Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2008, 1(3) 324-329

УДК 512.54

Классы сопряженных инволюций симплектических групп над полями четного порядка и смежные вопросы

Оксана В.Радченко*

Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 10.04.2008, окончательный вариант 15.05.2008, принята 15.06.2008

Для симплектических групп $Sp\,(2n,q)$ над полем четного порядка q указана унитреугольная форма представителей классов сопряженных инволюций, аналогичная форме Сузуки в $PSL(n,q)$. Доказана ограниченность числа групп $Sp\,(2n,q)$ с инволюцией, для которой число сопряженных и перестановочных с нею инволюций ограничено сверху.

Ключевые слова: симплектическая группа, инволюция.

Введение

М.Сузуки [1] использовал специальную унитреугольную форму инволюций группы $PSL(n,q)$ с четным q; она мономиально сопряжена с их жордановой формой. Существование базисов основного пространства над полем четного порядка, когда инволюции других классических линейных групп приводимы к форме Сузуки, отмечают М.Ашбахер и Г.Зейц [2]; они выписали представители классов сопряженных инволюций унитарных и симплектических групп в мономиальном виде.

Пусть $G(q)$ есть группа Шевалле над полем четного порядка q классического типа G, ассоциированная с системой корней Φ, или скрученного типа $G = {}^m\Phi$, [3]. Приводимость ее инволюций к виду, аналогичному форме Сузуки, устанавливается в настоящей статье для симплектического типа $G = C_n$. Мы используем члены U_i стандартного центрального ряда унипотентной подгруппы $UG(q) =< X_r|\ r \in G^+ >$ группы $G(q)$, а также понятия из [4] множества углов $\mathcal{L}(H)$ и фрейма $\mathcal{F}(H)$ подмножеств $H \subset UG(q)$ и число Кокстера $h = h(G)$ (обозначения см. § 1). Доказана

Теорема 1. *Пусть $G(q)$ есть группа Шевалле классического типа $G = \Phi$ или ${}^2\Phi$ над полем четного порядка q. Тогда для любого i, $1 \leqslant i < h$, существует и определен однозначно элемент τ_i такой, что*

$$\tau_i \in \mathcal{F}(U_i) \cap U\Phi(2), \quad \mathcal{L}(\tau_i) = \mathcal{L}(U_i). \tag{1}$$

Кроме того, элементы τ_i при $[h/2] \leqslant i < h$ являются инволюциями и когда $G = A_n$ или C_n образуют систему представителей классов сопряженных инволюций группы $G(q)$.

В § 2 с помощью теоремы 1 подтверждается

*e-mail: nimdar@inbox.ru

Гипотеза A [5]: *существует только конечное число конечных простых групп G с заданным числом* $|C_G(\tau) \cap \tau^G|$ для инволюции τ.

Как обычно, τ^G есть класс сопряженных с τ элементов группы G, а $C_G(\tau)$ — централизатор τ в G. Гипотеза усиливает известное предположение В.П. Шункова [6] (с целью обобщения классической теоремы Р. Брауэра [7]) об ограниченности числа конечных простых групп с заданным параметром вложения инволюции. Она была подтверждена ранее для знакопеременных групп, $PSL\ (n, q)$ и $PSU\ (n, q^2)$ с четным q и для некоторых других семейств простых групп [8]–[11].

1. Классы сопряженных инволюций группы $G(q)$

В этом параграфе доказывается теорема 1.

В [2] выписаны представители классов сопряженных инволюций унитарных и симплектических групп в мономиальном виде. Приводимость инволюций к виду, аналогичному форме Сузуки, мы установим для симплектических групп. Всюду в статье через $G(q)$ обозначается группа Шевалле классического типа G над полем четного порядка q.

Известно, что для числа Кокстера $h = h(G)$ при $G = \Phi$ число $h-1$ совпадает с высотой максимального корня. Скрученную группу $U^2\Phi(q)$ определяют как централизатор в группе $U\Phi(q)$ ее "скручивающего" автоморфизма σ [3]. В этом случае существует симметрия 2-го порядка графа Кокстера системы корней Φ, однозначно продолжаемая до подстановки корней, а в случае корней одной длины — также до гомоморфизма ζ решетки корней. Если Φ типа D_{n+1}, A_{2n-1} или A_{2n}, то $\zeta(\Phi)$ есть система корней, соответственно, типа B_n, C_n или BC_n.

