного произведения векторных пространств.

Цель работы – построение приближения дискретной функции нескольких аргументов суммой произведений дискретных функций одной переменной дискретных функций одной переменной, доставляющее минимум заданному выпуклому квадратичному функционалу.

В работе сделан краткий обзор литературы по приближению функций нескольких аргументов суммой произведений функций одной переменной. В терминах тензорного произведения сформулирована аналогичная конечномерная задача. Сделан обзор основных свойств тензорного произведения конечномерных векторных пространств. Сформулирована и решена задача о сингулярном разложении в евклидовом пространстве дискретно заданной функции двух переменных, интерпретируемой как прямоугольная матрица. Показано, что каждое слагаемое сингулярного разложения доставляет минимум функционалу невязки, совпадающему с её евклидовой нормой.