УДК 517+518.392

О порядке сходимости квадратурных формул на функциях из пространства потенциала Рисса

Мария И.Медведева*

Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет,
ул. Киренского 26, Красноярск, 660074,
Россия

Получена 15.03.2008, окончательный вариант 05.05.2008, принята 05.06.2008

В настоящей работе установлена неулучшаемая нижняя оценка погрешностей квадратурных формул с произвольными узлами и коэффициентами при интегрировании потенциалов Рисса.

Ключевые слова: квадратурные формулы, функционалы ошибок, последовательности функционалов, потенциал Рисса.

Исследования, связанные с установлением асимптотик сильной сходимости функционалов ошибок квадратурных формул в различных пространствах дробных производных, были начаты В.И.Половинкиным и его ученицей Н.А.Севастьяновой (см. [1]–[3]). Были оценены погрешности последовательностей функционалов ошибок с пограничным слоем, функционалов ошибок усложненных квадратурных формул, а также формул с регулярным пограничным слоем в пространствах, сопряженных к пространству функций, обладающих суммируемыми дробными производными Римана–Лиувилля (см. [4]); выделен главный член асимптотических выражений для усложненных квадратурных формул (в том числе и с пограничным слоем). Развитие данной тематики было продолжено в [5] для пространства функций, представимых в виде потенциала Рисса (см. [4]).

Целью настоящей работы является получение оценок погрешностей интегрирования преобразований Рисса через нормы оригиналов этого преобразования в пространствах $L_p(a,b)$. Также доказывается, что функционалы с пограничным слоем дают наилучший порядок сильной сходимости для функций, представимых потенциалом Рисса среди формул с произвольными узлами и коэффициентами. Доказательство основано как на методах из [1], [6], так и на проведенных здесь преобразованиях известных формул для оригинала преобразования Рисса.

Пусть a, b, p, q — действительные числа: $a < b$, $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha p > 1$; N — натуральное число.

Определим линейное пространство $L_p^\alpha(a,b)$ как пространство, состоящее из функций вида

$$f(x) = \int\limits_a^b |x-t|^{\alpha-1}\varphi_f(t)dt, \tag{1}$$

где функции $\varphi_f(x)$ принадлежат пространству $L_p(a,b)$. Интеграл (1) называется одномерным потенциалом Рисса (см. [4, с. 179]).

Будем рассматривать последовательности функционалов вида:

$$(l^N, f) = \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{N} c_k^N f(x_k^N), \tag{2}$$

*e-mail: mimedvedeva@rambler.ru

где c_k^N, x_k^N — коэффициенты и узлы квадратурной формулы соответственно, $x_k^N \in [a,b]$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$.

Основным результатом статьи является теорема 1. Прямым следствием ее и результата статьи [5] является теорема 2. Доказательство данных фактов приведено после формулировки необходимых для этого лемм 1–5.

Теорема 1. *Существует число $A > 0$ такое, что для любой последовательности функционалов вида* (2) *найдутся функции $\varphi_f(x) \in L_p(a,b)$, такие, что выполняется неравенство*

$$|(l^N, f)| > AN^{-\alpha}(b-a)^{1/q+\alpha}\|\varphi_f\|_{L_p(a,b)}.$$

Теорема 2. *Существует такое число $B > 0$ и последовательность функционалов вида* (2)*, что при всех $\varphi_f \in L_p(a,b)$ выполняется неравенство*

$$|(l^N, f)| < BN^{-\alpha}(b-a)^{1/q+\alpha}\|\varphi_f\|_{L_p(a,b)}.$$

Сравнивая эти теоремы, можно видеть, что наилучший порядок сильной сходимости квадратурных формул (2) относительно $\|\varphi_f\|_{L_p(a,b)}$ при $N \to \infty$ есть $O(N^{-\alpha})$. Отметим, что утверждению теоремы 2 удовлетворяют последовательности усложненных квадратурных формул, точные на константах, в том числе и экстраполяционные (например, формулы С. Л. Соболева). Свойства и алгоритмы построения экстраполяционных квадратурных формул подробно описаны, например, в [6].

Определение 1 (13.1 из [4])**.** *К классу $H^*(a,b)$ отнесем функции $f(x)$, для которых существуют числа λ, $0 < \lambda \leqslant 1$, и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что*

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\varepsilon_1}(b-x)^{1-\varepsilon_2}},$$

где $f^*(x) \in H^\lambda([a,b])$.

