

АЛГОРИТМЫ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В ПРОГРАММЕ НА ЯЗЫКЕ TURBO PASCAL

Катцына А.,

научный руководитель Волошинская Е. Л.
МАОУ «Общеобразовательное учреждение лицей № 7»

Проблема состоит в том, что в школьных курсах математики и информатики при знакомстве с различными системами счисления не рассматриваются арифметические операции в позиционных системах счисления, отличных от двоичной и десятичной. Решение данной проблемы непосредственно связано с практической необходимостью.

Поэтому в своей работе я поставила цель: устранение пробелов в знаниях и умениях проведения арифметических операций в различных системах счисления.

Задачи, поставленные для достижения данной цели:

- 1) проанализировать источники информации по данной теме;
- 2) сформулировать алгоритмы сложения, умножения, вычитания и деления в различных системах счисления;
- 3) разработать программу для проведения арифметических операций в различных системах счисления.

Актуальность работы заключается в том, что я изучила и сформулировала неизвестные ранее массовой аудитории алгоритмы сложения, умножения, вычитания и деления в различных системах счисления. Разработала программу для проведения арифметических операций в различных системах счисления.

В журнале «Наука и жизнь» [8] мне встретилась интересная заметка об использовании различных систем счисления в повседневной жизни. Меня заинтересовала данная тема, и мне стало интересно, как проводятся арифметические операции в различных позиционных системах счисления.

Проанализировав литературу по данной теме, можно прийти к выводу, что в источниках не рассматриваются арифметические операции в различных системах счисления, отличных от двоичной. Исключением является образовательный сайт «Знания никогда не бывают лишними»[9], на котором рассматривается сложение в позиционных системах счисления.

Что же такое система счисления?

Система счисления — символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков, или это совокупность приемов и правил, по которым числа записываются и читаются.

Системы счисления бывают двух видов: позиционные и непозиционные. Позиционные системы счисления – системы счисления, в которых один и тот же числовой знак (цифра) в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места (разряда), где он расположен. Непозиционные системы счисления – системы счисления, в которых величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения в числе. При этом система может накладывать ограничения на положение цифр, например, чтобы они были расположены в порядке убывания.

У каждой позиционной системы счисления есть основание. Основание позиционной системы счисления - количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления.

За основание системы можно принять любое натуральное число - два, три, четыре и т.д. Следовательно, возможно бесчисленное множество позиционных систем: двоичная, троичная, четверичная и т.д.

В каждой системе счисления цифры упорядочены в соответствии с их значениями: 1 больше 0, 2 больше 1 и т.д.

Остановимся на рассмотрении операций умножения и деления в позиционных системах счисления, так как они в себя включают операции сложения и вычитания.

УМНОЖЕНИЕ

Выполняя умножение многозначных чисел в различных позиционных системах счисления, можно использовать обычный алгоритм перемножения чисел в столбик, но при этом результаты перемножения и сложения однозначных чисел необходимо заимствовать из соответствующих рассматриваемой системе таблиц умножения и сложения.

Произведем умножение двух чисел A214 и DF в шестнадцатеричной системе счисления.

1. Начинаем справа: умножаем F (15) на 4 = 60.
2. Делим 60 на основание системы счисления (16) и переносим целую часть в следующий разряд (3), а в ответ пишем остаток (12 = C).
3. Умножаем F(15) на следующую цифру (1) = 15 и прибавляем 3 из предыдущего пункта, получаем 18.
4. Делим 18 на основание системы счисления (16) и переносим целую часть в следующий разряд (1), а в ответ пишем остаток (2).
5. Умножаем F(15) на следующую цифру (2) = 30 и прибавляем 1 из предыдущего пункта, получаем 31.
6. Делим 31 на основание системы счисления (16) и переносим целую часть в следующий разряд (1), а в ответ пишем остаток (15=F).
7. Умножаем F(15) на следующую цифру (A=10) = 150 и прибавляем 1 из предыдущего пункта, получаем 151.
8. Делим 151 на основание системы счисления (16) и переносим целую часть в следующий разряд (9), а в ответ пишем остаток (7).
9. В следующий разряд пишем целую часть от предыдущего деления (9).
10. Получаем 97F2C.
11. Проводим аналогичные операции с умножением D на A214.
12. Складываем получившиеся произведения и записываем ответ 8D2F6C.

$$\begin{array}{r}
 \times \text{A214} \\
 \text{DF} \\
 \hline
 + 97\text{F2C} \\
 \hline
 8\text{D2F6C}
 \end{array}$$

ДЕЛЕНИЕ

В любой позиционной системе счисления деление производится по тем же правилам, как и деление углом в десятичной системе.

Разделим число 8D2F6C на DF в шестнадцатеричной системе счисления.

1. Сравниваем самый больший разряд и делитель, если делитель больше данного разряда, то рассматриваем этот разряд и следующий как число. Повторяем операцию до того момента, как полученное число не сравняется либо превысит значение делителя. ($8 < DF$, $8D < DF$, $8D2 > DF$).

2. Когда нашли искомый разряд, то подбираем такое число (A), при котором произведение делителя и этого числа (8B6) будет максимально близким по значению (но не больше) к числу, образованному разрядами (пункт 1). Записываем это число в ответ первым.

3. Отнимаем произведение (пункт 2) от разрядов (пункт 1) ($8D2 - 8B6$).
4. Остаток пишем после черты (1C).

$$\begin{array}{r|l}
 8\text{D2F6C} & \text{DF} \\
 \hline
 8\text{B6} & \text{A214} \\
 \hline
 1\text{CF} & \\
 - 1\text{B} & \\
 \hline
 \text{E116} & \\
 \hline
 \text{DF} & \\
 \hline
 \text{37C} & \\
 - 37\text{C} & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

5. Сносим следующий разряд к остатку и проверяем больше ли получившееся число, чем делитель. Если нет, то сносим ещё один разряд до тех пор, пока это число не станет больше чем делитель и не забываем записывать нули в ответ.

