

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики  
Кафедра алгебры и математической логики

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_ /В.М. Левчук

<\_\_> \_\_\_\_\_ 2017 г.

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**  
**К ПРОБЛЕМЕ КЛАССИФИКАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ С**  
**ПАРКЕТНЫМИ ГРАНЯМИ**

**Направление 01.04.01 Математика**

**Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная  
математика**

Научный руководитель

доктор физико-математических \_\_\_\_\_

наук, профессор

/А. В. Тимофеев

Выпускник

\_\_\_\_\_

/Д. Н. Судак

Красноярск 2017

## АННОТАЦИЯ

Цель работы — алгоритмизировать процесс нахождения всех выпуклых тел с паркетными гранями и пременить созданный алгоритм для классификации названных многогранников с условием составленности каждого такого тела из правильных пирамид.

В результате исследований найдены все выпуклые многогранники, составленные из правильных пирамид, а ребра самого многогранника не больше числа два. Найдены однотипные многогранники и их тип. Найдены группы симметрий этих тел. Выписаны все фундаментальные вершины и грани. Описан и реализован алгоритм построения многогранника по группе его симметрий и фундаментальным вершинам.

Ключевые слова: паркетный многогранник, правильный многогранник, тип многогранника, группа симметрий, соединение пирамид, правильные пирамиды.

## ABSTRACT

The purpose of the paper is to algorithmize the process of finding all convex bodies with parquet faces and to shorten the created algorithm for classifying these polyhedra with the condition that each such body is composed of regular-faced pyramids.

As a result of the research, all convex polyhedra composed of regular-faced pyramids are found, and the edges of the polyhedron itself are no more than two. Single-type polyhedra and their type are found. Groups of symmetries of these bodies are found. All fundamental vertices and faces are written out. An algorithm for constructing a polyhedron with respect to its symmetry group and fundamental vertices is described and realized.

Keywords: parquet polyhedron, regular-faced, polyhedron type, symmetry group, pyramid connection, regular-faced pyramids.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
1 Выпуклые соединения не более 14 правильных пирамид .....	5
1.1 2-составные тела .....	8
1.2 3-составные тела .....	8
1.3 4-составные тела .....	9
1.3.1 Соединения 3-составного и 1-составного тел .....	9
1.3.2 Соединения 2-составного и 2-составного тел .....	9
1.4 5-составные тела .....	10
1.4.1 Соединения 4-составного и 1-составного тел .....	10
1.5 6-составные тела .....	10
1.5.1 Соединения 5-составного и 1-составного тел .....	10
1.5.2 Соединения 4-составного и 2-составного тел .....	10
1.5.3 Соединения 3-составного и 3-составного тел .....	10
1.6 7-составные тела .....	10
1.6.1 Соединения 6-составного и 1-составного тел .....	10
1.6.2 Соединения 4-составного и 3-составного тел .....	11
1.7 8-составные тела .....	11
1.7.1 Соединения 7-составного и 1-составного тел .....	11
1.7.2 Соединения 6-составного и 2-составного тел .....	11
1.8 9-составные тела .....	11
1.8.1 Соединения 8-составного и 1-составного тел .....	11
1.8.2 Соединения 6-составного и 3-составного тел .....	12
1.9 10-составные тела .....	12
1.9.1 Соединения 9-составного и 1-составного тел .....	12
1.9.2 Соединения 8-составного и 2-составного тел .....	12
1.9.3 Соединения 5-составного и 5-составного тел .....	12
1.10 11-составные тела .....	12
1.10.1 Соединения 10-составного и 1-составного тел .....	12
1.11 12-составные тела .....	12
1.11.1 Соединения 11-составного и 1-составного тел .....	12
1.11.2 Соединения 9-составного и 3-составного тел .....	13
1.12 13-составные тела .....	13
1.12.1 Соединения 12-составного и 1-составного тел .....	13
1.12.2 Соединения 10-составного и 3-составного тел .....	13
1.13 14-составные тела .....	14
1.13.1 Соединения 13-составного и 1-составного тел .....	14
1.13.2 Соединения 12-составных и 2-составных тел .....	14
1.13.3 Соединения 7-составных и 7-составных тел .....	14

1.14	Приспособление доказательства теоремы для его автоматизации и ее обобщения .....	25
2	Построение многогранника по группе его симметрий и фундаментальным вершинам .....	26
2.1	Задание многогранников алгебраической моделью .....	26
2.2	Описание алгоритма построения граней .....	27
	Зключение .....	29
	Список использованных источников .....	30
	Приложение .....	31

## ВВЕДЕНИЕ

Существует с точностью до подобия ровно три правильные пирамиды. При классификации выпуклых правильных тел [1] они получили обозначения  $M_1, M_2, M_3$ , которым в указанном порядке соответствуют тетраэдр и пирамиды с квадратным и пятиугольным основаниями. Несколько лет назад доказано [2], что кроме бесконечных серий призм и антипризм существует только 186 выпуклых многогранников, каждая грань которых составлена из одного или нескольких правильных многоугольников так, что каждая вершина этого многоугольника является и вершиной многогранника. Из 186 этих тел 78 обладают неправильными гранями. Все пять таких граней получены соединением треугольника, квадрата и пятиугольника с треугольником, а также квадрата и пятиугольника с двумя треугольниками. Они служат примерами паркетных многоугольников, все 23 типа которых были перечислены Ю. А. Пряхиным [3], а полнота списка доказана в работе [4].

Более четырех десятилетий назад было замечено [3], что найти все типы выпуклых многогранников с паркетными гранями можно по схеме, которой придерживались авторы теоремы о классификации выпуклых многогранников с правильными гранями [1]. Понятно также, что реализация этой схемы встречает гораздо больший, чем в работе [1] объем вычислений. Видимо, поэтому до сих пор известно только, что кроме четырех бесконечных серий несоставных многогранников с паркетными гранями существует лишь конечное число типов таких тел. В настоящей работе описаны те вычисления, которые невозможно обойти при реализации схемы из [1]. Они привели к нахождению каждого составленного из не более 14 правильных пирамид с единичными ребрами выпуклого многогранника, длины ребер которого не превосходят числа два. Описаны также все разбиения такого многогранника на тела с паркетными гранями.

# 1 Выпуклые соединения не более 14 правильных пирамид

Из 57 многогранников теоремы только тринадцать не помечены кружком, который указывает на попадающие внутрь ребра или грани вершины правильных многоугольников, из которых составлены некоторые грани. Даже если к этим тринадцати добавить несколько тел, для которых в теореме есть подобный или равнотипный многогранник, то все равно очевидно кратное увеличение вычислений в сравнении с классификацией выпуклых правильных пирамид [1, 2, 5].