Обозначим

$$\begin{gathered} H_0^\lambda(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \{f : f(x) = (x-a)^{\varepsilon_1-1}(b-x)^{\varepsilon_2-1}\phi(x), \\ \phi(x) \in H^\lambda([a,b]),\, \phi(a) = \phi(b) = 0\}, \\ H_\alpha^* = \bigcup_{\alpha<\lambda\leqslant 1,\, \varepsilon_1>0,\, \varepsilon_2>0} H_0^\lambda(\varepsilon_1,\varepsilon_2). \end{gathered}$$

Следующее утверждение будет далее применяться в случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Однако приводим его формулировку и доказательство для произвольных $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, поскольку оно может представлять интерес как обобщение известных результатов из [4].

Лемма 1. *Если функция $f(x) \in H_\alpha^*(a,b)$, то соответствующая ей в формуле* (1) *функция $\varphi_f(x)$ может быть представлена в виде*

$$\varphi_f(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{2\pi}(1-\alpha)\left\{\int_a^b \frac{\operatorname{sgn}(x-t)f(t)}{(b-t)|x-t|^\alpha}\,dt - \int_a^b \frac{\operatorname{sgn}(x-t)f(t)}{(t-a)|x-t|^\alpha}\,dt\right\} + \\ + \frac{\sin\alpha\pi}{2\pi}(2-\alpha)\int_a^b \frac{f(t)}{(t-a)(b-t)|x-t|^{\alpha-1}}\,dt. \quad (3)$$

Доказательство. Здесь и далее ряд рассматриваемых интегралов являются несобственными. В некоторых случаях их сходимость следует из того, что один из множителей, входящих в подынтегральную функцию, равен нулю в особой точке и принадлежит классу Гёльдера с соответствующим показателем. Эти моменты оговариваться не будут.

Интегральное уравнение (1) относительно неизвестной функции $\varphi_f(x)$ называется уравнением Карлемана. Оно разрешимо в классе H^* при любой левой части $f(x) \in H_\alpha^*$, решение единственно и может быть записано в виде (см. [4, с. 456–457])

$$\varphi_f(x) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \frac{\operatorname{sgn}(x-t)f(t)}{|x-t|^\alpha}\,dt +$$
$$+\frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b [(t-a)(b-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}} f(t)\,dt \int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\frac{\alpha-1}{2}}}{(t-y)|x-y|^\alpha}\,dy -$$
$$-\frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b [(t-a)(b-t)]^{-\alpha/2} f(t)\,dt \int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2}}{(t-y)|x-y|^\alpha}\,dy. \qquad (4)$$

Используя равенство (см. [7, с. 530–531])

$$\int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\frac{\alpha-1}{2}}}{(t-y)|x-y|^\alpha}\,dy = -\frac{\pi\operatorname{sgn}(x-t)\operatorname{ctg}\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}{|x-t|^\alpha\,[(t-a)(b-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}}}, \qquad (5)$$

формулу обращения (4) перепишем следующим образом (сложив первые два слагаемые и приведя подобные):

$$\varphi_f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{4\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \frac{\operatorname{sgn}(x-t)f(t)}{|x-t|^\alpha}\,dt -$$
$$-\frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}} \int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2}}{(t-y)|x-y|^\alpha}\,dy = J_1 - J_2.$$

Для вычисления интеграла J_2 нам понадобятся равенства ([8, с. 306,(2.2.8.3), (2.2.8.4.)])

$$\int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}}{|x-y|^\alpha(t-y)}\,dy = \frac{\pi\operatorname{sgn}(x-t)\operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2}}{|x-t|^\alpha\,[(t-a)(b-t)]^{1-\alpha/2}}, \qquad (6)$$

$$\int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}\operatorname{sgn}(x-y)}{|x-y|^{\alpha-1}(t-y)}\,dy = -\frac{\pi\operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2}}{|x-t|^{\alpha-1}\,[(t-a)(b-t)]^{1-\alpha/2}}. \qquad (7)$$

Интеграл J_2 разобьем на части с помощью тождества

$$\frac{y-a}{t-a}\cdot\frac{b-y}{b-t} = \left(1-\frac{t-y}{t-a}\right)\cdot\left(1+\frac{t-y}{b-t}\right) = 1 + \frac{(t-y)(2t-a-b)}{(t-a)(b-t)} - \frac{(t-y)^2}{(t-a)(b-t)}.$$

Получим

$$J_2 = \frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2-1}}\int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}\,dy}{|x-y|^\alpha(t-y)} + \right.$$

$$+\int\limits_a^b \frac{(2t-a-b)f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}}\int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}}{|x-y|^\alpha}\,dy+$$

$$\left.+\int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}}\int\limits_a^b \frac{(y-t)\;[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}}{|x-y|^\alpha}\,dy\right) =$$

$$= J_{21}+J_{22}+J_{23}.$$

Выражение J_{21} преобразуем, используя формулу (6):

$$J_{21} = \frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2-1}}\int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}}{|x-y|^\alpha(t-y)}\,dy =$$

$$= \frac{\sin(\alpha\pi)}{4\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \frac{\operatorname{sgn}(x-t)f(t)}{|x-t|^\alpha}\,dt. \quad (8)$$

