Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

На правах рукописи

Башмаков Степан Игоревич

ВРЕМЕННЫЕ МНОГОАГЕНТНЫЕ ЛОГИКИ И ПРОБЛЕМА УНИФИКАЦИИ

АННОТАЦИЯ
научно-квалификационной работы (диссертации)

по направлению: 01.06.01 – математика и механика
специальности: 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор — Рыбаков Владимир Владимирович

Красноярск – 2018

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В работе исследуется ряд модальных логик знания и времени. Такие логики являются одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений исследования многомодальных систем, расположенным на стыке математической логики и информатики. Особое внимание исследователей в данной теории, как и в целом в нестандартных логиках, привлекает вопрос унификации формул. Решению унификационных проблем в исследуемых логиках и посвящена данная работа.

Образование теории модального исчисления можно датировать работами К. Льюиса 1918-1920 гг. Кратко *модальные логики* можно охарактеризовать, как логики, язык которых помимо стандартных логических связок, включает символы *модальных операторов*, имеющие различную интерпретацию в зависимости от выбранной логической системы. Стандартными модальными операторами являются «необходимо, что» $\Box$ и «возможно, что» $\Diamond$. Временные логики являются особым типом модальных, предусматривающим качественное описание и рассуждение об изменении истинности определенного утверждения с течением времени, используя множество временных операторов. Стандартными временными операторами являются «иногда», означающий истинность утверждения в какой-то доступный момент в будущем, и «всегда», гарантирующий истинность в любой доступный в будущем момент.

Первым исследование временных логик как модальных систем предложил в 1950-е А. Прайор, за последующие полвека данная область стала сложной технической дисциплиной. Значительные приложения в Computer Science имеет линейная временная логика $\mathcal{LTL}$ [15].Как и в ее случае, в большинстве исследований распространена идея модального времени как транзитивной процедуры, при котором любое временное состояние доступно из текущего. Однако, также существует концепция нетранзитивного времени, основывающаяся на том, что переход знаний из прошлого в будущее не всегда проходит гладко [21].

Другим примером многомодальных логик являются логики Знания: дополненные модальностями K_i, представляющими знания элементов, интерпретируемых как *агенты*, предназначенными для моделирования эффектов и свойств знаний агентов в изменяющейся среде. Основополагающей работой в этой области является книга Я. Хинтикка [11], в которой предложено использование модальностей для описания семантики знания. Значительные приложения таких систем найдены в социологии, биологии и медицине, юриспруденции и, конечно, информатике. В ряде работ В. В. Рыбаковым рассматривалась концепция $Chance\ Discovery$ в многоагентной среде, исследовалась логика моделирующая неопределенность. В 1990-е активное развитие получила концепция $Common\ Knowledge$ [8], в которой в качестве базового принято знание агентов, представленное как $\mathcal{S}5$-подобная модальность. В данной диссертации рассматриваются временные логики, а также временные многоагентные логики, сочетающие одновременно операторы времени и знания. Подобные системы активно исследуются в последние десятилетия [1; 21].

В основе используемых в работе методов и подходов лежит *реляционная семантика* Крипке – наиболее известная и (наряду с алгебраической) самая изученная модальная семантика. Идеи потока времени, переходов между вычислительными состояниями, сетей возможных миров могут быть представлены в виде простых графических структур. При этом, модальная логика предоставляет интересный инструментарий для работы с этими структурами и выражения их внутренней информации. Такими объекты называются *фреймами* (*шкалами*) Крипке и являются множествами с наборами отношений, используемыми для интерпретации символов.

Теория унификации является важным приложением логики в информатике, на котором, в частности, основываются многие методы автоматической дедукции и баз данных [2]. С момента своего формирования в области Computer Science, унификационная проблема состояла в ответе на вопрос: возможна ли трансформации двух термов в один синтаксически эквивалентный заменой переменных другими термами [17]? Понятия «унификация» и «наиболее общий унификатор» были предложены в 1970 г. [14] в качестве инструментов тестирования Term Rewriting Systems для локального слияния путем вычисления критических пар. В настоящее время теория унификации играет важную роль во многих областях информатики и математики.