**Теорема 1.1.** *Выпуклый многогранник с ребрами длины один или два составлен из не более четырнадцати правильных пирамид с единичными ребрами тогда и только тогда, когда он является одним из тел:*

$$M_1, M_2, M_3, \quad (1)$$

$$M_1 + M_1, M_1 + M_2, M_2 + M_2, M_3 + M_3, \quad (2)$$

$$^\circ S_{2,2} + M_1, S_{2,2} + M_2, ^\circ S_{2,2} + M'_2, \quad (3)$$

$$^\circ S_{3,1} + M_2, ^\circ S_{3,1} + M'_2, S_{3,2} + M_1, S_{2,2} + S_{2,2}, S_{2,2} + S'_{2,2}, ^\circ S_{2,2} + S''_{2,2}, \quad (4)$$

$$^\circ S_{4,1} + M_1, ^\circ S_{4,4} + M_2, \quad (5)$$

$$^\circ S_{5,1} + M_1, ^\circ S_{5,2} + M_1, ^\circ S_{5,2} + M_2, ^\circ S_{4,4} + S_{2,2}, ^\circ S_{3,1} + S_{3,1}, \quad (6)$$

$$^\circ S_{6,2} + M_2, ^\circ S_{6,4} + M_2, ^\circ S_{6,5} + M_2, S_{4,6} + S_{3,1}, \quad (7)$$

$$^\circ S_{7,1} + M_1, ^\circ S_{7,2} + M_1, ^\circ S_{7,3} + M_1, S_{7,4} + M_2, ^\circ S_{6,2} + S_{2,2}, ^\circ S_{6,5} + S_{2,2}, \quad (8)$$

$$^\circ S_{8,4} + M_2, ^\circ S_{6,5} + S_{3,1}, ^\circ S_{6,5} + S_{3,3}, \quad (9)$$

$$^\circ S_{9,1} + M_1, ^\circ S_{9,1} + M_2, ^\circ S_{9,3} + M_2, ^\circ S_{8,4} + S_{2,2}, ^\circ S_{5,1} + S_{5,1}, \quad (10)$$

$$^\circ S_{10,1} + M_2, ^\circ S_{10,4} + M_2, ^\circ S_{10,5} + M_1, \quad (11)$$

$${}^\circ S_{11,2} + M_1, {}^\circ S_{11,3} + M_1, S_{9,1} + S_{3,1}, {}^\circ S_{9,1} + S'_{3,1}, {}^\circ S_{9,3} + S_{3,1}, \quad (12)$$

$${}^\circ S_{12,3} + M_2, {}^\circ S_{12,4} + M_1, {}^\circ S_{10,4} + S_{3,1}, \quad (13)$$

$${}^\circ S_{13,1} + M_1, {}^\circ S_{13,1} + M_2, {}^\circ S_{13,3} + M_2, {}^\circ S_{12,3} + S_{2,2}, S_{7,4} + S_{7,4}, S_{7,4} + S'_{7,4}, \quad (14)$$

причем многогранник  $S_{i,j}$  расположен в списке  $i$  на  $j$ -м месте:

$$M_1 = S_{1,1}, M_2 = S_{1,2}, M_3 = S_{1,3}, M_1 + M_1 = S_{2,1}, \dots, S_{7,4} + S'_{7,4} = S_{14,6}.$$

*Штрих указывает на различие многогранников, составленных из двух одинаковых тел, кружком помечены тела с фиктивными вершинами.*

Отметим совпадение некоторых многогранников теоремы с известными, ставшими классическими телами, обозначения которых можно найти в работах [2, 6, 7]: треугольная бипирамида  $P_{2,21} = J_{12} = S_{2,1}$ , скошенная треугольная призма  $P_{2,22} = S_{2,2}$ , октаэдр  $[3^4] = S_{2,3}$ , пятиугольная бипирамида  $P_{2,27} = J_{13} = S_{2,4}$ , наращенный октаэдр  $P_{3,33} = S_{3,2}$ , дважды наращенный октаэдр  $P_{4,11} = S_{4,3}$ , скошенный куб  $P_{4,30} = S_{4,4}$ , двойная наращенная 4-угольная пирамида  $P_{4,31} = S_{4,5}$ , тетраэдр  ${}^2M_1 = S_{6,1} = S_{5,1} + M_1$  с двойными ребрами, трехскатный купол  $M_4 = S_{7,2} = J_3 = S_{4,6} + S_{3,1}$ , наращенный трехскатный купол  $P_{2,25} = S_{8,2}$ , усеченная пирамида  $M_{2a} = S_{9,3} = S_{6,5} + S_{3,3}$ , 4-угольная пирамида  ${}^2M_2 = S_{10,3}$  с двойными ребрами, наклонная призма  $Q_1 = S_{12,3}$  с шестиугольными основаниями, трехскатный прямой бикупол  $S_{14,5} = P_{2,35} = M_4 + M_4 = J_{27}$ , кубооктаэдр  $S_{14,6} = P_{2,36} = M_4 + M'_4 = [3, 4, 3, 4]$ .

**Доказательство.** Каждой правильногранной пирамиде и каждому соединению этих пирамид будем строить модель, в которой закрашены только фундаментальные грани, т. е. такие взятые в минимальном количестве грани многогранника, действуя на которые симметриями этого тела, получаем все его грани. Например, на рис. 1 многогранник  $S_{4,1}$  закрашен в спектральном порядке согласно его обозначению  ${}^\circ ((M_1 + M_2) + M_1) + M_2$  в теореме, т. е. красным цветом закрашен тетраэдр  $M_1$ , присоединенная к нему пирамида  $M_2$  закрашена оранжевым цветом, соединенный с призмой  $M_1 + M_2$  тетраэдр окрашен желтым цветом и зеленым — 4-угольная пирамида  $M_2$ , соединенная с телом  ${}^\circ (M_1 + M_2) + M_1$ .

Если любые две грани многогранника различны, то множество его фундаментальных граней совпадает с множеством всех граней этого тела. Если же есть хотя бы две одинаковые грани, то список фундаментальных граней может быть меньше, списка всех граней. Он действительно будет меньше, если существует симметрия, то есть совмещающее с собой многогранник движение, которое одну его грань отображает на другую.



Следовательно, если многогранник, будем обозначать его  $P$ , обладает одинаковыми гранями, то требуется искать симметрии этого многогранника, точнее группу симметрий тела  $P$ , за которой закрепим обозначение  $AutP$ . Все повороты совмещающие с собой  $P$ , образуют подгруппу, которую обозначим  $Aut^+P$ .

Как найти все повороты группы  $Aut^+P$ ?

Прежде всего заметим, если такой поворот существует, то его ось проходит через вершину, или середину грани или середину ребра. Это значит, что, выяснив для каждой вершины, каждого центра грани и каждой середины ребра, лежат ли они на оси поворота группы  $Aut^+P$ , получим ответ на поставленный вопрос. Однако на практике необходимых для рассмотрения случаев будет гораздо меньше.

Например, многогранник  $S_{4,1}$  обладает единственным ребром длины 2, рис. 1. Поэтому поворот группы  $Aut^+S_{4,1}$  отображает его на себя. Следовательно, существует не более одной оси поворота, совмещающего с собой тело  $S_{4,1}$ . Очевидно, что такая ось существует и кроме середины общего ребра трапеций содержит общую вершину ромбов. Следовательно, группа  $Aut^+S_{4,1}$  состоит из тождественного преобразования и найденного поворота на  $180^\circ$ . Поскольку, между поворотами группы  $Aut^+P$ , и симметриями второго рода из разности  $AutP \setminus Aut^+P$  существует взаимно-однозначное соответствие, то надо найти еще 2 несобственные симметрии. Ими являются отражения от перпендикулярных плоскостей с общей, рассмотренной выше, осью поворотов. Приходим к списку фундаментальных граней тела  $S_{4,1}$ : треугольник, ромб, трапеция, рис. 2.