Далее нам понадобится равенство

$$\frac{y-t}{y-x} = 1 + \frac{x-t}{y-x}, \quad (9)$$

с помощью которого получим

$$J_{22} = \frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \frac{(2t-a-b)f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}}\int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}}{|x-y|^\alpha}\,dy =$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \frac{(2t-a-b)f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}\operatorname{sgn}(y-x)}{(y-t)|x-y|^{\alpha-1}}\,dy + (x-t)\int\limits_a^b \frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}}{(y-t)|x-y|^\alpha}\,dy\right\}.$$

Для подсчета правой части используем формулы (6) и (7):

$$J_{22} = -\frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \frac{(t-a-(b-t))f(t)}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}}\,dt\times$$

$$\times\left\{\frac{\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi/2)}{|x-t|^{\alpha-1}[(t-a)(b-t)]^{1-\alpha/2}} + \frac{\pi(x-t)\operatorname{sgn}(x-t)\operatorname{ctg}(\alpha\pi/2)}{|x-t|^\alpha[(t-a)(b-t)]^{1-\alpha/2}}\right\} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi}\frac{d}{dx}\left\{\int\limits_a^b \frac{f(t)}{(t-a)|x-t|^{\alpha-1}}\,dt - \int\limits_a^b \frac{f(t)}{(b-t)|x-t|^{\alpha-1}}\,dt\right\}. \quad (10)$$

В J_{23}, сделав предварительно преобразование (9), приходим к следующему:

$$J_{23}=\frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b\frac{f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}}\times$$
$$\times\left(\int\limits_a^b\frac{|x-y|^{1-\alpha}\operatorname{sgn}(y-x)\,dy}{[(y-a)(b-y)]^{1-\alpha/2}}+(x-t)\int\limits_a^b\frac{|x-y|^{-\alpha}\,dy}{[(y-a)(b-y)]^{1-\alpha/2}}\right). \quad (11)$$

Снова воспользуемся равенством (9) для каждого из интегралов в правой части формулы (11):

$$J_{23}=\frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^b\frac{f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}}\int\limits_a^b\frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}}{|x-y|^{\alpha-2}(y-t)}\,dy+\right.$$
$$+2\int\limits_a^b\frac{(x-t)f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}}\int\limits_a^b\frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}\operatorname{sgn}(y-x)}{|x-y|^{\alpha-1}(y-t)}\,dy+$$
$$\left.+\int\limits_a^b\frac{(x-t)^2f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}}\int\limits_a^b\frac{[(y-a)(b-y)]^{\alpha/2-1}}{|x-y|^{\alpha}(y-t)}\,dy\right).$$

Преобразуем слагаемые правой части этого равенства следующим образом: первое слагаемое дифференцируем по параметру x, а затем внутренний интеграл считаем, воспользовавшись (7), два других вычислим по формулам (7) и (6) соответственно и продифференцируем по параметру x. Можно проверить, что в упомянутых случаях оператор дифференцирования можно вносить за знаки соответствующих интегралов. В итоге получим

$$J_{23}=\frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}(2-\alpha)\int\limits_a^b\frac{f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}}\int\limits_a^b\frac{|x-y|^{1-\alpha}\operatorname{sgn}(x-y)\,dy}{[(y-a)(b-y)]^{1-\frac{\alpha}{2}}(y-t)}+$$
$$+\frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b\frac{(x-t)f(t)\,dt}{[(t-a)(b-t)]^{\alpha/2}}\times$$
$$\times\left(2\int\limits_a^b\frac{|x-y|^{1-\alpha}\operatorname{sgn}(y-x)\,dy}{[(y-a)(b-y)]^{1-\frac{\alpha}{2}}(y-t)}+(x-t)\int\limits_a^b\frac{|x-y|^{-\alpha}\,dy}{[(y-a)(b-y)]^{1-\frac{\alpha}{2}}(y-t)}\right)=$$
$$=\frac{\sin(\alpha\pi)}{4\pi}(2-\alpha)\int\limits_a^b\frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|x-t|^{\alpha-1}}-$$
$$-\frac{\sin(\alpha\pi)}{4\pi}\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^b\frac{2(x-t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|x-t|^{\alpha-1}}+\int\limits_a^b\frac{(x-t)^2\operatorname{sgn}(x-t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|x-t|^{\alpha}}\right)=$$
$$=-\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi}(2-\alpha)\int\limits_a^b\frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|x-t|^{\alpha-1}}. \quad (12)$$