В языке логики $\mathcal{L}$ рассматривается формула A, *унификатором* для которой в $\mathcal{L}$ называется подстановка σ такая, что $\Vdash_{\mathcal{L}} \sigma(A)$. Формула A называется *унифицируемой*, если такой унификатор σ существует, а проблема унификации рассматривается в виде возможности формулы стать теоремой после замены переменных.

Классическое пропозициональное исчисление обладает лучшим типом – унитарной унификацией [16]. Существуют ли другие логические исчисления с тем же свойством? Отрицательный ответ был дан для всех модальных логик, обладающих дизъюнктивным свойством [12]: формула $\Box x \vee \Box \neg x$ унифицируема в соответствующей логике $\mathcal{L}$ и имеет унификаторы

$$\sigma_1 : x \mapsto \top, \qquad \sigma_2 : x \mapsto \bot$$

и не существует более общего унификатора для них обоих. Однако, С. Гиларди показал, что многие известные системы, например, $\mathcal{K}4, \mathcal{S}4, \mathcal{S}4\mathcal{G}rz, \mathcal{GL}$, $\mathcal{I}nt$, обладают финитарным типом, т.е. существует конечно много лучших (*максимальных*) унификаторов для любой унифицируемой формулы.

В. В. Рыбаковым унификационная проблема решалась для модальных $\mathcal{S}4$, $\mathcal{G}rz$ и интуиционистской логик, предложен подход к определению всех неунифицируемых формул в широком классе модальных логик: для расширений $\mathcal{S}4$ и $[\mathcal{K}4 + (\Box\bot \equiv \bot)]$ [18]. Совместно с С. П. Одинцовым, исследовалась проблема унификации в паранепротиворечивых логиках Нельсона $\mathcal{N}4$ и минимальной Йоханссона $\mathcal{J}$.

В конце 1990-х С. Гиларди предложил новый подход к исследованию унификации через приложение идей проективных алгебр и техники, основанной на проективных формулах [9], позволивший решить задачу построения полных наборов унификаторов с использованием эффективных алгоритмов для целого ряда логик [9; 10]. Основываясь на данном подходе, В. Джик и П. Войтыляк установили проективную унификацию в расширениях $\mathcal{S}4.3$ [7]. В. В. Рыбаков исследовал $\mathcal{LTL}$ с оператором $Until$, для которой установил проективность унификации [20]. Из проективности унификации в логике следует существование mgu, но не наоборот. К примеру, доказано существование mgu для каждой унифицируемой формулы в $\mathcal{LTL}$ с операторами $Next$, $Until$, и построен пример унифицируемой, но не проективной формулы [4].

Важным следствием существования вычислимых полных наборов унификаторов стало решение проблемы допустимости, что значительно увеличило важность подхода к унификации через проективные формулы. Унификационная проблема редуцируема к проблеме допустимости [19]: унифицируема ли формула φ в логике $\mathcal{L}$, если правило вывода $\varphi/\bot$ не допустимо в $\mathcal{L}$? В некоторых случаях, при финитарном типе унификации, проблема допустимости также сводима к проблеме унификации [3].

Позднее было установлено еще одно следствие проективной унификации в логике – *почти структурная полнота* [6]: каждое допустимое не пассивное правило выводимо в логике.

Широкую применимость демонстрирует подход, основанный на построении *граунд унификатора* (полученного подстановкой констант вместо всех переменных): как в качестве доказательства унифицируемости произвольной формулы, так и при построении проективных унификаторов [5; 20]. Последнее, однако, не всегда возможно: было показано, что не для каждой формулы в $\mathcal{I}nt$ [9] и $\mathcal{S}4.3$ [7] граунд унификатор дает построение проективного. Не смотря на это, использование граунд унификатора целесообразно: даже если логика имеет нульарный (=0) тип, его построение остается возможным.

Одновременно с интенсивными исследованиями унификации в транзитивных логиках, малоизучены нетранзитивные случаи, где проблемы обретают гораздо большую сложность, а многие методы оказываются неприменимыми или требуют значительной модификации. Э. Ерабеком доказан нульарный тип унификации в минимальной нормальной логике $\mathcal{K}$ [13], а В. Джиком унитарный для $Ext(\mathcal{S}5)$ [5]. Ф. Вольтером и М. Захарьящевым доказана неразрешимость унификации над $\mathcal{K}$ с универсальной модальностью.