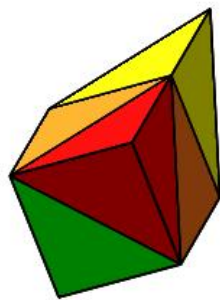


Рисунок 1 — Закраска тела  $S_{4,1}$ , отражающая его сборку

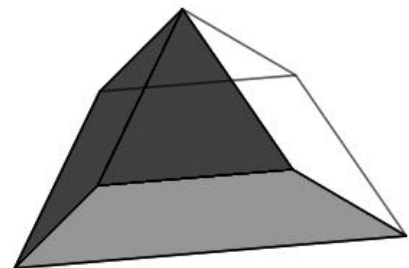


Рисунок 2 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{4,1}$

Тела  $S_{4,1}$  и  $S_{4,2}$  образуют в теореме одну из трех пар, обозначения в которых отличаются лишь штрихом, рис. 3, 4. Ниже будет представлена дру-

гая такая пара  $S_{4,4}$  и  $S_{4,5}$ , рис. 5, 6. Тела  $S_{14,5}$  и  $S_{14,6}$  упомянуты выше и представлены в атласах, см., например, [7].

Если выпуклый многогранник составлен из  $k$  правильных пирамид с единичными ребрами, а ребра самого многогранника имеют длину 1 или 2, то будем называть его  $k$ -составным,  $k = 1, 2, \dots$ . Каждый  $k$ -составной многогранник будем получать всевозможными соединениями по одинаковым фундаментальным граням  $(k - m)$ -составного тела и  $m$ -составного многогранника,  $m = 1, 2, \dots, [k/2]$ , где  $[k/2]$  — целая часть числа  $k/2$ . Описанная схема реализована ниже и видна по названиям разделов. Каждый многогранник теоремы будет получен в виде соединения двух тел. После обозначения первого из них будут перечислены его фундаментальные грани, а вслед за обозначением второго — те его фундаментальные грани, которые есть у первого. Кроме того, вслед за названием фундаментальных граней второго многогранника записываются выпуклые соединения по этой грани, если такие соединения с ребрами длины  $< 3$  существуют. Выделение жирным шрифтом многогранника означает, что выпуклое соединение его с другими телами невозможно.

### 1.1 2-составные тела

1.  $M_1$ , треугольник:

$M_1$ , треугольник;  $\mathbf{S_{2,1}} = M_1 + M_1$ ;

$M_2$ , треугольник;  $S_{2,2} = M_1 + M_2$ .

2.  $M_2$ , треугольник, квадрат:

$M_2$ , квадрат;  $S_{2,3} = M_2 + M_2$ .

3.  $M_3$ , треугольник, пятиугольник:

$M_3$ , пятиугольник;  $\mathbf{S_{2,4}} = M_3 + M_3$ .

У каждого треугольника тел  $S_{2,1}$  и  $S_{2,4}$  есть сторона, которой соответствует настолько большой двугранный угол, что без нарушения выпуклости к этим телам невозможно присоединить составленные из правильных пирамид выпуклые тела.

### 1.2 3-составные тела

1.  $S_{2,2}$ , 2 треугольника, ромб, квадрат:

$M_1$ , треугольник;  $S_{3,1} = {}^\circ S_{2,2} + M_1$ ;

$M_2$ , квадрат;  $S_{3,2} = S_{2,2} + M_2$ ;

$M_2$ , треугольник;  $S_{3,3} = {}^\circ S_{2,2} + M'_2$ .

2.  $S_{2,3}$ , треугольник:

$$M_1, \text{ треугольник; } S_{2,3} + M_1 = S_{3,2}.$$

### 1.3 4-составные тела

#### 1.3.1 Соединения 3-составного и 1-составного тел

1.  $S_{3,1}$ , треугольник, квадрат, трапеция:

$$M_2, \text{ квадрат; } S_{4,1} = \circ S_{3,1} + M_2;$$

$$M_2, \text{ треугольник; } S_{4,2} = \circ S_{3,1} + M_2'.$$

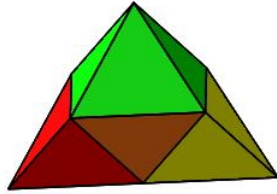


Рисунок 3 — Закраска тела  $S_{4,1}$ , отражающая его сборку

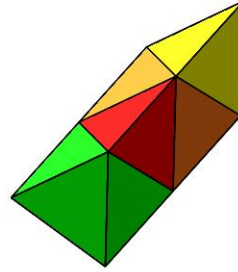


Рисунок 4 — Закраска тела  $S_{4,2}$ , отражающая его сборку

2.  $S_{3,2}$ , 2 треугольника, ромб:

$$M_1, \text{ треугольник; } S_{4,3} = S_{3,2} + M_1.$$

3.  $S_{3,3}$ , треугольник, трапеция, прямоугольник:

$$M_1, \text{ треугольник; } S_{3,3} + M_1 = S_{4,2}.$$

#### 1.3.2 Соединения 2-составного и 2-составного тел

$S_{2,2}$ , 2 треугольника, ромб, квадрат:

$$S_{2,2}, \text{ треугольник; } S_{2,2} + S_{2,2}''' = S_{4,2};$$

$$S_{2,2}, \text{ квадрат; } S_{2,2} + S_{2,2}^{iv} = S_{4,3}.$$

Поскольку группа симметрий ромба, не переворачивающих его, есть четверная группа Клейна, порожденная отражениями от перпендикулярных ромбу и содержащих его диагонали плоскостей, то существует четыре соединения наклонных призм  $S_{2,2}$  ромбическими гранями. Из них выпуклыми являются 3 следующих тела:

$$S_{4,4} = S_{2,2} + S_{2,2}, \mathbf{S}_{4,5} = \mathbf{S}_{2,2} + \mathbf{S}_{2,2}', S_{4,6} = \circ S_{2,2} + S_{2,2}''.$$

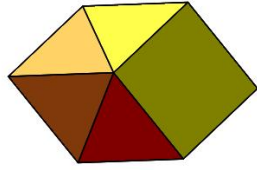


Рисунок 5 —  $S_{4,4} = P_{4,3}$

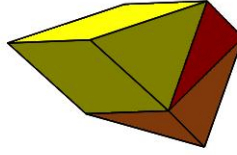


Рисунок 6 —  $S_{4,5} = P_{4,31}$

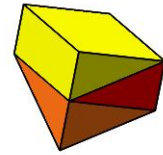


Рисунок 7 — Тело  $S_{4,6}$

## 1.4 5-составные тела

### 1.4.1 Соединения 4-составного и 1-составного тел

1.  $S_{4,1}$ , треугольник, ромб, трапеция:  
 $M_1$ , треугольник;  $S_{5,1} = \circ S_{4,1} + M_1$ ;
2.  $S_{4,4}$ , квадрат, ромб:  
 $M_2$ , квадрат;  $S_{5,2} = \circ S_{4,4} + M_2$ .

## 1.5 6-составные тела

### 1.5.1 Соединения 5-составного и 1-составного тел

1.  $S_{5,1}$ , 2 треугольника, трапеция:  
 $M_1$ , треугольник;  $S_{6,1} = \circ S_{5,1} + M_1$ .
2.  $S_{5,2}$ , треугольник, квадрат, ромб, трапеция:  
 $M_1$ , треугольник;  $S_{6,2} = \circ S_{5,2} + M_1$ ;  
 $M_2$ , квадрат;  $S_{6,3} = \circ S_{5,2} + M_2$ .

### 1.5.2 Соединения 4-составного и 2-составного тел

- $S_{4,4}$ , квадрат, ромб:  
 $S_{2,2}$ , ромб;  $S_{6,4} = \circ S_{4,4} + S_{2,2}$ .

