УДК 517.9

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ТРЕХ РАЗЛИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Гуц С. В.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Полынцева С. В.

Сибирский федеральный университет

В работе исследуется однозначная разрешимость в классе гладких ограниченных функций задачи определения двух старших коэффициентов и функции источника в многомерном параболическом уравнении с условиями переопределения, заданными на различных гиперповерхностях.

Данная задача относится к классу коэффициентных обратных задач. Коэффициентные обратные задачи – это задачи об определении коэффициентов дифференциальных операторов по некоторой информации о решении. Такие задачи исследовались: Ю.Е. Аникоконовым[1], Ю.Я. Беловым[2], Г.В. Демидовым[3], М.М. Лаврентьевым[4] и другими.

Случай многомерного параболического уравнения с тремя различными коэффициентами, где решения рассматривались в классе гладких функций, достаточно быстро убывающих по выделенной переменной исследован в [5].

В полосе $G_{[0,T]}=\{(t,x,z)\,|\,0\le t\le T, x\in E_n, z\in E_1\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=L_x(u)+g_1(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+g_2(t,x)\frac{\partial u}{\partial z}+g_3(t,x)u+g_4(t,x)f(t,x,z) \qquad (1)$$

с тремя неизвестными коэффициентами $g_1(t,x)$, $g_2(t,x)$, $g_4(t,x)$ с начальным условием

$$u(0,x,z)=u_0(x,z),\ \ (x,z)\in E_{n+1}. \qquad (2)$$

Здесь

$$L_x(u)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$ заданы в $G_{[0,T]}$ и E_{n+1} соответственно, коэффициенты $\alpha_{ij}(t),\alpha_i(t),\ i,j=\overline{1,n},$ - непрерывные действительнозначные функции переменной t, $0\le t\le T, T>0,\ T=const$, $g_3(t,x)$ - непрерывно-дифференцируемая действительнозначная функция переменных t,x.

Будем считать, что $\alpha_{ij}(t)=\alpha_{ji}(t)$ и выполняется соотношение

$$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(t)\xi_i\xi_j>0,\quad \forall\xi\in E_n\setminus\{0\}\quad t\in[0,T].$$

Предполагается, что выполняются условия переопределения на трех различных гиперповерхностях:

$$\begin{aligned}
&u(t,x,a_1(t))=\varphi_1(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]},\\
&u(t,x,a_2(t))=\varphi_2(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]}, \qquad (3)\\
&u(t,x,a_3(t))=\varphi_3(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]},
\end{aligned}$$

где $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) \,|\, 0 \le t \le T, x \in E_n\}$, $a_1(t), a_2(t), a_3(t) \in C^1[0,T]$, $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ - попарно различны, $\varphi_1(t,x)$, $\varphi_2(t,x)$, $\varphi_3(t,x)$ - заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\begin{aligned} \varphi_1(0,x) &= u_0(x, a_1(0)), \quad x \in E_n, \\ \varphi_2(0,x) &= u_0(x, a_2(0)), \quad x \in E_n, \\ \varphi_3(0,x) &= u_0(x, a_3(0)), \quad x \in E_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Под решением обратной задачи (1)-(3) в полосе $G_{[0,t_*]} 0 < t_* \le T$, понимается четверка функций $u(t,x,z)$, $g_1(t,x)$, $g_2(t,x)$, $g_4(t,x)$, которые удовлетворяют соотношениям (1)-(3).

Входные данные достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие соотношения и удовлетворяют им

$$|a'_s(t)| + |D_x^\gamma \psi_s(t,x)| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\gamma u_0(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\gamma f(t,x,z)\right| \le C, \ |\gamma| \le 4, \ s = 1,2,3, \tag{5}$$
$$k = \overline{0,10 - 2|\gamma|}.$$