Целью настоящей работы является решение проблем унификации в ряде временных и многоагентных модальных логик, сформулированных в виде следующих **задач**:

1. Найти критерии неунифицируемости для любой формулы в линейных временных логиках знания $\mathcal{LTK}$ (над множеством натуральных чисел) и $\mathcal{LFPK}$ (над множеством целых чисел, с обратными бинарными отношениями по времени).
2. Построить обобщенный критерий неунифицируемости для класса полных по Крипке логик с выразимой универсальной модальностью.
3. Доказать проективную унификацию в логике $\mathcal{LFPK}$ и некоторых расширениях, а также в линейной модальной логике нетранзитив-

ного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$. Найти алгоритм построения наиболее общего унификатора в данных логиках.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для линейных временных логиках знания $\mathcal{LTK}$ (над множеством натуральных чисел) и $\mathcal{LFPK}$ (над множеством целых чисел, с обратными бинарными отношениями по времени):
   (a) критерии для определения любой неунифицируемой формулы в логиках;
   (b) базисы пассивных правил вывода.
2. Для всех полных по Крипке логик с выразимой универсальной модальностью:
   (a) универсальный критерий для определения любой неунифицируемой формулы;
   (b) универсальный базис пассивных правил вывода.
3. Для логики $\mathcal{LFPK}$ и ее расширений наборами модальных операторов $Until+, Until-$ и $Next, Previous$:
   (a) проективность унификации;
   (b) алгоритмы построения наиболее общего унификатора для любой унифицируемой формулы.
4. Для линейной модальной логики нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$:
   (a) возможность эффективной проверки унифицируемости произвольной формулы путем построения граунд унификаторов;
   (b) проективность унификации;
   (c) алгоритмы построения наиболее общего унификатора для любой унифицируемой формулы.

Методы исследования. Используется язык многомодальных логик. Основным инструментом является реляционная семантика Крипке, расширенная на временной и многомодальный случаи. При решении унификационной проблемы применяются подходы через отрицание унифицируемости, построение граунд унификаторов, метод основанный на проективных формулах. Также используются общие методы теоретико-модельной и алгебраической семантики для пропозициональных нестандартных логик.

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость. Все результаты являются новыми, носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях унификационных проблем, а также других вопросов модальных логик транзитивного и нетранзитивного времени, логик знаний (допустимости, аксиоматизируемости), а также в различных областях математики (теория моделей, теория графов) и информатики (Computer Science, Term Rewriting Systems, Artificial Intelligence). Результаты могут применяться при составлении программ курсов по математической логике для студентов, магистрантов и аспирантов математических и инженерных специальностей, в том числе кафедры алгебры и математической логики СФУ.

Апробация работы. Результаты апробировались на семинарах кафедры алгебры и математической логики ИМиФИ СФУ по нестандартным логикам, «Красноярском алгебраическом семинаре», международных конференциях «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2016), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2016, 2017), «Математика в современном мире» (Новосибирск, 2017), всероссийских научных мероприятиях: конференции «Математики — Алтайскому краю (МАК)» (Барнаул, 2017) и школе-семинаре «Синтаксис и семантика логических систем» (Улан-Удэ, 2017), а также ряде молодежных конференций: «Ломоносов» (Москва, 2016); «МНСК» (Новосибирск, 2016); «Проспект Свободный» (Красноярск, 2016).

Личный вклад. Результаты, представленные в главах 2 и 6, получены соискателем лично. Основные результаты глав 3, 4 и 5 получены в нераздельном соавторстве с В. В. Рыбаковым и А. В. Кошелевой.

Публикации. Результаты опубликованы в 14 работах [22–35], среди которых 5 статей в рецензируемых журналах [22–26]. Основные результаты опубликованы в 4 статьях [22–25] в изданиях, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Работа изложена на 83 стр., включает 6 глав, введение, заключение и список литературы (90 наименований).