Для скрученного типа $G = {}^2\Phi$ считаем $h = h(\zeta(\Phi))$. Тогда стандартный центральный ряд

$$U = U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_h = 1 \tag{2}$$

группы $UG(q)$ имеет длину h для всех классических типов G. Нам потребуется понятие фрейма [4] подмножества унипотентной подгруппы. Через $\{r\}^+$ при $r \in G$ обозначаем совокупность $s \in G^+$ с неотрицательными коэффициентами в линейном выражении $s - r$ через базу $\Pi(G)$. Выделим подгруппы

$$T(r) = \langle X_s \mid s \in \{r\}^+\rangle, \quad Q(r) = \langle X_s \mid s \in \{r\}^+ \setminus \{r\}\rangle.$$

Определение 1. *Если $H \subseteq T(r_1)T(r_2)\dots T(r_m)$ и включение нарушается при любой замене $T(r_i)$ на $Q(r_i)$, то множеством углов для H назовем $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\} = \mathcal{L}(H)$, а фреймом для H — множество $\mathcal{F}(H)$ такое, что*

$$\mathcal{F}(H) \subseteq \prod_{s\in\mathcal{L}(H)} X_s, \qquad \mathcal{F}(H) = H \mod \prod_{s\in\mathcal{L}(H)} Q(s).$$

Мы будем использовать представление из [12] унипотентных подгрупп групп $G(q)$. Систему корней Φ классического типа выберем в евклидовом пространстве V_n с ортонормированным базисом $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Согласно [13, табл. I – IV], положительные корни имеют вид

$$\varepsilon_i - m\varepsilon_j = p_{i,mj}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n,\ m \in \{0, -1, +1\}.$$

Полагаем $e_r = e_{i,mj}$ при $r = p_{i,mj}$. Записывая произвольный элемент из $U\Phi(q)$ суммой $\sum a_{iv}e_{iv}$, его можем представить Φ^+-матрицей $\|a_{iv}\|$, располагая коэффициент a_{iv}, как обычно, в i-й строке и v-м столбце [12]. В частности, C_n^+-матрица имеет вид

$$\begin{array}{c} a_{1,-1} \\ \\ a_{2,-2}\ a_{2,-1}\ a_{21} \\ \\ \dots\ \ \dots\ \ \dots \\ \\ a_{n,-n}\ \dots\ a_{n,-2}\ a_{n,-1}\ a_{n1}\ \dots\ a_{n,n-1}. \end{array}$$

Замечание 1. *Любая C_n^+–матрица является частью унитреугольной симплектической $2n \times 2n$–матрицы, в которой оставшиеся элементы несложно восстанавливаются с помощью симметрии относительно побочной диагонали. При подходящем соответствии фрейм $\mathcal{F}(U_i)$ в группе $C_n(q)$ переходит во фрейм $\mathcal{F}(U_i)$ группы $PSL\ (2n, q)$.*

Лемма 1. *Пусть $G(q)$ есть группа Шевалле классического типа G над полем четного порядка q. Ее элемент τ_i, $1 \leqslant i < h$, с условием (1) является инволюцией тогда и только тогда, когда подгруппа U_i абелева.*

Доказательство. Как следует из представления и основных соотношений групп $UG(q)$, [12], в подгруппе U_i при $1 \leqslant i < [h/2]$ найдутся корневые подгруппы с неперестановочными элементами. В этом случае ее элемент τ_i с условием (1) не является инволюцией. Далее, так как

$$[U_i, U_i] \subseteq U_{2i} \subseteq U_h = 1, \quad [h/2] \leqslant i < h,$$

то подгруппа U_i абелева при $[h/2] \leqslant i < h$. Следовательно, все элементы τ_i с условием (1) являются инволюциями. □

В группе $U = UG(q)$ любого классического типа $G = \Phi$ или $G = {}^2\Phi$ при $U_i \neq 1$, очевидно, имеем $\prod_{s\in\mathcal{L}(U_i)} Q(s) = U_{i+1}$. Пересечение $\mathcal{F}(U_i) \cap U\Phi(2)$ при $1 \leqslant i < h$ всегда является неединичным, и его элемент τ_i с условиями (1) единствен. Для групп Шевалле типа A_n справедливость теоремы 1 получаем, используя для инволюций теорему Жордана и мономиальную сопряженность.

Ясно, что $\mathcal{F}(U_{h-1}) = U_{h-1} = X_s$ для максимального $s \in G$. Известно, что существует $p \in \Pi(G)$ с условием $s - p \in G$. Кроме того, при $G \neq A_n$ выбор p однозначен, $\mathcal{F}(U_{h-2}) = X_{s-p}$, причем s и $s-p$ — корни разной длины для типа C_n и разнотипные классы корней для типа ${}^2A_n$. По [3, теореме 11.3.2] группа $G(q)$ типа C_n изоморфна симплектической группе $PSp\ (2n, q)$. В силу [2, 7.6], она имеет точно n классов сопряженных инволюций. Их представители в симплектической группе можем записать, используя представление C_n^+–матрицами, в виде

$$\sigma_k = \tau_{h-k} = e_{n,-n+k-1} + e_{n-1,-n+k-2} + \ldots + e_{n-[\frac{k-1}{2}],-n+[\frac{k}{2}]}, \ 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{3}$$

Это показывают лемма 1 и замечание 1. □

Замечание 2. *Как следует из доказательства, теорема 1 верна в полном объеме и для типа $G = {}^2A_n$. Однако для типов $G = D_n$ и $G = {}^2D_n$ фреймы $\mathcal{F}(U_{h-1})$ и $\mathcal{F}(U_{h-2})$ мономиально сопряжены в группе $G(q)$, и поэтому последнее утверждение теоремы 1 не выполняется. Действительно, для этих типов выбранные в доказательстве s и $s-p$ являются либо корнями равной длины, либо однотипными классами. В силу транзитивности группы Вейля на корнях одинаковой длины существуют элемент $w \in W = W(G)$ и мономиальный элемент n такие, что*

$$w(s) = s - p, \qquad nX_sn^{-1} = X_{s-p}.$$

2. Сопряженно-коммутативная ширина инволюций симплектических групп

Напомним, что для инволюции τ группы G число $|C_G(\tau) \cap \tau^G|$ сопряженных и перестановочных с τ инволюций в G называют сопряженно-коммутативной шириной инволюции τ в группе G и обозначают через $ccw(G, \tau)$. В этом параграфе для симплектических групп $G(q)$ подтверждается гипотеза А.

