Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2008, 1(3) 308-317

УДК 517.9

Задача идентификации коэффициентов при производных по времени и пространственной переменной

Светлана В.Полынцева*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 15.03.2008, окончательный вариант 05.05.2008, принята 15.06.2008

В работе доказана однозначная разрешимость задачи идентификации коэффициентов при производных по времени и пространственной переменной параболического уравнения в случае задачи Коши и условий переопределения, заданных на двух различных гиперплоскостях.

Ключевые слова: задачи идентификации коэффициентов, обратные задачи, уравнения в частных производных, метод слабой аппроксимации.

Одним из сложных для исследования классов обратных задач являются коэффициентные. Коэффициентные обратные задачи — задачи об определении коэффициентов дифференциальных операторов (обыкновенных или в частных производных) по некоторой информации о решении.

Задачи идентификации коэффициентов (коэффициентные обратные задачи) уравнений и систем уравнений в частных производных исследовались М.М.Лаврентьевым, В.Г.Романовым, Ю.Е.Аниконовым, И.А.Васиным, А.И.Прилепко, А.Б.Костиным, А.Лоренци, А.М.Денисовым, В.М.Исаковым, В.Л.Камынининым, А.Д.Искендеровым, А.И.Кожановым, В.В.Соловьевым, Н.Я.Безнощенко, Н.И.Иванчовым, Ю.Я.Беловым и другими.

Целью представленной работы является исследование на разрешимость задачи идентификации коэффициентов при производных по времени и пространственной переменной параболического уравнения в случае задачи Коши и условий переопределения, заданных на двух различных гиперплоскостях.

Случай линейного параболического уравнения с одним неизвестным коэффициентом при производной по времени исследован в [1], где решения рассматривались в классе гладких функций, достаточно быстро убывающих по выделенной переменной.

Задача идентификации коэффициентов при нелинейном члене и производной по времени для полулинейного параболического уравнения с нелинейностью достаточно общего вида была исследована в работе [2].

Обратная задача для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени рассмотрена в [3].

Другие задачи идентификации двух, трех и четырех коэффициентов параболических уравнений с условиями переопределения, заданными на двух, трех и четырех различных гиперплоскостях соответственно, см. в [4-6].

*e-mail: siriuspsv@mail.ru

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)|\, 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in E_1,\ z \in E_1\}$ рассматривается уравнение

$$a(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} = L_x(u) + g_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q(t,x)\frac{\partial u}{\partial z} + g_2(t)u + f(t,x,z) \tag{1}$$

с двумя неизвестными коэффициентами $a(t,x)$, $q(t,x)$, с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \quad (x,z) \in E_2. \tag{2}$$

Здесь

$$L_x(u) = \alpha_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x},$$

функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$ заданы в $G_{[0,T]}$ и E_2 соответственно, коэффициенты $g_j(t)$, $\alpha_j(t)$, $j = 1,2$, – непрерывные действительнозначные функции переменной t, $0 \leqslant t \leqslant T$, $T > 0$ — const, причем $\alpha_1(t) > 0$ и $g_1(t) > 0$. E_2 — 2-мерное евклидово пространство.

Предполагается, что выполняются условия переопределения на двух различных гиперплоскостях:

$$u(t,x,0) = \varphi(t,x), \quad u(t,x,b) = \psi(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{3}$$

где $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|\, 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$, и $\varphi(t,x)$, $\psi(t,x)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\varphi(0,x) = u_0(x,0), \quad \psi(0,x) = u_0(x,b), \quad x \in E_1, \quad b \neq 0 - \text{const}. \tag{4}$$

Под решением задачи (1)-(3) в полосе $G_{[0,t_*]}$, $0 < t_* \leqslant T$, понимается тройка функций $a(t,x)$, $q(t,x)$, $u(t,x,z)$, которые удовлетворяют соотношениям (1)-(3).