### 1.5.3 Соединения 3-составного и 3-составного тел

- $S_{3,1}$ , треугольник, квадрат, трапеция:  
 $S_{3,1}$ , трапеция;  $S_{6,5} = \circ S_{3,1} + S_{3,1}$ ;

## 1.6 7-составные тела

### 1.6.1 Соединения 6-составного и 1-составного тел

1.  $S_{6,2}$ , квадрат, 2 ромба, 2 трапеции, параллелограмм:

$M_2$ , квадрат;  $S_{7,1} = \circ S_{6,2} + M_2$ .

2.  $S_{6,4}$ , квадрат, ромб, прямоугольник, 2 трапеции:

$M_2$ , квадрат;  $S_{7,2} = \circ S_{6,4} + M_2$ .

3.  $S_{6,5}$ , квадрат, трапеция:

$M_2$ , квадрат;  $S_{7,3} = \circ S_{6,5} + M_2$

#### 1.6.2 Соединения 4-составного и 3-составного тел

$S_{4,6}$ , треугольник, квадрат, трапеция:

$S_{3,1}$ , трапеция;  $S_{7,4} = S_{4,6} + S_{3,1}$ .

### 1.7 8-составные тела

#### 1.7.1 Соединения 7-составного и 1-составного тел

1.  $S_{7,1}$ , 2 треугольника, ромб, параллелограмм, трапеция:

$M_1$ , треугольник;  $S_{8,1} = \circ S_{7,1} + M_1$ .

2.  $S_{7,2}$ , 2 треугольника, прямоугольник, 2 трапеции:

$M_1$ , треугольник;  $S_{8,2} = \circ S_{7,2} + M_1$ .

3.  $S_{7,3}$ , 3 треугольника, ромб, квадрат, 2 трапеции:

$M_1$ , треугольник;  $S_{8,3} = \circ S_{7,3} + M_1$ .

4.  $S_{7,4}$ , 2 треугольника, квадрат, шестиугольник:

$M_2$ , квадрат;  $S_{8,4} = S_{7,4} + M_2$ .

#### 1.7.2 Соединения 6-составного и 2-составного тел

1.  $S_{6,2}$ , квадрат, ромб, параллелограмм, трапеция:

$S_{2,2}$ , ромб;  $S_{8,5} = \circ S_{6,2} + S_{2,2}$ .

2.  $S_{6,5}$  квадрат, ромб, прямоугольник, 2 трапеции:

$S_{2,2}$ , ромб;  $S_{8,6} = \circ S_{6,4} + S_{2,2}$ .

### 1.8 9-составные тела

#### 1.8.1 Соединения 8-составного и 1-составного тел

$S_{8,2}$ , 2 треугольника, квадрат, ромб, шестиугольник:

$M_2$ , квадрат;  $S_{9,1} = \circ S_{8,4} + M_2$ .

### 1.8.2 Соединения 6-составного и 3-составного тел

$S_{6,5}$ , квадрат, ромб, прямоугольник, 2 трапеции:  
 $S_{3,1}$ , трапеция;  $S_{9,2} = \circ S_{6,4} + S_{3,1}$ ;  
 $S_{3,3}$ , трапеция;  $S_{9,3} = \circ S_{6,4} + S_{3,3}$ .

## 1.9 10-составные тела

### 1.9.1 Соединения 9-составного и 1-составного тел

1.  $S_{9,1}$ , треугольник, квадрат, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:  
 $M_1$ , треугольник;  $S_{10,1} = \circ S_{9,1} + M_1$ ;  
 $M_2$ , квадрат;  $S_{10,2} = \circ S_{9,1} + M_2$ .
2.  $S_{9,3}$ , 2 квадрата, трапеция:  
 $M_2$ , квадрат;  $S_{10,3} = \circ S_{9,3} + M_2$ .

### 1.9.2 Соединения 8-составного и 2-составного тел

$S_{8,2}$ , 2 треугольника, квадрат, ромб, шестиугольник:  
 $S_{2,2}$ , ромб;  $S_{10,4} = \circ S_{8,4} + S_{2,2}$ .

### 1.9.3 Соединения 5-составного и 5-составного тел

$S_{5,1}$ , 2 треугольника, трапеция:  
 $S_{5,1}$ , треугольник;  $S_{10,5} = \circ S_{5,1} + S_{5,1}$ .

## 1.10 11-составные тела

### 1.10.1 Соединения 10-составного и 1-составного тел

1.  $S_{10,1}$ , треугольник, квадрат, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:  
 $M_2$ , квадрат;  $S_{11,1} = \circ S_{10,1} + M_2$ .
2.  $S_{10,4}$ , треугольник, квадрат, прямоугольник, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:  
 $M_2$ , квадрат;  $S_{11,2} = \circ S_{10,4} + M_2$ .
3.  $S_{10,5}$ , треугольник, трапеция:  
 $M_1$ , треугольник;  $S_{11,3} = \circ S_{10,5} + M_1$ .

## 1.11 12-составные тела

### 1.11.1 Соединения 11-составного и 1-составного тел

1.  $S_{11,2}$ , треугольник, параллелограмм, прямоугольник, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:  
 $M_1$ , треугольник;  $S_{12,1} = \circ S_{11,2} + M_1$ .

2.  $S_{11,3}$ , 2 треугольника, трапеция:

$$M_1, \text{ треугольник; } S_{12,2} = \circ S_{11,3} + M_1.$$

#### 1.11.2 Соединения 9-составного и 3-составного тел

1.  $S_{9,1}$ , треугольник, квадрат, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:

$$S_{3,1}, \text{ трапеция; } S_{12,3} = S_{9,1} + S_{3,1};$$

$$S_{3,1}, \text{ трапеция; } S_{12,4} = \circ S_{9,1} + S'_{3,1};$$

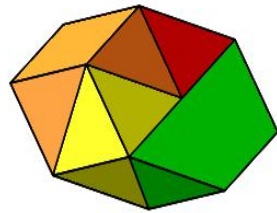


Рисунок 8 —  $S_{12,3} = Q_1 = S_{9,1} + S_{3,1}$

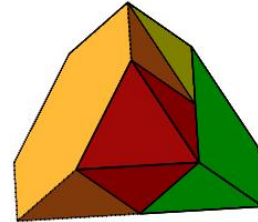


Рисунок 9 —  $S_{12,4} = \circ S_{9,1} + S'_{3,1}$

2.  $S_{9,3}$ , 2 квадрата, трапеция:

$$S_{3,1}, \text{ трапеция; } S_{12,5} = \circ S_{9,3} + S_{3,1}.$$

#### 1.12 13-составные тела

##### 1.12.1 Соединения 12-составного и 1-составного тел

1.  $S_{12,3}$ , квадрат, ромб, шестиугольник:

$$M_2, \text{ квадрат; } S_{13,1} = \circ S_{12,3} + M_2.$$

2.  $S_{12,4}$ , треугольник, прямоугольник, трапеция, шестиугольник:

$$M_1, \text{ треугольник; } S_{13,2} = \circ S_{12,4} + M_1.$$

##### 1.12.2 Соединения 10-составного и 3-составного тел

$S_{10,4}$ , треугольник, квадрат, прямоугольник, ромб, шестиугольник, 2 трапеции:

$$S_{3,1}, \text{ трапеция; } S_{13,3} = \circ S_{10,4} + S_{3,1}.$$

### 1.13 14-составные тела

#### 1.13.1 Соединения 13-составного и 1-составного тел

1.  $S_{13,1}$ , треугольник, квадрат, трапеция, ромб, пятиугольник, шестиугольник:

$$M_1, \text{ треугольник; } S_{14,1} = {}^\circ S_{13,1} + M_1;$$

$$M_2, \text{ квадрат; } S_{14,2} = {}^\circ S_{13,1} + M_2.$$

2.  $S_{13,3}$ , треугольник, квадрат, 2 трапеции, прямоугольник, шестиугольник:

$$M_2, \text{ квадрат; } S_{14,3} = {}^\circ S_{13,3} + M_2.$$

#### 1.13.2 Соединения 12-составных и 2-составных тел

$S_{12,3}$ , квадрат, ромб, шестиугольник:

$$S_{2,2}, \text{ ромб; } S_{14,4} = {}^\circ S_{12,3} + S_{2,2}.$$

#### 1.13.3 Соединения 7-составных и 7-составных тел

$S_{7,2}$ , 2 треугольника, квадрат, шестиугольник:

$$S_{7,2}, \text{ шестиугольник; } S_{14,5} = S_{7,4} + S_{7,4};$$

$$S_{7,2}, \text{ шестиугольник; } S_{14,6} = S_{7,4} + S'_{7,4}.$$

*Замечание 1.* Паркетный многогранник с единственной фиктивной вершиной типа  $[3, 3, 4, 3, 4]$  получил в статье [4] обозначение  $7c$ , рис. 10. Такое строение определяет тип  $[4, 12, 6, 12, 4, 12^2]$  этого многоугольника. Существует призма

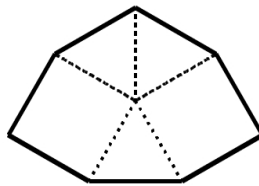


Рисунок 10 — Паркетный многоугольник  $7c$

с боковыми квадратными гранями и основаниями  $7c$ , она не будет рассекаться плоскостью на многогранники, грани которых составлены из правильных многоугольников с единичными ребрами. С другой стороны, эта призма составлена из двух призм с основаниями типа  $[3, 12, 4^2, 12]$  и призмы с треугольными основаниями.



**Следствие 1.1.1.** Следующие соединения пирамид  $M_1, M_2, M_3$ , отличающиеся от соединений теоремы, но приводящие к уже найденным выпуклым многогранникам, составленным из не более четырнадцати правильных пирамид с единичными ребрами, являются выпуклыми:

- $S_{3,2} = S_{2,3} + M_1$ ,
- $S_{4,1} = S_{3,2} + M'_1 = S_{2,2} + S'''_{2,2}$ ,  
 $S_{4,2} = S_{2,2} + S^{iv}_{2,2}$ ,  
 $S_{4,3} = S_{2,2} + S^v_{2,2}$ ,
- $S_{5,2} = S_{4,6} + M_2 = S_{3,2} + S_{2,2}$ ,
- $S_{6,1} = S_{3,1} + S'_{3,1}$ ,  
 $S_{6,2} = S_{4,3} + S_{2,2} = S_{4,4} + S'_{2,2}$ ,  
 $S_{6,3} = S_{3,2} + S_{3,2}$ ,  
 $S_{6,4} = S_{3,1} + S_{3,3}$ ,
- $S_{7,1} = S_{5,2} + S_{2,2} = S_{4,1} + S_{3,2}$ ,  
 $S_{7,3} = S_{6,3} + M_1$ ,  
 $S_{7,2} = S_{5,2} + S_{2,2} = S_{4,1} + S_{3,1}$ ,
- $S_{8,1} = S_{6,2} + S_{2,2} = S_{4,3} + S_{4,3}$ ,  
 $S_{8,3} = S_{5,1} + S_{3,1}$ ,  
 $S_{8,2} = S_{6,2} + S_{2,2} = S_{6,4} + S_{2,2} = S_{5,1} + S_{3,3}$ ,
- $S_{10,1} = S_{6,2} + S_{4,1} = S_{6,4} + S_{4,2} = S_{5,1} + S_{5,2}$ ,  
 $S_{10,2} = S_{6,3} + S_{4,1}$ ,  
 $S_{10,4} = S_{6,2} + S_{4,2} = S_{6,2} + S_{4,6}$ ,
- $S_{11,1} = S_{10,2} + M_1 = S_{8,2} + S_{3,3} = S_{7,3} + S_{4,1} = S_{7,4} + S_{4,2} = S_{6,3} + S_{5,1}$ ,  
 $S_{11,2} = S_{9,1} + S_{2,2} = S_{7,3} + S_{4,2} = S_{7,4} + S_{4,1} = S_{6,2} + S_{5,2}$ ,  
 $S_{11,3} = S_{6,1} + S_{5,1}$ ,
- $S_{12,1} = S_{10,1} + S_{2,2} = S_{10,4} + S_{2,2} = S_{8,1} + S_{4,2} = S_{8,6} + S_{4,2} = S_{6,2} + S_{6,2}$ ,  
 $S_{12,2} = S_{6,1} + S_{6,1}$ ,  
 $S_{12,3} = S_{6,2} + S'_{6,2} = S_{6,4} + S_{6,4}$ ,  
 $S_{12,4} = S_{9,2} + S_{3,3}$ ,
- $S_{13,1} = S_{9,1} + S_{4,1} = S_{7,3} + S_{6,2}$ ,  
 $S_{13,2} = S_{10,1} + S_{3,3} = S_{10,4} + S_{3,3} = S_{9,2} + S_{4,2} = S_{8,3} + S_{5,1} = S_{7,4} + S_{6,1}$ ,

- $S_{14,1} = S_{12,3} + S'_{2,2} = S_{9,1} + S_{5,1} = S_{8,1} + S_{6,2} = S_{8,2} + S_{6,4},$   
 $S_{14,2} = S_{11,2} + S_{3,3} = S_{10,2} + S_{4,1} = S_{7,1} + S_{7,1} = S_{7,4} + S_{7,4},$   
 $S_{14,3} = S_{10,1} + S_{4,6} = S_{10,4} + S_{4,2},$   
 $S_{14,4} = S_{11,2} + S_{3,1} = S_{10,1} + S_{4,2} = S_{8,2} + S_{6,2} = S_{8,6} + S_{6,4}.$

**Следствие 1.1.2.** Существует серия выпуклых многогранников, составленных из не более 14 правильных пирамид  ${}^2M_1 = S_{6,1}$  и  ${}^2M_2 = S_{10,3}$  с удвоенными ребрами:

- $S_{12,2} = {}^2M_1 + {}^2M_1, {}^2M_1 + {}^2M_2, {}^2M_2 + {}^2M_2$
- $({}^2M_1 + {}^2M_2) + {}^2M_2$
- $(({}^2M_1 + {}^2M_2) + {}^2M_2) + {}^2M_1, ({}^2M_1 + {}^2M_2) + ({}^2M_1 + {}^2M_2),$   
 $({}^2M_1 + {}^2M_2) + ({}^2M_1 + {}^2M_2)'$
- $(({}^2M_1 + {}^2M_2) + ({}^2M_1 + {}^2M_2)) + (({}^2M_1 + {}^2M_2) + {}^2M_1)$
- $(((({}^2M_1 + {}^2M_2) + ({}^2M_1 + {}^2M_2)) + (({}^2M_1 + {}^2M_2) + {}^2M_1)) + {}^2M_2$
- $(((({}^2M_1 + {}^2M_2) + ({}^2M_1 + {}^2M_2)) + (({}^2M_1 + {}^2M_2) + {}^2M_1)) +$   
 $+ ((({}^2M_1 + {}^2M_2) + ({}^2M_1 + {}^2M_2)) + (({}^2M_1 + {}^2M_2) + {}^2M_1))$

*Замечание 2.* Многогранники следствия 2 подобны составленным из правильных пирамид многогранникам с единичными ребрами. Более слабым, чем подобие, является условие совпадения типов многогранников.