Ранее гипотеза была подтверждена для знакопеременных групп, простых групп с одним классом сопряженных инволюций и для некоторых групп Шевалле над полями четного порядка: групп исключительных типов, специальных линейных и унитарных групп [8]–[11].

Строение централизатора $C_G(\tau)$ произвольной инволюции τ симплектической группы $G = G(q)$ выявляется в [2, 7.8-7.11]. Однако в найденном представлении централизатора затруднительно оценивать число сопряженных с τ инволюций. Мы используем теорему 1.

По теореме 1 произвольная инволюция $\tau \in G$ сопряжена с инволюцией σ_k из (3). Замечаем, что любая инволюция σ_k есть элемент подходящего абелева фрейма $\mathcal{F}(U_i)$. В частности, фрейм есть произведение корневых подгрупп, которые перестановочны поэлементно. Отсюда вытекает, что любое сопряжение τ диагональным сопряжением дает перестановочную с τ инволюцию. В силу [3, лемма 11.1.3] сразу же получаем оценку $ccw(G, \tau) \geqslant (q-1)$. (Более точная оценка

$$ccw(G, \tau) \geqslant (q-1)^{[\frac{k+1}{2}]}$$

для $\tau = \sigma_k$ выполняется не всегда.) Следовательно, сопряженно-коммутативная ширина любой инволюции τ из $G(q)$ неограниченно возрастает, если возрастает порядок основного поля. То же самое получаем, по аналогии с доказательством в [8] гипотезы А для групп $PSL(n, q)$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Существует только конечное число симплектических групп над конечным полем четного порядка с инволюцией заданной сопряженно-коммутативной ширины.*

Автор благодарен профессору В.М.Левчуку за постановку задачи и внимание к статье.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 06-01-00824а).

Список литературы

[1] M.Suzuki, Characterizations of linear groups, *Bull. AMS.*, **75**(1969), 1043-1091.

[2] M.Aschbacher, G.M.Seitz, Involutions in chevalley groups over fields of even order, *Nagoya Math. J.*, **63**(1976), 1-91.

[3] R.W.Carter, Simple groups of Lie type, New York, Wiley and Sons, 1972.

[4] В.М.Левчук, Г.С.Сулейманова, Нормальное строение унипотентной подгруппы группы лиева типа и смежные вопросы, *Докл. РАН.*, **419**(2008), № 5, 595-598.

[5] V.M.Levchuk, Growth of the intersection of the centralizer of an involution and its class of conjugated elements in finite simple groups, *Proceed. Int. Conf. "Antalya Algebra Days VIII"(17-21 May, 2006)*, Istanbul, Bilgi Univ, 2006, 26.

[6] В.П.Шунков, Группы с инволюциями, Сб. тезисов докл. международ. сем. по теории групп, Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2001, 245-246.

[7] Р.Брауэр, О строении групп конечного порядка, Международный математический конгресс в Амстердаме 1954 г., Москва, Физматгиз, 1961, 23-35.

[8] О.В.Голованова, В.М.Левчук, Зависимость порядков конечной простой группы и пересечения централизатора и класса сопряженных элементов инволюции, *Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины*, **3**(2006), № 36, 124-130.

[9] О.В.Радченко, Сопряженно-коммутативная ширина инволюции группы с одним классом сопряженных инволюций, *Вестник КрасГУ*, Красноярск, 2006, № 9, 64-69.

[10] А.Г.Лихарев, Ограниченность сопряженно-коммутативной ширины инволюции в группах Шевалле, Препринт №4, Красноярск, ИВМ СО РАН, 2006.

[11] О.В.Голованова, Параметры вложения инволюций конечных простых групп лиева типа ранга 1, *Вестник КрасГУ*, Красноярск, 2006, № 4, 49-54.

[12] В.М.Левчук, Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле, *Алгебра и логика*, **29**(1990), № 3, 315-338.

[13] Н.Бурбаки, Группы и алгебры Ли (главы IV–VI), М., Мир, 1982.

Classes of Conjugate Involutions of Symplectic Groups over Fields of Even Order and Related Questions

Oksana V.Radchenko

We use an analogue of the Suzuki form in $PSL(n,q)$ in order to find representatives of conjugate involution classes of symplectic groups $Sp\ (2n,q)$ over fields of any even order. Let τ be an involution of a group G and $ccw(G,\tau)$ denote the number of all conjugate and commutative involutions for τ. We establish an uppen bound for this number in the case of $Sp\ (2n,q)$.

Keywords: symplectic group, involution.