6. Прodelьваем все вышеперечисленное до тех пор, пока оставшиеся цифры не закончатся, или в остатке получится число меньше делителя.

Записываем ответ (A214).

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Программа «arifmetika», написанная на языке программирования Turbo Pascal, выполняющая арифметические операции в различных системах счисления с основанием, не превышающим 36, представлена в приложении к работе.

Вводим два числа и основание системы счисления, в которой представлены числа.

В состав программы входит процедура «v10», которая переводит числа из любой системы счисления в десятичную. Так как в произвольной системе счисления число может содержать буквы (в качестве цифр), то процедура переводит букву в число, начиная с последнего символа. Далее умножаем получившееся число на основание системы счисления в степени соответствующей разряду данной цифры. Переходим к следующей цифре в числе и выполняем аналогичные действия. Получившиеся результаты складываем и получаем число в десятичной системе счисления.

$$221_3 = 3^0 * 1 + 3^1 * 2 + 3^2 * 2 = 1 + 6 + 18 = 25_{10}$$

Проверяем, соответствуют ли введённые пользователем числа, данной системе счисления. Если не соответствуют, то на экран выводится сообщение «Некорректно введены числа!».

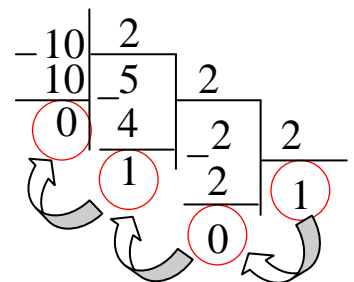
Складываем 2 числа, переведённые в десятичную систему счисления.

Отнимаем от большего меньшее число, тем самым находим разность этих двух чисел.

Перемножаем эти числа.

Делим большее на меньшее число, т.е. находим их частное.

Переходим ко второй процедуре «Iz10», которая переводит числа из десятичной системы в любую другую. Нам нужно перевести сумму, разность, произведение и частное в систему счисления, которую задал пользователь. Делим число на основание системы счисления, в которую хотим перевести. Остаток от деления переводим в букву, если он больше 9, и записываем как первую цифру промежуточного числа (x). Далее делим полученное частное на основание системы счисления, записываем остаток как следующую цифру промежуточного числа (x). Повторяем аналогичные действия до тех пор, пока целая часть не станет равна нулю. А теперь переворачиваем промежуточное число (x) и получаем искомое число в десятичной системе счисления (x2).



Выводим на экран сумму, разность, произведение и частное в системе счисления, которую задал пользователь.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сформулированы алгоритмы сложения, умножения, вычитания и деления в различных системах счисления и рассмотрено применение их на практике.

Разработана программа, представленная в приложении, для вычисления арифметических операций в различных системах счисления на языке программирования Turbo Pascal.

В дальнейшем можно рассмотреть арифметические операции в различных позиционных системах счисления выше тридцатисемиричной, добавляя строчные буквы латинского алфавита (до шестидесятидвуричной [62] системы) и русский алфавит (с прописными буквами – до девяностопятиричной [95] системы; с прописными и строчными – до двадцативосьмиричной [128] системы) с дробными числами и разработать оболочку для написанной программы.

На основе сформулированных алгоритмов арифметических операций была подготовлена и реализована серия занятий для учеников 9В класса МАОУ «Общеобразовательного лицея №7» города Красноярск. Учащиеся этого класса теперь могут применять данные алгоритмы на практике.

Сформулированные алгоритмы арифметических операций в различных системах счисления и разработанную программу можно применять на факультативе в старших классах в качестве учебно-методического комплекса в сопровождении с цифровым образовательным ресурсом при углубленном изучении данной темы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Большая Советская Энциклопедия – <http://bse.sci-lib.com/article108103.html>
2. Башмакова И. Г. и Юшкевич А. Г. Происхождение систем счисления, в кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 1, М.—Л., 1951.
3. Введение в информатику./ Авт.-сост. А.П. Шестаков; Перм. ун-т. — Пермь, 1999. (Ч. I — 56 с.)
4. Системы счисления. Популярные лекции по математике. / С. В. Фомин.— М.: Наука, 1987.
5. Яглом И. Системы счисления // Квант.- 1970.- № 6.
6. Ковриженко Г.А. Системы счисления и двоичная арифметика. От счета на пальцах до ЭВМ. – Киев: Радянська школа, 1984.
7. С. Б. Гашков. Системы счисления и их применение. — М.: МЦНМО, 2004. — (Библиотека «Математическое просвещение»).
8. Мультимедийный электронный учебник. Алексеев Е.Г., Богатырев С.Д. Информатика. - http://inf.e-alekseev.ru/text/Schisl_perevod.html.
9. Системы счисления // Наука и жизнь – 2000 – №12 – <http://www.nkj.ru/archive/articles/5200/>.
10. <http://www.education.gootkin.com/ege-informatika/sistemy-schisleniya/slozhenie-chisel.html>.
11. <http://studentbank.ru/view.php?id=10551&p=0>.
12. http://ru.wikipedia.org/wiki/Система_счисления.
13. <http://irnik.narod.ru/>.
14. http://www.klgtu.ru/students/literature/inf_asu/1740.html.
15. http://algolist.manual.ru/maths/teornum/count_sys.php.
http://www.gmcit.murmansk.ru/text/information_science/base/logic/materials/material2.htm