Собирая оценки (8), (10) и (12), окончательно получим

$$J_2 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{4\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \frac{\operatorname{sgn}(x-t)f(t)}{|x-t|^{\alpha}}\,dt + $$
$$+\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi}\frac{d}{dx}\left\{\int\limits_a^b \frac{f(t)}{(t-a)|x-t|^{\alpha-1}}\,dt - \int\limits_a^b \frac{f(t)}{(b-t)|x-t|^{\alpha-1}}\,dt\right\} -$$
$$-\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi}(2-\alpha)\int\limits_a^b \frac{f(t)}{(t-a)(b-t)|x-t|^{\alpha-1}}\,dt.$$

И, значит, функция $\varphi_f(x)$ запишется в виде

$$\varphi_f(x) = J_1 - J_2 = -(J_{22}+J_{23}) =$$
$$= -\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi}\frac{d}{dx}\left\{\int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{(t-a)|x-t|^{\alpha-1}} - \int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{(b-t)|x-t|^{\alpha-1}}\right\} +$$
$$+\frac{\sin\alpha\pi}{2\pi}(2-\alpha)\int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|x-t|^{\alpha-1}} =$$
$$= \frac{\sin\alpha\pi}{2\pi}(1-\alpha)\left\{\int\limits_a^b \frac{f(t)\operatorname{sgn}(x-t)\,dt}{(b-t)|x-t|^{\alpha}} - \int\limits_a^b \frac{f(t)\operatorname{sgn}(x-t)\,dt}{(t-a)|x-t|^{\alpha}}\right\} +$$
$$+\frac{\sin\alpha\pi}{2\pi}(2-\alpha)\int\limits_a^b \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|x-t|^{\alpha-1}}. \qquad \square$$

Замечание. Выражение (3) проще равенства (4) и не содержит двойных интегралов. На него будет опираться дальнейшее доказательство теоремы 1, сходное с доказательством теоремы 4 из [1], но в отличие от теоремы 4, которое связано с равенством (4.13) статьи [1], наше доказательство связано с несколько более сложной формулой (3).

Положим $h = h(N) = (b-a)/(2N)$, $\Omega(N) = \bigcup_{i\in\mu(N)}(a+hi, a+hi+h)$, где $\mu(N)$ — совокупность целых чисел $i \in [0, 2N-1]$, таких что интервалы $(a+hi, a+hi+h)$ не содержат узлов $x_1^N, \ldots, x_N^N$ формулы (2).

Зададим функцию $g(x) \in H^{\lambda}$ на $[0,1]$ (т.е. принадлежащую классу гёльдеровских функций с показателем $\lambda > \alpha$), такую что $g(0) = g(1) = 0$ и

$$\int\limits_0^1 g(x)dx > 0.$$

Вне отрезка $[0,1]$ считаем $g(x)$ равной нулю. Положим

$$g_h(x) = \begin{cases} g\left(\frac{x-a}{h} - i\right), & i \in \mu(N),\ x \in (a+hi, a+hi+h), \\ 0, & x \in [a,b] \setminus \Omega(N). \end{cases} \tag{13}$$

Функция $g_h(x)$ на $[a,b]$ будет принадлежать пространству H^{λ}.

Рассмотрим функцию $\psi_h(x)$ при $x \in \mathbb{R}$, где

$$\psi_h(x) = \begin{cases} \psi(x-i), & i \in \mu(N), x \in (i, i+1), \\ 0, & i \notin \mu(N). \end{cases}$$

Функции $\psi(x) \in H^{\lambda}(\mathbb{R})$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$\int\limits_0^1 \psi(x)dx = 0, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0.$$

По построению $\psi_h(x) \in H^{\lambda}[0, 2N]$ и

$$|\psi_h(x)| < k_1, \tag{14}$$

также для данной функции можно записать неравенство (см. [1])

$$\left| \int\limits_{\eta}^{\xi} \psi_h(x)dx \right| < k_2, \tag{15}$$

где $-\infty < \eta < \xi < \infty$ и k_2 не зависит от η и ξ. Здесь и далее k с индексами будут обозначать положительные постоянные.

Лемма 2. *Пусть числа c, $d \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{R}$ такие, что c, d, $z \in [0, 2N]$, $c < d$,*

$$\mathcal{B}_{c,d}(z) = \int\limits_c^d \frac{\operatorname{sgn}(z-s)\psi_h(s)}{s|z-s|^{\alpha}}\, ds.$$

Тогда найдется постоянная k_3, не зависящая от z, такая что $|\mathcal{B}_{c,c+1}| < k_3$.