Предполагая, что решение $u(t,x,z)$ задачи (1)-(3) допускает прямое и обратное преобразование Фурье по переменной z

$$v(t,x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t,x,z)e^{-izy}\,dz = F(u)(t,x,y),$$

$$u(t,x,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(t,x,y)e^{izy}\,dy = F^{-1}(v)(t,x,z),$$

перейдем от поставленной задачи к прямой вспомогательной задаче

$$\frac{S_\delta(B_1)}{S_\delta(\Delta_1)}\frac{\partial v}{\partial t} = L_x(v) - g_1(t)y^2 v + iy\frac{Re\{Q\varphi_t - P\psi_t\}}{S_\delta(\Delta_1)}v + g_2(t)v + F(t,x,y), \tag{5}$$

$$v(0,x,y) = v_0(x,y), \quad (x,y) \in E_2. \tag{6}$$

Здесь

$$P = L_x(\varphi(t,x)) + g_2(t)\varphi(t,x) + f(t,x,0) - g_1(t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)\,dy,$$

$$Q = L_x(\psi(t,x)) + g_2(t)\psi(t,x) + f(t,x,b) - g_1(t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)e^{iby}\,dy,$$

$$B = Qi\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)\,dy - Pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{iby}\,dy,$$

$$\Delta_1 = Re\Delta, \quad B_1 = ReB,$$

$S_\delta(\theta)$ — срезающая функция класса $C^4(E_1)$, $\delta > 0$, $\delta = \mathrm{const}$,

$$S_\delta(\theta) \geqslant \frac{\delta}{3} \ \text{ при } \ \theta \in E_1, \quad S_\delta(\theta) = \begin{cases} \theta, & \theta \geqslant \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{3}, & \theta \leqslant \frac{\delta}{4}, \end{cases} \tag{7}$$

$v_0(x,y) = F(u_0)(x,y)$ — преобразование Фурье функции u_0 по переменной z, $Re\Psi$ — действительная часть Ψ, Δ — определитель системы алгебраических уравнений, из которой определяются неизвестные коэффициенты $a(t,x)$ и $q(t,x)$:

$$\Delta = \Delta(t,x) = \begin{vmatrix} \varphi_t(t,x) & -i\int_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)\,dy \\ \psi_t(t,x) & -i\int_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{iby}\,dy \end{vmatrix} \neq 0.$$

Разрешимость прямой вспомогательной задачи

Доказательство существования решения прямой задачи (5), (6) проводится методом слабой аппроксимации [1], [7].

Слабо аппроксимируем задачу (5), (6) задачей

$$\frac{\partial v^\tau}{\partial t} = 4\frac{S_\delta(\Delta_1^\tau)}{S_\delta(B_1^\tau)}L_x(v^\tau), \quad n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{4})\tau, \tag{8}$$

$$\frac{\partial v^\tau}{\partial t} = -4y^2 g_1(t)\frac{S_\delta(\Delta_1^\tau)}{S_\delta(B_1^\tau)}v^\tau, \quad (n+\frac{1}{4})\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \tag{9}$$

$$\frac{\partial v^\tau}{\partial t} = 4iy\frac{Re\{Q^\tau\varphi_t - P^\tau\psi_t\}}{S_\delta(B_1^\tau)}v^\tau, \quad (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+\frac{3}{4})\tau, \tag{10}$$

$$\frac{\partial v^\tau}{\partial t} = 4g_2(t)\frac{S_\delta(\Delta_1^\tau)}{S_\delta(B_1^\tau)}v^\tau + 4\frac{S_\delta(\Delta_1^\tau)}{S_\delta(B_1^\tau)}F(t,x,y), \quad (n+\frac{3}{4})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \tag{11}$$

$$v^\tau(t,x,y)|_{t=0} = v_0(x,y), \tag{12}$$

где $\tau N = T$, $N > 1$ — целое, $n = \overline{0, N-1}$, $v^\tau = v^\tau(t,x,y)$, $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$,

$$B_1^\tau = Re\{Q^\tau i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv^\tau(t-\frac{\tau}{4},x,y)\,dy - P^\tau i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv^\tau(t-\frac{\tau}{4},x,y)e^{iby}\,dy\},$$