**Определение 1.1.** Типом вершины многогранника и, в частности, многоугольника называется упорядоченный набор чисел  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , равных величинам плоских углов  $k$  граней, встречающихся в данной вершине при обходе вокруг вершины от ее плоского угла к смежному ее плоскому углу, затем — к смежному со вторым углом третьему плоскому углу вершины. Если  $k > 3$ , то необходимо перейти к четвертому и, быть может, следующему за ним плоскому углу вершины. Поскольку подобные многогранники мы не различаем, относя к подобию и несобственное (по другой терминологии второго рода) преобразование, меняющее с фиксированным коэффициентом расстояние между точками и их образами, то к одному типу относятся все типы, полученные из данного, циклической перестановкой его чисел, обратной перестановкой и их произведениями таких перестановок. Если на множестве всех типов вершин, равных данному типу, ввести лексикографический порядок, т.е. как при записи натурального числа арабскими цифрами, то наиболее употребительной будет запись наименьшего типа.

Вершине паркетного многоугольника соответствует плоский угол такой, как у правильного  $n$ -угольника. Поэтому такому углу в типе паркетного  $n$ -угольника вместо его величины  $\frac{n-2}{2n}\pi$  будем записывать  $n$ .

**Определение 1.2.** Типом многоугольника называется упорядоченный набор типов его вершин, соответствующий расположению вершин при обходе по границе многоугольника. Из всех записей одного типа многоугольника наиболее употребительную выбираем так, как делали это для типа вершины.

Типы паркетных многоугольников давно известны: если паркетный многоугольник можно сложить из двух и более равноугольных многоугольников, то его тип можно найти в [3, 4]. Из 23 типов паркетных многоугольников только  $(3, 3, 6, 6)$  (трапеция) и  $(3, 6, 3, 6)$  (ромб), а также  $(6, 12^2, 6, 12^6)$  и  $(6, 12^4, 6, 12^4)$  отличаются лишь перестановками чисел.

**Определение 1.3.** Типом многогранника называется алгебраическая модель, носителем  $v$  которой служит упорядоченный набор типов вершин, а каждое множество отношений  $f$  состоит из упорядоченных наборов  $f_\tau$  номеров вершин грани, где буквой  $\tau$  обозначен тип грани  $f_\tau$ .

Скорее всего указание типа грани в определении типа многогранника является избыточным. По крайней мере следующие примеры позволяют надеяться, что соответствующее утверждение будет доказано.

**Пример 1.1.** Возьмем многогранник  $S_{4,5}$  и выпишем его тип.

$$\langle \{(3^4), (3, 4, 3, 6), (3, 4, 3, 4), (3, 4, 3, 6), (3, 4, 3, 6)(3, 3, 4), (3, 6, 4), (3, 3, 4), f\} \rangle,$$

$$f = \{[1, 2, 8, 7], [1, 4, 6, 5], [1, 5, 2], [1, 7, 4], [2, 3, 8], [2, 5, 6, 3], [3, 4, 7, 8], [3, 6, 4]\}.$$

1. Возьмем первую вершину, она имеет тип  $(3^4)$ .

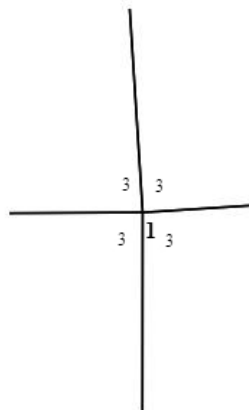


Рисунок 11 — Шаг 1

2. Из первой вершины выходят четыре грани:  $[1, 2, 8, 7]$ ,  $[1, 4, 6, 5]$ ,  $[1, 5, 2]$ ,  $[1, 7, 4]$ . Построим первую из них, а именно  $[1, 2, 8, 7]$ .

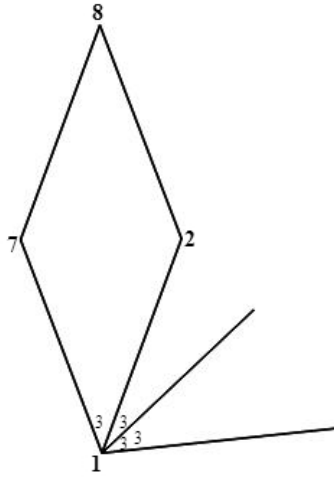


Рисунок 12 — Шаг 2

3. Построим следующую грань  $[1, 5, 2]$ , она имеет тип  $(3^3)$ . Следовательно, у второй и пятой вершин пишем 3. Далее построим грань  $[1, 4, 6, 5]$ . Строим грань  $[1, 7, 4]$ , которая имеет тип  $(3^4)$ . Из этого следует, что у седьмой и четвертой вершины мы записываем 3.

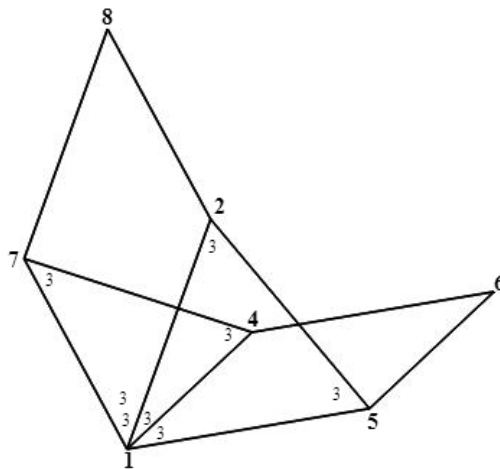


Рисунок 13 — Шаг 3

4. Если все плоские углы вершины были помечены цифрами на предыдущем рисунке, то на следующих рисунках эти метки будут опущены для облегчения их использования. Теперь построим грань  $[2, 3, 8]$ . Эта грань имеет тип  $(3^3)$ , поэтому мы пишем 3 у второй и восьмой вершины.

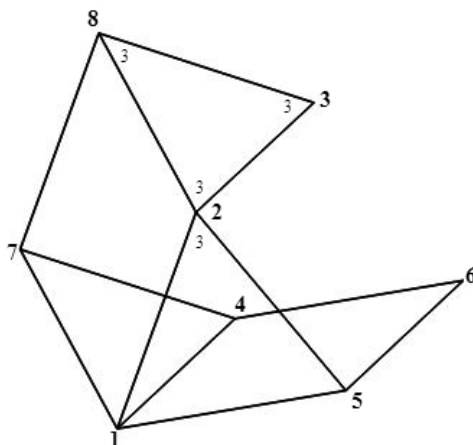


Рисунок 14 — Шаг 4

5. Вернемся к грани  $[1, 2, 8, 7]$  и рассмотрим вторую вершину. Эта вершина имеет тип  $(3, 4, 3, 6)$ . Не трудно показать, что для данной грани у вершины два записывается 6. Обратившись к работе [4], можно увидеть, что среди всех типов паркетных многоугольников не существует такого, в записи которого стоят одновременно 3 и 4. Следовательно у второй вершины записываем 6. Теперь рассмотрим восьмую вершину. Она имеет тип  $(3, 3, 4)$ . 4 мы записать не можем ввиду несуществования такого типа, значит, остается только 3. Отсюда следует, что для седьмой вершины мы можем записать только 6.