Доказательство. Если $c > 0$, то все функции $\psi_h(s)$, $(z-s)^{-\alpha}$, $(s-z)^{-\alpha}$ и $1/s$ — интегрируемы на $[c, c+1]$. Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $z \leqslant c$.

a) Если $c - z \geqslant 1$, то функция $(s-z)^{-\alpha}$ при фиксированном z — монотонно возрастающая на $[z+1, 2N]$. Поэтому к интегралу $\mathcal{B}_{c,c+1}(z)$ можно применить теорему Бонне (вторую теорему о среднем), из которой следует

$$\mathcal{B}_{c,c+1}(z) = -\frac{1}{(c+1-z)^{\alpha}} \int\limits_{\zeta}^{c+1} \frac{\psi_h(s)}{s}\, ds, \qquad \zeta \in [c, c+1].$$

По построению $\psi_h(0) = 0$ и для нее выполняется условие

$$|\psi_h(x_1) - \psi_h(x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2|^{\lambda}, \tag{16}$$

где $0 < \lambda < 1$, K — некоторая константа. Следовательно,

$$|\mathcal{B}_{c,c+1}(z)| \leqslant \frac{K}{(c+1-z)^{\alpha}} \int\limits_{\zeta}^{c+1} s^{\lambda-1}\, ds = k_4.$$

b) Если $c - z < 1$ (в частности, $c = z$), то функция $1/s$ на отрезке $[1, 2N]$ — монотонно убывающая. Тогда, вновь применяя теорему Бонне, получим

$$\mathcal{B}_{c,c+1}(z) = -\int\limits_c^{c+1} \frac{\psi_h(s)}{s(s-z)^{\alpha}}\, ds = -\frac{1}{c} \int\limits_c^{\xi} \frac{\psi_h(s)}{(s-z)^{\alpha}}\, ds, \qquad \xi \in [c, c+1].$$

Учитывая неравенство (14), имеем

$$|\mathcal{B}_{c,c+1}(z)| < \frac{k_1}{c}\left|\int\limits_c^{\xi}(s-z)^{-\alpha}\,ds\right| = k_5.$$

2) Пусть $c+1 \leqslant z$, $c>0$.

a) Если $z-(c+1)\geqslant 1$, то функция $(z-s)^{-\alpha}$ при фиксированном z на отрезке $[0,z-1]$ монотонно возрастающая, и, значит, применима теорема о среднем

$$\mathcal{B}_{c,c+1}(z) = \int\limits_c^{c+1}\frac{\psi_h(s)}{s(z-s)^{\alpha}}\,ds = \frac{1}{(z-c-1)^{\alpha}}\int\limits_{\zeta}^{c+1}\frac{\psi_h(s)}{s}\,ds,$$

$\zeta\in[c,c+1]$. Далее, используя свойство (16), оценим необходимый интеграл

$$|\mathcal{B}_{c,c+1}(z)| \leqslant \frac{K}{(z-c-1)^{\alpha}}\left|\int\limits_{\zeta}^{c+1}s^{\lambda-1}\,ds\right| = k_6.$$

b) Если $z-(c+1)<1$ $(z=c+1)$, функция $1/s$ — монотонно убывающая на рассматриваемом интервале (так как $c>0$, значит, $c\geqslant 1$), поэтому

$$|\mathcal{B}_{c,c+1}(z)| = \frac{1}{c}\left|\int\limits_c^{\xi}\frac{\psi_h(s)}{(z-s)^{\alpha}}\,ds\right| \leqslant \frac{k_1}{c}\left|\int\limits_c^{\xi}(z-s)^{-\alpha}\,ds\right| = k_7,$$

$\xi\in[c,c+1]$.

3) Пусть $c<z<c+1$, $c>0$. Тогда, вновь учитывая тот факт, что функция $1/s$ — монотонно убывающая, а также неравенство (16), получим требуемую оценку

$$|\mathcal{B}_{c,c+1}(z)| = \frac{1}{c}\left|\int\limits_c^{\xi}\frac{\psi_h(s)}{|z-s|^{\alpha}}\,ds\right| \leqslant \frac{k_1}{c}\left|\int\limits_c^{\xi}|z-s|^{-\alpha}\,ds\right| = k_8,$$

$\xi\in[c,c+1]$.