$$\Delta_1^\tau = Re\{i\psi_t\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv^\tau(t-\frac{\tau}{4},x,y)\,dy - i\varphi_t\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv^\tau(t-\frac{\tau}{4},x,y)e^{iby}\,dy\},$$

$$P^\tau = L_x(\varphi) + g_2(t)\varphi + f(t,x,0) - g_1(t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau(t-\frac{\tau}{4},x,y)\,dy,$$

$$Q^\tau = L_x(\psi) + g_2(t)\psi + f(t,x,b) - g_1(t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau(t-\frac{\tau}{4},x,y)e^{iby}\,dy.$$

Предположения относительно входных данных

Пусть функции $\varphi(t,x)$, $\psi(t,x)$, φ_t, $L_x(\varphi)$, ψ_t, $L_x(\psi)$, $F(t,x,y)$, $f|_{z=0}$, $f|_{z=b}$, $v_0(x,y)$ — непрерывные по t, достаточно гладкие по переменным x, y в $G_{[0,T]}$ и удовлетворяют неравенствам

$$|D_x^\beta v_0| + |D_x^\beta F| + |D_x^\beta f|_{z=0}| + |D_x^\beta f|_{z=b}| + |D_x^\beta \varphi_t| + |D_x^\beta \psi_t| + |D_x^\beta L_x(\varphi)| +$$

$$+ |D_x^\beta L_x(\psi)| + |D_x^\beta \varphi| + |D_x^\beta \psi| \leqslant N, \ \ |\beta| \leqslant 4; \tag{13}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} D_x^\gamma v_0\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y} D_x^\gamma F\right| \leqslant N, \ \ |\gamma| \leqslant 2; \tag{14}$$

$$|y|^{p+8-2|\beta|+\varepsilon} |D_x^\beta v_0| + |y|^{p+8-2|\beta|+\varepsilon} |D_x^\beta F| \leqslant N, \ \ |\beta| \leqslant 4; \tag{15}$$

$$|y|^{p+4-2|\gamma|+\varepsilon} \left|\frac{\partial}{\partial y} D_x^\gamma v_0\right| + |y|^{p+4-2|\gamma|+\varepsilon} \left|\frac{\partial}{\partial y} D_x^\gamma F\right| \leqslant N, \ \ |\gamma| \leqslant 2; \tag{16}$$

$(t,x,y) \in G_{[0,T]}$, $\varepsilon = \text{const} > 0$, $p \geqslant 4$ — целое, N — неотрицательная постоянная.

Здесь $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — мультииндексы, $|\beta| = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i$, и $D_x^\beta = \partial^{|\beta|} / \partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}$.

Предположим выполнение условий

$$|B(0,x)| = \left| Q_0 \frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z} - P_0 \frac{\partial u_0(x,b)}{\partial z} \right| \geqslant \delta > 0, \quad x \in E_1, \tag{17}$$

$$|\Delta(0,x)| = \left| \frac{\partial \psi(0,x)}{\partial t} \frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z} - \frac{\partial \varphi(0,x)}{\partial t} \frac{\partial u_0(x,b)}{\partial z} \right| \geqslant \delta > 0, \tag{18}$$

где $\delta = \text{const}$,

$$P_0 = L_x(u_0(x,0)) + g_2(0) u_0(x,0) + f(0,x,0) + g_1(0) \frac{\partial^2 u_0(x,0)}{\partial z^2},$$

$$Q_0 = L_x(u_0(x,b)) + g_2(0) u_0(x,b) + f(0,x,b) + g_1(0) \frac{\partial^2 u_0(x,b)}{\partial z^2}.$$

Из построения решения v^τ задачи (8)-(12) и условий (13), (14) следует, что для фиксированного τ решение v^τ существует в $G_{[0,T]}$ и имеет непрерывные в $G_{[0,T]}$ производные $D_x^\beta v^\tau$, $|\beta| \leqslant 4$, $D_x^\gamma \partial v^\tau / \partial y$, $|\gamma| \leqslant 2$.

