УДК 511.17

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ ИЗ АЛИКВОТНЫХ ДРОБЕЙ

Биндиман А.П., Тарасов Д.А.

научный руководитель д-р физ.-мат. наук Осипов Н.Н.

МБОУ СОШ №10 г. Красноярска

ВВЕДЕНИЕ

На XXIX Международном Турнире Городов (2007/2008 уч. год, осенний тур) ученикам старших классов была предложена следующая

Задача. *Найти все конечные непостоянные арифметические прогрессии, сумма которых равна единице и каждый член имеет вид* k^{-1}*, где* k *– натуральное число.*

Дроби вида k^{-1}, где k – натуральное число, принято называть *египетскими* (другой, более распространённый термин – *аликвотные*). Такие дроби широко употреблялись в Древнем Египте, где других дробей, за небольшим исключением, просто не знали. Как известно, любое рациональное число можно представить в виде суммы нескольких различных аликвотных дробей. Алгоритмы отыскания такого представления в своё время предложили *Фибоначчи* (1180 – 1240) и *М.В. Остроградский* (1801 – 1862).

Целью настоящей работы является решение следующей основной задачи: *найти все конечные непостоянные арифметические прогрессии из аликвотных дробей, сумма которых не менее заданного* $\varepsilon > 0$. Более точно, мы хотим получить алгоритм, при помощи которого можно было бы перечислить все такие прогрессии.

Будем считать далее $\varepsilon = N^{-1}$, где N – заданное натуральное число. В первой части работы решается более простая задача: *найти все конечные непостоянные арифметические прогрессии из аликвотных дробей, имеющие заданную сумму* N^{-1}. Пусть $n \geq 2$ обозначает число членов искомых прогрессий. Мы доказываем оценку $n = O(N^2)$, в результате чего получаем алгоритм решения задачи, сложность которого $O(N^4)$. Отметим, что слишком эффективного алгоритма здесь ожидать не приходится, поскольку уже частный случай двучленных прогрессий эквивалентен вычислительно сложной задаче об отыскании всех решений (k_1, k_2) в натуральных числах уравнения

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{N}.$$

Вторая часть работы посвящена решению основной задачи. Случай двучленных прогрессий не особенно интересен, поэтому считаем $n \geq 3$. Благодаря новой идее нам удалось улучшить оценку для n и доказать, что $n = O(\log N)$. Это является основным теоретическим результатом работы. На основе этого результата мы получили алгоритм решения основной задачи со сложностью $O(N^2 \log N)$.

1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ ИЗ АЛИКВОТНЫХ ДРОБЕЙ С СУММОЙ $S = N^{-1}$

Рассмотрим случай чётного $N = 2b$ (случай нечётного N рассматривается аналогично). Пусть $\{k_i^{-1}\}$ – убывающая n-членная арифметическая прогрессия и

$$\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n} = \frac{1}{2b}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_n} = \frac{1}{bn}, \tag{1}$$

откуда следует, что $k_1 = bn + 1 + c$ для некоторого целого неотрицательного c. Можно показать, что справедливо неравенство $k_n \ge k_1 + n(n-1)/2$ (это – ключевая идея; доказательство неравенства см. в полной версии работы), так что

$$k_n \ge bn + 1 + c + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Вместе с равенством (1) это позволяет получить оценку $c \le 2b^2 - 1$. В свою очередь, из этой оценки вытекает оценка для числа членов прогрессии: $n \le 2b^2 + b$ (подробный вывод этих оценок см. в полной версии работы). Перебирая теперь все пары (c, n) в указанных границах, мы находим все искомые прогрессии. Поскольку $c = O(N^2)$ и $n = O(N^2)$, сложность такого алгоритма составит $O(N^4)$.

Этот алгоритм был реализован в системе компьютерной алгебры MAPLE. Эксперименты с программой показали, что время её работы действительно растёт пропорционально N^4, т.е. при увеличении N в 2 раза время выполнения возрастает примерно в 16 раз.

2. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ ИЗ АЛИКВОТНЫХ ДРОБЕЙ С СУММОЙ $S \ge N^{-1}$

Назовём прогрессию $\{k_i^{-1}\}$ *невыносимой*, если все знаменатели k_i взаимно просты в совокупности. Очевидно, достаточно найти все невыносимые прогрессии $\{k_i^{-1}\}$ с суммой

$$S = \frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n} \ge \frac{1}{N}.$$

Перейдём к прогрессии $\{a_i\}$, где

$$a_i = \frac{НОК(k_1,\ldots,k_n)}{k_i} = a + (i-1)h,$$

при этом $НОД(a,h) = 1$. Имеем

$$S = НОК(a_1,\ldots,a_n)^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(2a+(n-1)h)}{2НОК(a,a+h,\ldots,a+(n-1)h)} \ge \frac{1}{N}.$$

Таким образом, задача сводится к оценке снизу величины

$$M_n(a,h) = НОК(a,a+h,\ldots,a+(n-1)h).$$

Это и есть та новая идея, о которой шла речь во введении.