4) Пусть теперь $c=0$.

a) Если $0<z\leqslant 1$, то, представляя наш интеграл в виде суммы двух других $\mathcal{B}_{0,1} = \mathcal{B}_{0,z}+\mathcal{B}_{z,1}$, получим

$$|\mathcal{B}_{0,z}(z)| = \left|\int\limits_0^{z}\frac{\psi_h(s)-\psi_h(0)}{(s-0)(z-s)^{\alpha}}\,ds\right| \leqslant K\left|\int\limits_0^{z}s^{\lambda-1}(z-s)^{-\alpha}\,ds\right|.$$

Используя равенство (2.2.5.1) из [8]

$$\int\limits_a^b(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}\,dx = (b-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) \qquad (\alpha,\ \beta>0),$$

имеем

$$|\mathcal{B}_{0,z}(z)| \leqslant Kz^{\lambda-\alpha}B(\lambda,1-\alpha). \tag{17}$$

Для $\mathcal{B}_{z,1}$ из формулы (16) и монотонного убывания функции $1/s$ на интервале $(0,1]$ вытекает оценка

$$|\mathcal{B}_{z,1}(z)| = \frac{1}{z}\left|\int\limits_z^\xi \frac{\psi_h(s)}{(s-z)^\alpha}\,ds\right| \leqslant \frac{k_1}{z}\int\limits_z^\xi (s-z)^{-\alpha}\,ds = k_9 \quad (\xi \in [z,1]). \tag{18}$$

Из формул (17) и (18) следует, что

$$|\mathcal{B}_{0,1}(z)| < k_{10}.$$

b) Если же $1 < z$, то записав $\mathcal{B}_{0,1}$ в виде

$$\mathcal{B}_{0,1} = \mathcal{B}_{0,z} - \mathcal{B}_{1,z},$$

далее оцениваем как в предыдущем пункте 4a). □

Лемма 3. *Пусть числа c, $d \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{R}$ такие что c, d, $z \in [0,2N]$, $c < d$,*

$$\mathcal{F}_{c,d}(z) = \int\limits_c^d \frac{\operatorname{sgn}(z-s)\psi_h(s)}{(2N-s)|z-s|^\alpha}\,ds.$$

Тогда найдется постоянная k_{11}, не зависящая от z, такая, что $|\mathcal{F}_{c,c+1}| < k_{11}$.

Доказательство. Доказательство данного утверждения аналогично доказательству предыдущего утверждения. □

Лемма 4. *Пусть числа $\beta > 0$, c, $d \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{R}$ такие, что c, d, $z \in [0,2N]$, $c < d$,*

$$\mathcal{D}_{c,d}(z) = \int\limits_c^d \frac{|z-s|^\beta \psi_h(s)ds}{s(2N-s)}.$$

Тогда найдется постоянная k_{12}, такая что $|\mathcal{D}_{c,c+1}| < k_{12}$.

Доказательство. Вновь рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $c \neq 0$ и $c+1 \neq 2N$. Функция $1/s$ — убывающая на отрезке $[1,2N]$, функция $1/(2N-s)$ — возрастающая на $[0,2N-1]$ и, следовательно, возможны три варианта:

a) $z \leqslant c$. В этом случае функция $(s-z)^\beta$ при фиксированном z есть функция возрастающая на $[z,2N]$. Поэтому, последовательно используя теорему Бонне два раза, а также учитывая формулу (15), приходим к следующему:

$$|\mathcal{D}_{c,c+1}(z)| \quad = \quad \frac{(c+1-z)^\beta}{2N-c-1}\left|\int\limits_\zeta^{c+1} \frac{\psi_h(s)}{s}\,ds\right| \quad = \quad \frac{(c+1-z)^\beta}{c(2N-c-1)}\left|\int\limits_\zeta^\xi \psi_h(s)ds\right| \quad = \quad k_{13}.$$

b) $z \geqslant c+1$. Функция $(z-s)^\beta$ убывает на $[0,z]$:

$$|\mathcal{D}_{c,c+1}(z)| \quad = \quad \frac{(z-c)^\beta}{c}\left|\int\limits_\zeta^{c+1} \frac{\psi_h(s)}{2N-s}\,ds\right| \quad = \quad \frac{(z-c)^\beta}{c(2N-c-1}\left|\int\limits_\zeta^\xi \psi_h(s)\,ds\right| \quad = \quad k_{14},$$

где $\zeta \in [c, c+1]$, $\xi \in [\zeta, c+1]$.

c) $c < z < c+1$. Представим $\mathcal{D}_{c,c+1}$ в виде суммы двух слагаемых $\mathcal{D}_{c,c+1} = \mathcal{D}_{c,z} + \mathcal{D}_{z,c+1}$, первое из которых оценивается аналогично случаю $c+1 \leqslant z$, а второе слагаемое — как в случае $z \leqslant c$. В итоге получим соотношение $\mathcal{D}_{c,c+1} < k_{15}$.