Легко доказать априорные оценки (19)-(21) (см. [7]).

$$|y|^q |D_x^\alpha v^\tau(t,x,y)| \leqslant C, \quad q = 0, \dots, p+8-2|\alpha|, p+8-2|\alpha|+\varepsilon, \tag{19}$$

$$|\alpha| \leqslant 4; \ \ (t,x,y) \in G_{[0,t_*]},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} D_x^\beta v^\tau(t,x,y)\right| \leqslant C, \quad |\beta| \leqslant 2; \quad (t,x,y) \in G_{[0,t_*]}, \tag{20}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} D_x^\beta v^\tau(t,x,y)\right| \leqslant C, \quad |\beta| \leqslant 2; \quad (t,x,y) \in G_{[0,t_*]}, \tag{21}$$

Из (19) (при $q = 0$) следует равномерная в $G_{[0,t_*]}$ ограниченность по τ семейства производных $\{D_x^\beta v^\tau\}$ для фиксированного β, $|\beta| \leqslant 2$, а из оценок (19)-(21) следует равностепенная непрерывность в $G_{[0,t_*]}$ по переменным t, x, y этого же семейства. Согласно теореме Арцела (см. [1]), множество $\{D_x^\beta v^\tau\}$ компактно в $C(G^M_{[0,t_*]})$ ($C(G^M_{[0,t_*]})$ — пространство функций $f(t,x,y)$, непрерывных в $G^M_{[0,t_*]}$), $|\beta| \leqslant 2$ при любой фиксированной постоянной $M > 0$. $G^M_{[0,t_*]} = \{(t,x,y) \mid 0 \leqslant t \leqslant t_*,\ |x| \leqslant M,\ y \in E_1\}$.

Диагональным методом выберем подпоследовательность $\{v^\tau\}$ (обозначение не меняем), сходящуюся при $\tau \to 0$ вместе с производными $\{D_x^\beta v^\tau\}$, $|\beta| \leqslant 2$, к некоторой функции v в полосе $G_{[0,t_*]}$, причем равномерно на $G^M_{[0,t_*]}$, при любом фиксированном $M > 0$:

$$D_x^\alpha v^\tau \to D_x^\alpha v \ \text{ равномерно на } G^M_{[0,t_*]},\ \ |\alpha| \leqslant 2. \tag{22}$$

Функция v непрерывна в $G_{[0,t_*]}$ вместе со своими производными $D_x^\alpha v$ и удовлетворяет неравенству

$$|y|^q |D_x^\alpha v(t,x,y)| \leqslant C,\ \ (t,x,y) \in G_{[0,t_*]}, \tag{23}$$

$$q = 0, \dots, p+4-2|\alpha|, p+4-2|\alpha|+\varepsilon,\ \ |\alpha| \leqslant 2,\ \ p \geqslant 4$$

и начальным условиям (6).

В силу (22), (23) выполняются условия теоремы метода слабой аппроксимации [7], следовательно, функция $v(t,x,y)$ является решением уравнения (5) класса $C^{1,2}_{t,x}(G_{[0,t_*]})$. В нашем случае $m = 4$, $r = 2$,

$$\Psi(t,x,y,\overline{v}^\tau, J(v^\tau)) = \frac{S_\delta(\Delta_1)}{S_\delta(B_1)} L_x(v^\tau(t,x,y)) - g_1(t)\frac{S_\delta(\Delta_1)}{S_\delta(B_1)} y^2 v^\tau(t,x,y) +$$

$$+ iy\frac{Re\{Q\varphi_t - P\psi_t\}}{S_\delta(B_1)} v^\tau(t,x,y) + g_2(t)\frac{S_\delta(\Delta_1)}{S_\delta(B_1)} v^\tau(t,x,y) + \frac{S_\delta(\Delta_1)}{S_\delta(B_1)} F(t,x,y),$$