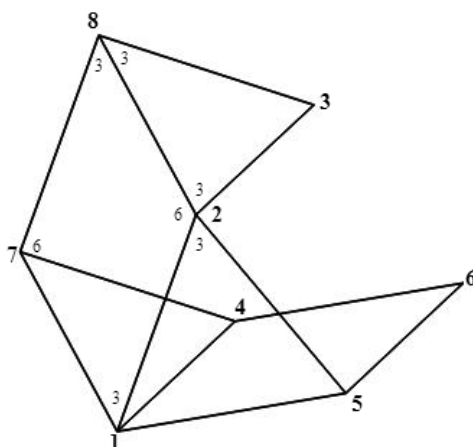


Рисунок 15 — Шаг 5

6. Теперь вернемся к грани  $[1, 4, 6, 5]$ . Так как первая вершина имеет в записи тройку, то мы имеем грань типа  $[3, 3, 6, 6]$  или  $[3, 6, 3, 6]$ . Рассмотрим четвертую вершину, которая имеет тип  $(3, 4, 3, 6)$ . Записать 4 мы не мо-

жем, т. к. такой тип не существует, но и 3 мы не можем записать, т. к. она записана у первой вершины. Значит, остается только 6. Следовательно, пишем у шестой вершины 3, а у пятой записываем 6.

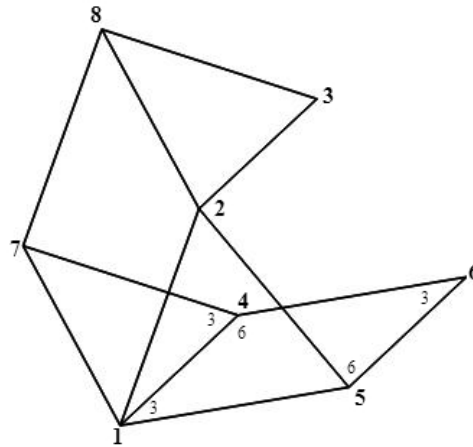


Рисунок 16 — Шаг 6

7. Построим грань  $[2, 5, 6, 3]$ . Вторая вершина этой грани имеет тип  $(3, 4, 3, 6)$ . Исходя из этого мы можем записать 4 у второй вершины для данной грани. Теперь рассмотрим пятую вершину. Она имеет тип  $(3, 4, 6)$ . Поэтому для грани  $[2, 5, 6, 3]$  у рассматриваемой вершины мы записываем 4, отсюда, можно увидеть, что у шестой и третьей вершины будет стоять 4, т. к. грань  $[2, 5, 6, 3]$  имеет тип  $(4^4)$ .

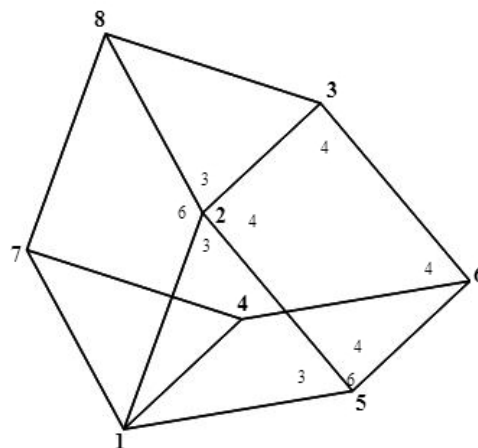


Рисунок 17 — Шаг 7

8. Теперь построим грань  $[3, 6, 4]$ . Тип этой грани может быть только  $(3^3)$ . Далее построим грань  $[3, 4, 7, 8]$ . Внимательно посмотрев на наше постро-

ение, не трудно заметить, что эта грань имеет тип  $(4^4)$ .

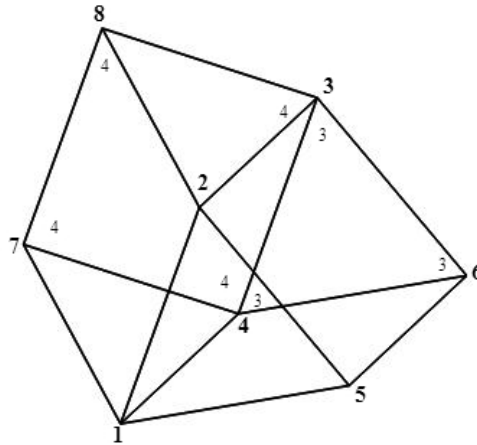


Рисунок 18 — Шаг 8

**Пример 1.2.** Возьмем многогранник  $S_{4,6}$  и выпишем его тип.

$$\langle \{(3, 4, 6), (3, 4, 3, 4), (3, 3, 4), (3, 4, 6), (3, 6, 4), (3, 6, 4), (3, 3, 4), f\} \rangle,$$

$$f = \{[1, 5, 2], [1, 2, 6, 7], [1, 7, 3, 5], [2, 4, 6], [2, 5, 3, 4], [3, 7, 6, 4]\}.$$

1. Построим грань  $[1, 5, 2]$ , т. к. эта грань треугольная, то она имеет тип  $(3^3)$ .

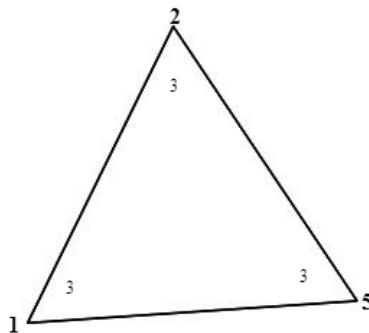


Рисунок 19 — Шаг 1

2. Теперь построим грань  $[1, 2, 6, 7]$ . Она является смежной к уже построенной в предыдущем шаге грани  $[1, 5, 2]$  и имеет общую с ней вторую

вершину. Эта вершина имеет тип  $(3, 4, 3, 4)$ . Отсюда следует, что у грани  $[1, 2, 6, 7]$  у второй вершины может стоять только 4. Поэтому мы записываем всем остальным вершинам этой грани 4, т. к. других типов четырехугольников с паркетными гранями, содержащих в своей записи 4, не существует.

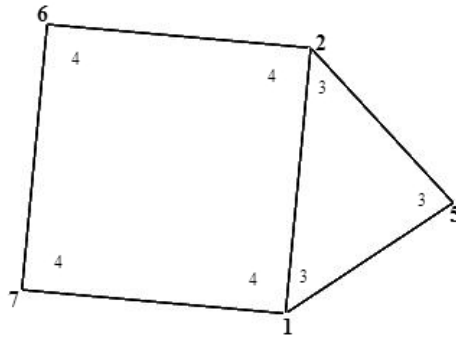


Рисунок 20 — Шаг 2

3. Далее строим грань  $[1, 7, 3, 5]$ . Рассмотрим первую вершину, она имеет тип  $(3, 4, 6)$ , т. к. 3 и 4 уже заняты, то остается только 6, поэтому ее мы записываем для данной грани у первой вершины. Следовательно, эта грань может иметь только тип  $(3, 6, 3, 6)$  или  $(3, 3, 6, 6)$ . Теперь рассмотрим пятую вершину, она имеет тип  $(3, 6, 4)$ . Т. к. 3 уже занята, а 4 не может стоять, то остается только 6. Отсюда, тип грани будет  $(3, 3, 6, 6)$ .