2) Пусть $c = 0$.

a) При $0 \leqslant z \leqslant 1$ разобьем $\mathcal{D}_{0,1}$ на два других интеграла $\mathcal{D}_{0,z}$ и $\mathcal{D}_{z,1}$. Так как

$$\max_{[0,z]} \frac{1}{2N - s} = \frac{1}{2N - z}, \quad \max_{[z,1]} \frac{1}{2N - s} = \frac{1}{2N - 1},$$
$$\max_{[z,1]} |z - s|^{\beta} = (1 - z)^{\beta}, \quad \max_{[z,1]} \frac{1}{s} = \frac{1}{z},$$

то, применяя формулы (15) и (16), имеем

$$|\mathcal{D}_{0,z}(z)| < \frac{1}{2N - z} \int\limits_0^z (z - s)^{\beta} s^{\lambda - 1}\, ds = \frac{z^{\beta + \lambda}}{2N - z} B(1 + \beta, \lambda),$$
$$|\mathcal{D}_{z,1}(z)| < \frac{(1 - z)^{\beta}}{z(2N - 1)} \left| \int\limits_z^1 \psi_h(s)\, ds \right| < k_{16}.$$

Отсюда получаем, что $|\mathcal{D}_{0,1}(z)| < k_{17}$.

b) Если $1 < z$, то при фиксированном z и $s \in [0, z]$ функция $(z - s)^{\beta}$ непрерывна, неотрицательна и монотонно убывает, функция $1/(2N - s)$ монотонно возрастает, а $\psi_h(0)$ по условию равна нулю. Поэтому, учитывая свойство (16), далее имеем

$$|\mathcal{D}_{0,1}(z)| = \left| \int\limits_0^1 \frac{\psi_h(s)(z - s)^{\beta}}{s(2N - s)}\, ds \right| < k_{18} \int\limits_0^1 \left| \frac{\psi_h(s) - \psi_h(0)}{s - 0} \right| ds \leqslant k_{19} \int\limits_0^1 |s|^{\lambda - 1} ds \leqslant k_{20}.$$

В случае $c + 1 = 2N$ утверждение леммы устанавливается аналогично случаю $c = 0$. $\square$

Лемма 5. *Пусть функция $g_h(x)$ определена формулой* (13)*. Тогда существуют функции $\varphi_g(x)$, такие что*

$$g_h(x) = \int\limits_a^b |x - t|^{\alpha - 1} \varphi_g(t)\, dt,$$

для которых выполняется неравенство

$$\|\varphi_g\|_{L_p(a,b)} \leqslant k_{21} h^{-\alpha} (b - a)^{1/p} \tag{19}$$

при $h \to 0$.

Доказательство. По условию $g_h(x) \in H^{\lambda}[a, b]$, $g_h(a) = g_h(b) = 0$. Поэтому данная функция будет принадлежать и классу $H^*_{\alpha}(a, b)$ (при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$). Значит, для нее верна формула обращения (3) с $f(x) = g_h(x)$, т.е.

$$\varphi_g(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{2\pi} (1 - \alpha) \left\{ \int\limits_a^b \frac{\operatorname{sgn}(x - t) g_h(t)}{(b - t)|x - t|^{\alpha}}\, dt - \int\limits_a^b \frac{\operatorname{sgn}(x - t) g_h(t)}{(t - a)|x - t|^{\alpha}}\, dt \right\} +$$

$$+\frac{\sin\alpha\pi}{2\pi}\int\limits_a^b \frac{g_h(t)}{(t-a)(b-t)|x-t|^{\alpha-1}}\,dt=$$
$$=\frac{\sin\alpha\pi}{2\pi}(1-\alpha)\ \{\varphi_{g,1}(x)+\varphi_{g,2}(x)\}+\frac{\sin\alpha\pi}{2\pi}\,\varphi_{g,3}(x). \quad (20)$$

Оценим каждое слагаемое, стоящее в правой части (20):

$$\varphi_{g,\,1}(x)=\int\limits_a^b \frac{\operatorname{sgn}(x-t)g_h(t)}{(b-t)|x-t|^{\alpha}}\,dt=\sum_{i\in\mu(N)}\int\limits_{a+ih}^{a+ih+h} g\left(\frac{t-a}{h}-i\right)\frac{\operatorname{sgn}(x-t)}{(b-t)|x-t|^{\alpha}}\,dt=$$
$$=h\sum_{i\in\mu(N)}\int\limits_i^{i+1}\frac{g(z-i)\operatorname{sgn}(x-hz-a)}{(b-hz-a)|x-hz-a|^{\alpha}}\,dz=h^{-\alpha}\sum_{i\in\mu(N)}\int\limits_i^{i+1}\frac{g(z-i)\operatorname{sgn}((x-a)/h-z)}{\left(\frac{b-a}{h}-z\right)\left|\frac{x-a}{h}-z\right|^{\alpha}}\,dz.$$