$$\Psi^1(t,x,y,\overline{v}^\tau, J(v^\tau)) = \frac{S_\delta(\Delta_1)}{S_\delta(B_1)} L_x(v^\tau(t,x,y)),$$

$$\Psi^1_\tau(t,x,y,\overline{v}^\tau, J(v^\tau)) = \frac{S_\delta(\Delta_1^\tau)}{S_\delta(B_1^\tau)} L_x(v^\tau(t,x,y)),$$

$$\Psi^2(t,x,y,\overline{v}^\tau, J(v^\tau)) = -g_1(t)\frac{S_\delta(\Delta_1)}{S_\delta(B_1)} y^2 v^\tau(t,x,y),$$

$$\Psi^2_\tau(t,x,y,\overline{v}^\tau, J(v^\tau)) = -g_1(t)\frac{S_\delta(\Delta_1^\tau)}{S_\delta(B_1^\tau)} y^2 v^\tau(t,x,y),$$

$$\Psi^3(t,x,y,\overline{v}^\tau, J(v^\tau)) = iy\frac{Re\{Q\varphi_t - P\psi_t\}}{S_\delta(B_1)} v^\tau(t,x,y),$$

$$\Psi^3_\tau(t,x,y,\overline{v}^\tau, J(v^\tau)) = iy\frac{Re\{Q^\tau\varphi_t - P^\tau\psi_t\}}{S_\delta(B_1^\tau)} v^\tau(t,x,y),$$

$$\Psi^4(t,x,y,\overline{v}^\tau, J(v^\tau)) = g_2(t)\frac{S_\delta(\Delta_1)}{S_\delta(B_1)} v^\tau(t,x,y) + \frac{S_\delta(\Delta_1)}{S_\delta(B_1)} F(t,x,y),$$

$$\Psi^4_\tau(t,x,y,\overline{v}^\tau, J(v^\tau)) = g_2(t)\frac{S_\delta(\Delta_1^\tau)}{S_\delta(B_1^\tau)} v^\tau(t,x,y) + \frac{S_\delta(\Delta_1^\tau)}{S_\delta(B_1^\tau)} F(t,x,y).$$

Доказана

Теорема 1. *Пусть выполняются соотношения* (7),(13)-(16). *Тогда в классе* $C^{1,2}_{t,x}(G_{[0,t_*]})$ *существует решение* $v(t,x,y)$ *задачи* (5), (6), *удовлетворяющее неравенству* (23). *Постоянная* t_*, $0 < t_* \leqslant T$, *зависит от постоянных* N, δ *из соотношений* (7), (13)-(16).

Здесь и ниже через $C^{l,m}_{t,x}(G_{[0,t_*]})$ обозначено пространство функций f, имеющих непрерывные производные в $G_{[0,t_*]}$ по t до порядка l и по x до порядка m включительно.

Существование и единственность классического решения обратной задачи

Рассмотрим тройку функций

$$u(t,x,z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(t,x,y)e^{izy}\,dy, \tag{24}$$

$$q(t,x)=\frac{Re\{Q\varphi_t-P\psi_t\}}{S_\delta(\Delta_1)}, \tag{25}$$

$$a(t,x)=\frac{S_\delta(B_1)}{S_\delta(\Delta_1)}, \tag{26}$$

где $v(t,x,y)$ является решением задачи (5), (6).

Согласно (23) из представлений (24)-(26) следует, что тройка функций u, q, a принадлежит классу

$$U(t_*)=\{\lambda(t,x,z),\,\mu(t,x),\,\nu(t,x)\,|\,\frac{\partial^k\lambda}{\partial z^k}\in C^{0,2}_{t,x}(G_{[0,t_*]}),$$

$$k=0,\cdots,p,\;\;p\geqslant 4,\;\;\lambda_t\in C(G_{[0,t_*]}),\;\;\mu,\nu\in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t_*]})\}$$

и имеют место неравенства

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D^\alpha_x\,u(t,x,z)\right|\leqslant C,\quad (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}, \tag{27}$$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D^\alpha_x a(t,x)|+\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D^\alpha_x q(t,x)|\leqslant C,\quad (t,x)\in\Pi_{[0,t_*]}. \tag{28}$$