Предположим, что в $\Pi_{[0,T]}$ выполнены следующие условия:

$$|\psi_{st}(t,x)| + |f_t(t,x,a_1(t))| + |f_t(t,x,a_2(t))| +$$
$$+ |f_t(t,x,a_3(t))| + |a''_1(t)| + |a''_2(t)| + |a''_3(t)| \le C, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} Q(0,x) &= u_{zz}|_{z=a_1(0)} u_z|_{z=a_2(0)} f(0,x,a_3(0)) - u_{zz}|_{z=a_1(0)} u_z|_{z=a_3(0)} f(0,x,a_2(0)) - \\ &- u_z|_{z=a_1(0)} u_{zz}|_{z=a_2(0)} f(0,x,a_3(0)) + u_z|_{z=a_1(0)} u_{zz}|_{z=a_3(0)} f(0,x,a_2(0)) + \\ &+ f(0,x,a_1(0)) u_{zz}|_{z=a_2(0)} u_z|_{z=a_3(0)} - f(0,x,a_1(0)) u_{zz}|_{z=a_3(0)} u_z|_{z=a_2(0)} \ge \delta > 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} B(0,x) &= -P_{1_0} u_z|_{z=a_2(0)} f(0,x,a_3(0)) + P_{1_0} u_z|_{z=a_3(0)} f(0,x,a_2(0)) + u_z|_{z=a_1(0)} P_{2_0} f(0,x,a_3(0)) - \\ &- u_z|_{z=a_1(0)} P_{3_0} f(0,x,a_2(0)) - f(0,x,a_1(0)) P_{2_0} u_z|_{z=a_3(0)} + f(0,x,a_1(0)) P_{3_0} u_z|_{z=a_2(0)} \ge \delta > 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $P_i = L_x(\varphi_i(0,x)) + g_3(t,x)\varphi_i(0,x) - \varphi_{it}(0,x) + a'_i(0) u_z|_{z=a_i(0)}$, $i = 1,2,3$, $\delta = const$.

На основании (5) - (8) доказано, что четверка функций $u(t,x,z)$, $g_1(t,x)$, $g_2(t,x)$, $g_4(t,x)$ принадлежит классу

$$Z(t_*) = \{ \mathrm{g_1(t,x), g_2(t,x), g_4(t,x), u(t,x,z)} \,|\, \mathrm{u} \in \mathrm{C}^{1,2,2}_{\mathrm{t,x,z}}(G_{[0,t_*]}) \bigcap \mathrm{C}^{0,0,4}_{\mathrm{t,x,z}}(G_{[0,t_*]});$$
$$\mathrm{g_1(t,x), g_2(t,x), g_4(t,x)} \in \mathrm{C}^{0,2}_{\mathrm{t,x}}(\Pi_{[0,t_*]})\}$$

и удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{\partial^k}{\partial z^k} u(t,x,z) \le C, \sum_{k=0}^{2} \sum_{|\gamma| \le 2} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\gamma u(t,x,z)\right| \le C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}, \tag{9}$$

$$\sum_{|\gamma| \le 2} |D_x^\gamma g_1(t,x)| + \sum_{|\gamma| \le 2} |D_x^\gamma g_2(t,x)| + \sum_{|\gamma| \le 2} |D_x^\gamma g_4(t,x)| \le C, \quad (t,x) \in G_{[0,t_*]}. \tag{10}$$

Имеет место

Теорема. Пусть выполняются условия (4), (5)-(8). Тогда существует единственное решение $u(t,x,z)$, $g_1(t,x)$, $g_2(t,x)$, $g_4(t,x)$ задачи (1)-(3) в классе $Z(t_*)$, удовлетворяющее соотношениям (9), (10). Постоянная t_*, $0 < t_* \le T$, зависит от постоянных C, δ из соотношений (5)-(8).

Список литературы

[1] Аниконов, Ю. Е. Существование и единственность решения обратной задачи для параболического уравнения / Ю.Е. Аниконов, Б. А. Бубнов // ДАН СССР.-1988.-Т.298.-N4. – С.777-779.
[2] Белов, Ю. Я. Метод слабой аппроксимации / Ю.Я. Белов, С.А. Кантор. – КрасГУ, 1999.-236с.
[3] Демидов, Г. В. Метод слабой аппроксимации / Г.В. Демидов, Н.Н. Яненко. – Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1989. – 100с.
[4] Лаврентьев, М. М. Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений / М. М. Лаврентьев // ДАН СССР.- 1965.-Т.160.-N1. – С. 32 -35.
[5] Полынцева, С.В. Задачи идентификации трех и четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения / С.В. Полынцева // Неклассические уравнения математической физики: Труды международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения"/ Под ред. А.И. Кожанова. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 2007. С.221-231.