Полагая в лемме 3 $\psi_h=g$, получим

$$|\varphi_{g,\,1}(x)|<k_{22}h^{-\alpha}.$$

Выражение $\varphi_{g,\,2}(x)$ оценивается аналогично тому, как это было сделано для $\varphi_{g,\,1}(x)$. В этом случае необходимо применить лемму 2 с $\psi_h=g$, т.е. будет выполняться соотношение

$$|\varphi_{g,\,2}(x)|<k_{23}h^{-\alpha}.$$

Последнее слагаемое в формуле (20) перепишем в виде

$$\varphi_{g,\,3}(x)=\int\limits_a^b \frac{g_h(t)|x-t|^{1-\alpha}}{(t-a)(b-t)}\,dt=\sum_{i\in\mu(N)}\int\limits_{a+ih}^{a+ih+h} g\left(\frac{t-a}{h}-i\right)\frac{|x-t|^{1-\alpha}}{(t-a)(b-t)}\,dt=$$
$$=h\sum_{i\in\mu(N)}\int\limits_i^{i+1}\frac{g(z-i)|x-hz-a|^{1-\alpha}}{hz(b-a-hz)}\,dz=h^{-\alpha}\sum_{i\in\mu(N)}\int\limits_i^{i+1}\left|\frac{x-a}{h}-z\right|^{1-\alpha}\frac{g(z-i)}{z(2N-z)}\,dz.$$

Применяя лемму 4 с $\psi_h=g$, имеем

$$|\varphi_{g,\,3}(x)|<k_{24}h^{-\alpha}.$$

И, значит,

$$\|\varphi_g\|_{L_p(a,b)}\leqslant k_{25}\|\varphi_{g,\,1}+\varphi_{g,\,2}\|_{L_p(a,b)}+k_{26}\|\varphi_{g,\,3}\|_{L_p(a,b)}\leqslant k_{27}h^{-\alpha}(b-a)^{1/p}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $g_h(x)$ — функция из леммы 5. Так как $g_h(x_k^N)=0$ $(1\leqslant k\leqslant N)$, получим

$$(l^N,g_h)=\int\limits_a^b g_h(x)\,dx=\int\limits_{\Omega(N)} g_h(x)\,dx=\sum_{i\in\mu(N)}\int\limits_{a+ih}^{a+ih+h} g\left(\frac{x-a}{h}-i\right)dx=$$
$$=\operatorname{mes}\Omega(N)\int\limits_0^1 g(x)dx\geqslant\frac{(b-a)}{2}\int\limits_0^1 g(x)dx>0. \quad (21)$$

Сравнивая формулы (19) и (21), находим

$$(l^N, g_h) > k_{28}(b-a)^{1/q} h^\alpha \|\varphi_g\|_{L_p(a,b)} > k_{29} N^{-\alpha} (b-a)^{1/q+\alpha} \|\varphi_g\|_{L_p(a,b)}.$$

Отсюда следует теорема 1. □

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00326).

Список литературы

[1] В.И.Половинкин, Последовательности функционалов с пограничным слоем в пространствах одномерных функций, обладающих дробными производными Римана—Лиувилля, *Математические труды*, **5**(2002), №2, 178-202.

[2] Н.А.Севастьянова, Последовательности функционалов с пограничным слоем для функций, имеющих дробные производные, *Кубатурные формулы и их приложения,* Уфа, ИМВЦ УфНЦ РАН, 1996, 90-104.

[3] Н.А.Севастьянова, Последовательности функционалов с пограничным слоем в пространствах функций с дробными производными, *Вопросы математического анализа,* Красноярск, ИПЦ КГТУ, 1997, Вып. 2, 106-119.

[4] Л.Б.Самко, А.А.Килбас, О.И.Маричев, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения, Минск, Наука и техника, 1987.

[5] М.И.Медведева, Асимптотика норм функционалов ошибок с пограничным слоем для потенциалов Рисса, *Вопросы математического анализа,* Красноярск, ИПЦ КГТУ, 2004, Вып. 8, 85-98.

[6] В.И. Половинкин Квадратурные формулы в пространствах функций, Красноярск, СФУ, 2007.

[7] Ф.Д.Гахов, Краевые задачи, М., Наука, 1977.

[8] А.П.Прудников, Ю.А. Брычков, О.И.Маричев, Интегралы и ряды, М., Наука, 1981.

On the Order of Convergence of Quadrature Formulae on Functions in the Spaces of Riesz Potential

Mariya I.Medvedeva

We establish an unimprovable lower estimate for the errors of quadrature formulae with no restrictions on nodes and coefficients with integrating the Riesz potentials.

Keywords: quadrature formulas, error functionals, sequences of functionals, Riesz potential.