Как оказалось, вопрос об оценке величины $M_n(a,h)$ достаточно хорошо изучен (см., например, работы [1], [2]). Далее мы будем опираться на оценку

$$M_n(a,h) \ge a(h+1)^{n-1} \tag{2}$$

из работы [2]. В качестве иллюстрации методов её получения докажем эту оценку в частном случае, когда $h = 1$.

Величину $M_n(a,1)$ можно оценить следующим образом:

$$M_n(a,1) \ge \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{(n-1)!} = C_{a+n-1}^{n-1}.$$

Действительно, имеем

$$\frac{1}{C_{a+n-1}^{n-1}} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{c_0}{a} + \frac{c_1}{a+1} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{a+n-1} = \frac{L}{M_n(a,1)},$$

где L – некоторое целое число. Отсюда следует, что $M_n(a,1)$ делится на C_{a+n-1}^{n-1}, а значит, не меньше, чем C_{a+n-1}^{n-1}. Теперь уже сравнительно нетрудно получить искомую оценку

$$M_n(a,1) \ge 2^{n-1}a.$$

В общем случае доказательство оценки (2) технически сложнее и требует больших усилий (в полной версии работы мы приводим, следуя [2], подробное доказательство этой оценки). Используя оценку (2), мы приходим к следующему неравенству:

$$\frac{1}{N} \le \frac{n(2a+(n-1)h)}{2a(h+1)^{n-1}} \tag{3}$$

для определения параметров n, h и a (именно в таком порядке мы их будем оценивать).

Из неравенства (3) следуют оценки

$$\frac{1}{N} \le \frac{n^2}{2(h+1)^{n-2}} \le \frac{n^2}{2^{n-1}}.$$

Отсюда находим $n = O(\log N)$. Теперь, используя неравенство

$$M_n(a,h) \geq \frac{a(a+h)\ldots(a+(n-1)h)}{(n-1)!}$$

(доказательство этого неравенства см. в работе [2]), можно оценить параметры h и a. В итоге приходим к окончательной оценке сложности алгоритма в виде $O(N^2 \log N)$.

Этот алгоритм также был реализован в системе компьютерной алгебры MAPLE. Так, например, при $N = 10$ получаем следующий список искомых прогрессий:

$$1 = \{\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\}, \frac{5}{6} = \{\left[\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]\}, \frac{3}{4} = \{\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]\}, \frac{3}{5} = \{\left[\frac{1}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right]\},$$
$$\frac{3}{7} = \{\left[\frac{1}{28}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}\right]\}, \frac{3}{8} = \{\left[\frac{1}{20}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}\right]\}, \frac{7}{20} = \{\left[\frac{1}{60}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}\right]\},$$
$$\frac{1}{3} = \{\left[\frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}\right], \left[\frac{1}{45}, \frac{1}{9}, \frac{1}{5}\right]\}, \frac{3}{10} = \{\left[\frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}\right]\},$$
$$\frac{3}{11} = \{\left[\frac{1}{66}, \frac{1}{11}, \frac{1}{6}\right]\}, \frac{1}{4} = \{\left[\frac{1}{60}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}\right], \left[\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}\right], \left[\frac{1}{42}, \frac{1}{12}, \frac{1}{7}\right]\},$$
$$\frac{7}{30} = \{\left[\frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}\right]\}, \frac{3}{13} = \{\left[\frac{1}{91}, \frac{1}{13}, \frac{1}{7}\right]\}, \frac{1}{5} = \{\left[\frac{1}{120}, \frac{1}{15}, \frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}\right]\},$$
$$\frac{3}{16} = \{\left[\frac{1}{72}, \frac{1}{16}, \frac{1}{9}\right]\}, \frac{3}{17} = \{\left[\frac{1}{153}, \frac{1}{17}, \frac{1}{9}\right]\}, \frac{11}{70} = \{\left[\frac{1}{140}, \frac{1}{35}, \frac{1}{20}, \frac{1}{14}\right]\},$$
$$\frac{16}{105} = \{\left[\frac{1}{105}, \frac{1}{35}, \frac{1}{21}, \frac{1}{15}\right]\}, \frac{3}{20} = \{\left[\frac{1}{35}, \frac{1}{20}, \frac{1}{14}\right]\}, \frac{1}{7} = \{\left[\frac{1}{35}, \frac{1}{21}, \frac{1}{15}\right]\},$$
$$\frac{1}{8} = \{\left[\frac{1}{28}, \frac{1}{24}, \frac{1}{21}\right]\}, \frac{3}{28} = \{\left[\frac{1}{63}, \frac{1}{28}, \frac{1}{18}\right]\}$$