Применим обратное преобразование Фурье по переменной y к задаче (5), (6). Получим, что функции u, q, a, заданные соотношениями (24)-(26), удовлетворяют уравнению

$$a\frac{\partial u}{\partial t}=L_x(u)+g_1(t)u_{zz}+qu_z+g_2(t)u+f, \tag{29}$$

или, что то же, уравнению (1), в $G_{[0,t_*]}$ и начальным условиям

$$u(0,x,z)=u_0(x,z),\quad (x,z)\in E_2.$$

Заметим, что так как коэффициенты в уравнении (29) и f, u_0 — действительнозначные функции, то мнимая часть $\mathrm{Im}u$ комплекснозначной функции u=$\mathrm{Re}u$+$\mathrm{iIm}u$ является решением однородного параболического уравнения с нулевыми начальными условиями. Следовательно, по принципу максимума $\mathrm{Im}u$=0 в $G_{[0,t_*]}$, и, значит, u — действительнозначная функция.

Следовательно, из (24) находим, что функции

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2v\,dy=-u_{zz}|_{z=0},\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2ve^{iby}\,dy=-u_{zz}|_{z=b},$$

$$i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv\,dy = u_z|_{z=0}, \quad i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yve^{iby}\,dy = u_z|_{z=b}$$

— действительнозначные. Тогда функции $q(t,x)$, $a(t,x)$ можно представить в виде

$$q = \frac{Q\varphi_t - P\psi_t}{S_\delta(\Delta)}, \quad a = \frac{S_\delta(B)}{S_\delta(\Delta)}. \tag{30}$$

Рассмотрим производную по t от функции Δ:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t} = \psi_{tt}u_z|_{z=0} + \psi_t u_{zt}|_{z=0} - \varphi_{tt}u_z|_{z=b} - \varphi_t u_{zt}|_{z=b} \equiv N(t,x). \tag{31}$$

Предположим, что

$$\begin{gathered}|\psi_{tt}| + |\varphi_{tt}| + |\alpha_{1t}(t)| + |\alpha_{2t}(t)| + |g_{1t}(t)| + |g_{2t}(t)| + |f_t|_{z=b}| + \\ + |f_t|_{z=0}| + |L_{xt}(\psi)| + |L_{xt}(\varphi)| \leqslant C, \quad (t,x)\in \Pi_{[0,T]}.\end{gathered} \tag{32}$$

Теперь рассмотрим производную по t от функции B:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = Q_t u_z|_{z=0} + Qu_{zt}|_{z=0} - P_t u_z|_{z=b} - Pu_{zt}|_{z=b} \equiv M(t,x). \tag{33}$$

Здесь

$$P_t = L_{xt}(\varphi) + g_{2t}(t)\varphi + g_2(t)\varphi_t + f_t|_{z=0} + g_{1t}(t)u_{zz}|_{z=0} + g_1(t)u_{zzt}|_{z=0},$$

$$Q_t = L_{xt}(\psi) + g_{2t}(t)\psi + g_2(t)\psi_t + f_t|_{z=b} + g_{1t}(t)u_{zz}|_{z=b} + g_1(t)u_{zzt}|_{z=b},$$

$$L_{xt}(\varphi) = \alpha_{1t}(t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \alpha_1(t)\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial x^2} + \alpha_{2t}(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \alpha_2(t)\frac{\partial\varphi_t}{\partial x},$$

$$L_{xt}(\psi) = \alpha_{1t}(t)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \alpha_1(t)\frac{\partial^2\psi_t}{\partial x^2} + \alpha_{2t}(t)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha_2(t)\frac{\partial\psi_t}{\partial x}.$$

В силу (27), (32) выполняются неравенства

$$|N(t,x)| \leqslant A(\delta), \quad |M(t,x)| \leqslant A_1(\delta).$$

Здесь $A(\delta)$, $A_1(\delta)$ — постоянные, зависящие от δ.