Результаты диссертации

1. Для линейных временных логик знания $\mathcal{LTK}$ (над множеством натуральных чисел) и $\mathcal{LFPK}$ (над множеством целых чисел):
    (a) найдены критерии для определения любой неунифицируемой формулы в логиках;

   (b) построены базисы пассивных правил вывода.
2. Для всех полных по Крипке логик с выразимой универсальной модальностью:
   (a) найден универсальный критерий для определения любой неунифицируемой формулы;
   (b) построен универсальный базис пассивных правил вывода.
3. Для логики $\mathcal{LFPK}$ и ее расширений наборами модальных операторов $Until+, Until-$ и $Next, Previous$:
   (a) доказана проективность унификации;
   (b) предложены алгоритмы построения наиболее общего унификатора для любой унифицируемой формулы.
4. Для линейной модальной логики нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$:
   (a) доказана возможность эффективно установить унифицируемость произвольной формулы путем построения граунд унификаторов;
   (b) доказана проективность унификации;
   (c) предложены алгоритмы построения наиболее общего унификатора для любой унифицируемой формулы.

Список литературы

1. Юн, В. Ф. Полимодальная логика индуктивных линейных по времени фреймов / В. Ф. Юн // Сиб. электр. матем. изв. — 2015. — Т. 12. С. 421–431.

2. Baader F. Unification theory / F. Baader, J. H. Siekmann // Handbook of Logic in AI and LP. — Oxford Univ. Press, 1994. — P. 41–125.

3. Baader, F. Unification in modal and description logics / F. Baader, S. Ghilardi // Logic J. IGPL. — 2011. — V. 19. — P. 705–730.

4. Babenyshev, S. V. Unification in linear temporal logic LTL / S. V. Babenyshev, V. V. Rybakov // Ann. Pure Appl. Logic. — 2011. — V. 162. — P. 991–1000.

5. Dzik, W. Unitary Unification of S5 Modal Logic and its Extensions / W. Dzik // Bull. Sect. Logic. — 2003. — V. 32, N. 1–2. — P. 19–26.

6. Dzik, W. Remarks on projective unifiers / W. Dzik // Bull. Sect. Logic. — 2011. — V. 40, N. 1. — P. 37–45.

7. Dzik, W. Projective unification in modal logic // W. Dzik, P. Wojtylak // Logic J. IGPL. — 2012. — V. 20, N. 1. — P. 121–153.

8. Fagin, R. Reasoning About Knowledge / R. Fagin, J. Y. Halpern, Y. Moses, M. Vardi. — MIT press, 1995. — 536 p.

9. Ghilardi, S. Unification in Intuitionistic logic / S. Ghilardi // J. Symbolic Logic. — 1999. — V. 64, N. 2. — P. 859–880.

10. Ghilardi, S. Best solving modal equations / S. Ghilardi // Ann. Pure Appl. Logic. — 2000. — V. 102, N. 3. — P. 183–198.

11. Hintikka, J. Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions / J. Hintikka. — Ithaca, NY : Cornell Univ. Press, 1962. — 179 p.

12. Hughes, G. E. A Companion to Modal Logic / G. E. Hughes, M. J. Cresswell. — London : Methuen, 1984. — 203 p.

13. Jerábek, E. Blending margins: the modal logic K has nullary unification type / E. Jerábek // J. Log. Comput. — 2015. — V. 25. — P. 1231–1240.

14. Knuth, D. E. Simple word problems in universal algebras / D. E. Knuth, P. B. Bendix // Comput. Problems Abstract Algebra. — 1970. — P. 263–297.

15. Manna, Z. The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems: Specification / Z. Manna, A. Pnueli. — Springer, 1992. — 426 p.

16. Martin, U. Boolean unification — the story so far / U. Martin, T. Nipkow // J. Symbolic Comput. — 1988. — V. 7. — P. 275–293.

17. Robinson, A. A machine oriented logic based on the resolution principle / A. Robinson // J. ACM. — 1965. — V. 12, N. 1. — P. 23–41.

18. Rybakov, V. An essay on unification and inference rules for modal logics / V. Rybakov, M. Terziler, C. Gencer // Bull. Sect. Logic. — 1999. — V. 28, N. 3. — P. 145–157.

19. Rybakov, V. V. Multi-modal and temporal logics with universal formula — reduction of admissibility to validity and unification. / V. V. Rybakov // J. Log. Comput. — 2008. — V. 18, N. 4. — P. 509–519.

20. Rybakov, V. V. Projective formulas and unification in linear temporal logic LTLU / V. V. Rybakov // Logic J. IGPL. — 2014. — V. 22, N. 4. — P. 665–672.

