УДК 511.512

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ОБОБЩЕННЫЕ КВАТЕРНИОНЫ С НОРМОЙ 1

Литаврин А.В.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Левчук В. М.
Сибирский федеральный университет,
Институт математики

Работа посвящается изучению диофантовых уравнений, описывающих обобщенные кватернионы с нормой 1. Основной результат работы сформулирован в виде теоремы 1. Пусть p − простое число и Z[1/p]- расширение в Q кольца Z целых чисел с помощью элемента 1/p. В [1] приводится матричное представление алгебры обобщенных кватернионов H(n,m) над полем Q рациональных чисел, где n,m -- целые числа. В мультипликативной групппе обратимых элементов алгебры H(n,m) выделим подгруппу G(n,m,p) матриц над Z[1/p] с определителем 1.
В связи с конгруэнц − проблемой Й. Меннике - И. Ихара для линейной группы G(n,m,p) ([2, вопрос 5.33]) возникает интерес к решению диофантова уравнения от четырех неизвестных

$$x^2 - ny^2 - mz^2 + nmu^2 = 1 \qquad (1)$$

в кольце Z[1/p]. Решение уравнения (1) можно свести к решению диофантова уравнения

$$x^2 - Ay^2 - Bz^2 + ABu^2 = K \quad (A, B, C, K \in Z, \sqrt{A} - \text{иррационально}, A > 0) \qquad (2)$$

в кольце Z. Для решения уравнения (2) нам потребуется рассмотреть обобщенное уравнение Пелля:

$$x^2 - ny^2 = c, \qquad (3)$$

где n - натуральное число, не являющееся квадратом; c – целое число.

Уравнение (3) достаточно изучено. Все необходимые свойства уравнения (3), мы сформулируем в виде леммы 1. Если a − наименьшее натуральное число, для которого существует натуральное число b такое, что $a^2 - nb^2 = 1$, то число $q = a + \sqrt{n}b$ называется основной единицей числа n. Положим, что

$$M_{n,c} \coloneqq \{x + \sqrt{n}y \in Z + \sqrt{n}Z \mid x^2 - ny^2 = c, 1 < x + \sqrt{n}y \le q\},$$

и сформулируем лемму 1.

Лемма 1. Пусть n − натуральное число не являющееся квадратом, c − целое число не равное нулю. Тогда верны следующие утверждения.
1. Множество $M_{n,c}$ - конечно.
2. Уравнение $x^2 - ny^2 = c$ разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда $M_{n,c}$ - не пустое множество.
3. Всякое решение уравнения $x^2 - ny^2 = c$ в целых числах можно записать в виде $x + \sqrt{n}y = \pm wq^s$, где w из $M_{n,c}$, q – основная единица числа n и s – некоторое целое число.

Теорема 1. Пусть A,B,K - параметры, введенные выше, q - основная единица числа A , S - множество решений уравнения (2), $M_{n,c}$ - множества, введенные выше и

$$D \coloneqq \{(x + \sqrt{n}y, z + \sqrt{n}u) \mid (x, y, z, u) \in S\}, \qquad F_1 \coloneqq \{x^2 - ny^2 \mid x, y \in Z\}$$

$$F_2 := \{\frac{x^2 - Ay^2 - K}{B} | x, y \in Z, B | (x^2 - Ay^2 - K)\}.$$

Тогда для любого $(x + \sqrt{n}y, z + \sqrt{n}u) \in D$ существует $\boldsymbol{t} \in F_1 \cap F_2$ такое, что при любых $s, k \in Z$ и при любых $w_1 \in M_{A,1+Bt}, w_2 \in M_{A,t}$ имеют место равенства:

$$x + \sqrt{n}y = q^s w_1, \qquad z + \sqrt{n}u = q^k w_2.$$

Список использованных источников

[1] Ван дер Варден, Б.Л. Алгебра/Б.Л. ван дер Варден. − М.: Наука, 1979.

[2] Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп)/под.ред. В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро 5 изд. − Новосибирск: ИМ СО РАН, 1976 год.