Проинтегрируем равенства (31) и (33) по t:

$$\Delta = \Delta(0,x) + \int\limits_0^t N(\theta,x)\,d\theta, \quad B = B(0,x) + \int\limits_0^t M(\theta,x)\,d\theta. \tag{34}$$

В силу (4), (17), (18) из (34) следуют неравенства

$$\Delta > \frac{\delta}{2}, \quad B > \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad t\in[0,t^*], \tag{35}$$

где $t^* = min\{t_*, \delta/2A, \delta/2A_1\}$. Из определения срезки $S_\delta(\theta)$ (см. (7)) следует, что $S_\delta(\Delta) = \Delta$ и $S_\delta(B) = B$ при $t\in[0,t^*]$.

Таким образом, (30) можно представить в виде:

$$q = \frac{Q\varphi_t - P\psi_t}{\Delta}, \quad a = \frac{B}{\Delta}. \tag{36}$$

При этом $a \geqslant a_0 > 0$, где $a_0 > 0$ — const.

Используя (36), можно показать, что выполняются условия переопределения (3) и, следовательно, доказано, что тройка функций u, q, a, заданная соотношениями (24), (36), является решением задачи (1)-(3) класса $U(t^*)$.

Докажем единственность решения задачи (1)-(3).

Пусть u_1, q_1, a_1 и u_2, q_2, a_2 — два решения задачи (1)-(3) в $G_{[0,t^*]}$, удовлетворяющие условиям (27), (28). Функции $u = u_1 - u_2$, $q = q_1 - q_2$ и $a = a_1 - a_2$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{L_x(u)}{a_1} + \frac{g_1(t)}{a_1}u_{zz} + \frac{q_1}{a_1}u_z + \frac{g_2(t)}{a_1}u + \frac{q}{a_1}u_{2z} - \frac{a}{a_1}u_{2t},\ (t,x,y) \in G_{[0,t^*]} \tag{37}$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0. \tag{38}$$

Здесь ($a_1 > 0$ см. (35)).

Так как a_j, q_j можно представить формулами (36), используя входные данные и функции u_j $(j = 1, 2)$, то в силу (27), (28) имеет место неравенство

$$\left| g(\xi, x)\frac{\partial^{n+1} u_2(\xi, x, z)}{\partial z^{n+1}} + d(\xi, x)\frac{\partial^n u_{2t}(\xi, x, z)}{\partial z^n} \right| \leqslant CV(\xi), \quad n = \overline{0, 2}; \quad \xi \in [0, t^*]. \tag{39}$$

Здесь $g(\xi, x) = q(\xi, x)/a_1(\xi, x)$, $d(\xi, x) = -a(\xi, x)/a_1(\xi, x)$, $V(\xi) = \sum\limits_{m=0}^{2} V_m(\xi)$, $V_m(\xi) = \sup\limits_{G_{[0,\xi]}} \left|\frac{\partial^m u(t, x, z)}{\partial z^m}\right|$, постоянная C зависит от δ (см. (35))и констант, ограничивающих модули функций $g_1(t)$, $g_2(t)$,
$\partial^m u_2/\partial z^m$, $m = \overline{0, 4}$, $\partial^l u_{2t}/\partial z^l$, $l = 0, 1, 2$.

Из (38), (39) и принципа максимума для уравнения (37) имеет место оценка

$$|u(\theta, x, z)| \leqslant C_1 V(\xi)\xi, \quad \theta \in [0, \xi], \tag{40}$$

где $C_1 = Ce^{ht^*}$, $h = \sup\limits_{\Pi_{[0,t^*]}} |g_2(t)/a_1(t, x)|$.