21. Rybakov, V. V. Nontransitive temporal multiagent logic, information and knowledge, deciding algorithms, / V. V. Rybakov // Sib. Math. J. — 2017. — V. 58, N. 5. — P. 875–886.

Публикации автора по теме диссертации

22. **Bashmakov, S. I.** Unification and inference rules in the multi-modal logic of knowledge and linear time LTK / S. I. Bashmakov // J. Siberian Fed. Univ. Math. & Physics. — 2016. — V. 9, N. 2. — P. 149–157.

23. **Bashmakov, S. I.** Non-unifiability in linear temporal logic of knowledge with multi-agent relations / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. Rybakov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2016. — V. 13. — P. 656-663.

24. **Bashmakov, S. I.** Projective formulas and unification in linear discrete temporal multi-agent logics / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. Rybakov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2016. — V. 13. — P. 923–929.

25. **Bashmakov, S. I.** Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality / S. I. Bashmakov // J. Siberian Fed. Univ. Math. & Physics. — 2018. — V. 11, N. 1. — P. 3–9.

26. **Bashmakov, S. I.** Multi-agent temporal logics with universal modality, description of non-unifiability / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. Rybakov // IfCoLog Logics and Their Applications. — 2017. — V. 4, N. 4. — P. 939–954.

Публикации в сборниках материалов конференций

27. **Башмаков, С. И.** Вопрос унификации и базис пассивных правил в многомодальной логике LTK / С. И. Башмаков // Ломоносов 2016: матер. XXIII междунар. науч. конф. студ., аспир. и мол. уч. (11–15 апреля 2016 г.). — Москва : ВМК МГУ, 2016. — С. 38–39.

28. **Башмаков, С. И.** Унификация в многомодальной логике LTK / С. И. Башмаков // МНСК-2016: матер. 54-й междунар. студ. конф. (16–20 апреля 2016 г.). Новосибирск : НГУ, 2016. — С. 6.

29. **Башмаков, С. И.** Критерий неунифицируемости в транзитивной временной линейной бимодальной логике на множестве целых чисел / С. И. Башмаков // Проспект Свободный: электрон. сбор. матер. междунар. конф. студ., аспир. и мол. уч. (15–25 апреля 2016 г.). — Красноярск : СФУ, 2016. — С.10.

30. **Bashmakov, S. I.** On unification and passive rules in multi-modal temporal logic of linear time and knowledge LFPK / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. V. Rybakov // Алгебра и логика: теория и приложения: тез. докл. междунар. конф. (24–29 июля 2016 г.). — Красноярск : СФУ, 2016. — С. 88–90.

31. **Bashmakov, S. I.** Unification through the projective formulas in linear discrete temporal logics of knowledge / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. V. Rybakov // Мальцевские чтения: тез. докл. междунар. конф. (21–25 ноября 2016 г.). — Новосибирск : ИМ СО РАН, 2016. — С. 218.

32. **Башмаков, С. И.** Линейные транзитивные логики знания и времени, унификация и проективные формулы / С. И. Башмаков, А. В. Кошелева, В. В. Рыбаков // Математики — Алтайскому краю: сб. труд. всерос. конф. по матем. (29 июня –2 июля 2017 г.). — Барнаул: АлтГУ, 2017. — С. 6–7.

33. **Башмаков, С. И.** Унификация во временных логиках / С. И. Башмаков, А. В. Кошелева // Синтаксис и семантика логич. систем: матер. 5-й школы-семинара (Байкал, 8–12 августа 2017 г.). — Улан-Удэ : БГУ, 2017. — С. 20–25.

34. **Башмаков, С. И.** Унификация во временных многоагентных логиках с универсальной модальностью / С. И. Башмаков, А. В. Кошелева, В. В. Рыбаков // Математика в современном мире: тез. докл. междунар. конф. (14–19 августа 2017 г.). — Новосибирск : ИМ СО РАН, 2017. — С. 67.

35. **Bashmakov, S. I.** Projective unification in linear modal logic on nontransitive time with universal modality / S. I. Bashmakov // Мальцевские чтения: тез. докл. междунар. конф. (20–24 ноября 2017 г.). — Новосибирск : ИМ СО РАН, 2017. — С. 174.