Применим оператор $\partial^m/\partial z^m$, $m = 1, 2$ к уравнению (37). Для функции $\partial^m u/\partial z^m$, повторяя рассуждения, которые использовались для вывода оценки (40), получим неравенство

$$\left|\frac{\partial^m u(\theta, x, z)}{\partial z^m}\right| \leqslant C_1 V(\xi)\xi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \xi \leqslant t^*, \quad m = 1, 2. \tag{41}$$

Из (40), (41) получим неравенство

$$(1 - 3C_1\xi)V(\xi) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant t^*. \tag{42}$$

Из неравенства (42) следует, что $V(\xi) = 0$ при $\xi < 1/3C_1$. Доказали, что в $G_{[0,\frac{1}{3C_1}]}$ функция $u = u_1 - u_2 = 0$.

Аналогично рассуждая, докажем, что $u = 0$ в $G_{[\frac{1}{3C_1},\frac{2}{3C_1}]}$, затем в $G_{[\frac{2}{3C_1},\frac{1}{C_1}]}$ и т. д. Через конечное число шагов докажем равенство

$$u = 0 \quad \text{в } G_{[0,t^*]}. \tag{43}$$

Из (37), (43) следует соотношение

$$\frac{q(t,x)}{a_1(t,x)}u_{2z}(t,x,z) - \frac{a(t,x)}{a_1(t,x)}u_{2t}(t,x,z) = 0 \quad \text{в } G_{[0,t^*]}, \quad a_1(t,x) > 0,$$

или

$$a(t,x)u_{2t}(t,x,z) - q(t,x)u_{2z}(t,x,z) = 0. \tag{44}$$

Положив $z = 0$, а затем $z = b$ в уравнении (44), в силу (3) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &a(t,x)\varphi_t(t,x) - q(t,x)u_{2z}(t,x,0) = 0, \\ &a(t,x)\psi_t(t,x) - q(t,x)u_{2z}(t,x,b) = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Так как в силу (35) определитель Δ системы (45) отличен от нуля в $G_{[0,t^*]}$, то $a(t,x) = q(t,x) = 0$ в $\Pi_{[0,t^*]}$. Доказана

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (4), (13)-(18), (32). *Тогда в классе* $U(t^*)$ *существует единственное решение* u, q, a *задачи* (1)-(3), *удовлетворяющее соотношениям* (27), (28). *Постоянная* t^*, $0 < t^* \leqslant T$, *зависит от постоянных* N, C, δ *из соотношений* (13)-(18), (32).

Список литературы

[1] Ю.Я.Белов, С.А.Кантор, Метод слабой аппроксимации, Красноярск, КрасГУ, 1999.

[2] Ю.Я.Белов, И.В.Фроленков, О задаче идентификации коэффициента при производной по времени в полулинейном параболическом уравнении, Совместный выпуск, часть I, *Вычислительные технологии*, **9**(2004), Вестник КазНУ, **42**(2004), №3, Алматы-Новосибирск, 281-288.

[3] Ю.Я.Белов, Е.Г.Саватеев, Об одной обратной задаче для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени, *ДАН СССР*, **334**(1991), №5, 800-804.

[4] Ю.Я.Белов, С.В.Полынцева, О задаче идентификации трех коэффициентов многомерного параболического уравнения, Совместный выпуск, часть I, *Вычислительные технологии*, **9**(2004), Вестник КазНУ, **42**(2004), №3, Алматы-Новосибирск, 273-280.

[5] Ю.Я.Белов, С.В.Полынцева, Об одной задаче идентификации двух коэффициентов многомерного параболического уравнения, *ДАН*, **396**(2004), №5, 583-586.

[6] С.В.Полынцева, Задачи идентификации трех и четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения, *Неклассические уравнения математической физики*, Труды международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения" , Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2007, 221-231.

[7] Yu.Ya.Belov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, Utrecht-Boston-Koln-Tokyo, VSP, 2002.

The Problem of Identification of Coefficients by the Derivatives with Respect to Time and a Spatial Variable

Svetlana V.Polyntseva

The unique solvability of the problem of identification of coefficients by the derivatives with respect to time and a spatial variable of the parabolic equation with Cauchy data and overdetermination conditions given on two various hyperplanes is proved in this work.

Keywords: problem of the identification of coefficients, inverse problem, equations in individual derivatives, method of weak approximation.