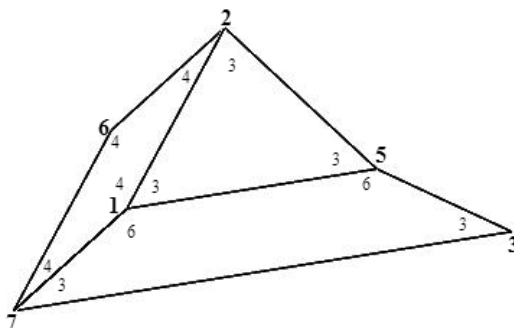


Рисунок 21 — Шаг 3



4. Построим треугольную грань  $[2, 6, 4]$ , она имеет тип  $(3^3)$ .

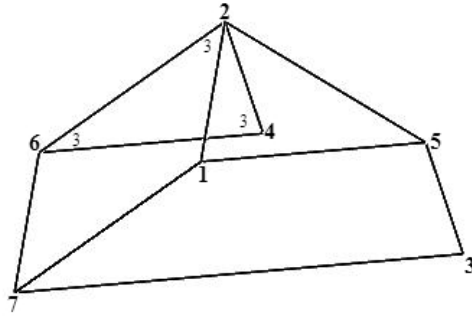


Рисунок 22 — Шаг 4

5. Построим грань  $[2, 5, 3, 4]$ , она имеет тип  $(4^4)$ , т. к. внимательно взглянув на вторую вершину, можно понять, что остается только 4.

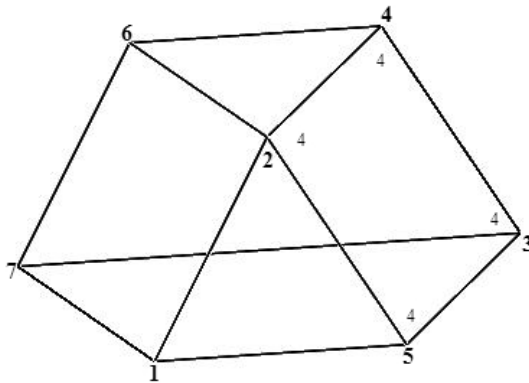


Рисунок 23 — Шаг 5

6. Наконец, рассмотрим последнюю грань  $[3, 7, 6, 4]$ . Четвертая вершина имеет тип  $(3, 6, 4)$  и поскольку 3 и 4 уже заняты, остается только 6, следовательно тип данной грани может быть только  $(3, 6, 3, 6)$  или  $(3, 3, 6, 6)$ . Рассмотрим седьмую вершину, ее тип  $(3, 3, 4)$ , 4 не может быть ввиду предыдущих рассуждений, значит остается 3. Рассмотрим третью вершину, ее тип  $(3, 3, 4)$ , аналогичным образом мы исключаем 4 и записываем 3. Отсюда, тип грани  $[3, 7, 6, 4]$  будет  $(3, 3, 6, 6)$ .

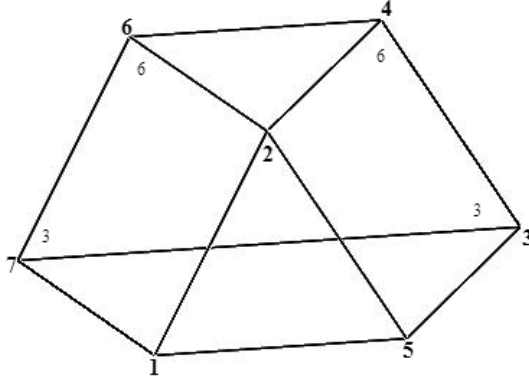


Рисунок 24 — Шаг 6

Проведя все рассуждения, мы получили единственное непротиворечивое построение.

**Следствие 1.1.3.** Типы следующих многогранников совпадают:

1. Рассмотрим первую тройку однотипных многогранников  $S_{4,3}$ ,  $S_{8,1}$ ,  $S_{16,1}$ . Тип таких тел записывается как:

$$\langle \{(3, 6, 6), (3^3), (3, 6, 6), (3, 6, 6), (3^3), (3, 6, 6), (3, 6, 6), (3, 6, 6), f\} \rangle,$$

$$f = \{[1, 2, 6, 5]_{(3,6,3,6)}, [1, 5, 4, 8]_{(3,6,3,6)}, [1, 8, 7, 2]_{(3,6,3,6)}, [2, 7, 3, 6]_{(3,6,3,6)}, [3, 6, 5, 4]_{(3,6,3,6)}, [3, 7, 8, 4]_{(3,6,3,6)}\};$$

2. Тела  $S_{2,2}$ ,  $S_{4,2}$ ,  $S_{16,7}$  имеют тип:

$$\langle \{(3, 3, 4), (3, 4, 6), (3^3), (3, 6, 6), (3, 3, 4), (3, 4, 6), f\} \rangle,$$

$$f = \{[1, 4, 5]_{(3^3)}, [1, 2, 3, 4]_{(3,6,3,6)}, [1, 5, 6, 2]_{(4^4)}, [2, 3, 6]_{(3^3)}, [3, 6, 5, 4]_{(3,6,3,6)}\};$$

3. Тела  $S_{4,4}$ ,  $S_{8,4}$ ,  $S_{8,5}$  имеют следующий тип:

$$\langle \{(3, 6, 4), (4, 6, 6), (3, 3, 4), (3, 4, 6), (4, 6, 6), (3, 3, 4), (3, 6, 4), (3, 4, 6), f\} \rangle,$$

$$f = \{[1, 5, 6, 7]_{(3,6,3,6)}, [1, 5, 8, 3]_{(4^4)}, [1, 7, 2, 3]_{(3,6,3,6)}, [2, 4, 8, 3]_{(3,6,3,6)}, [2, 7, 6, 4]_{(4^4)}, [4, 6, 5, 8]_{(3,6,3,6)}\};$$

4. Рассмотрим пару многогранников  $S_{6,2}$ ,  $S_{12,1}$ . Тип таких тел имеет вид:

$$\langle \{(3, 4, 6), (4, 6, 6), (3, 6, 4), (3, 3, 4), (3, 6, 6), (3, 6, 6), (3, 3, 6), (3^3), f\} \rangle,$$

$$f = \{[1, 2, 3, 4]_{(4^4)}, [1, 4, 7, 8]_{(3,6,3,6)}, [1, 8, 5, 2]_{(3,3,6,6)}, [2, 5, 6, 3]_{(3,6,3,6)}, [3, 6, 7, 4]_{(3,3,6,6)}, [5, 8, 7, 6]_{(3,6,3,6)}\};$$

5. Рассмотрим следующую пару многогранников  $S_{6,4}$ ,  $S_{12,5}$ . Тип таких тел имеет вид:

$$\langle \{(3, 4, 6), (3, 3, 4), (4, 6, 6), (3, 4, 6), (3, 6, 4), (3, 3, 4), (4, 6, 6), (3, 6, 4), f\} \rangle,$$

$$f = \{ [1, 2, 3, 4]_{(3,6,3,6)}, [1, 2, 6, 5]_{(4^4)}, [1, 4, 8, 5]_{(3,3,6,6)}, [2, 6, 7, 3]_{(3,3,6,6)}, \\ [3, 7, 8, 4]_{(4^4)}, [5, 8, 7, 6]_{(3,6,3,6)} \};$$

6. Тела  $S_{7,4}$ ,  $S_{14,5}$  имеют следующий тип:

$$\langle \{(3, 4, 6), (3, 4, 6), (3, 4, 6), (3, 4, 6), (3, 4, 6), (3, 4, 6), (3, 4, 3, 4), (3, 4, 3, 4), \\ (3, 4, 3, 4), f\} \rangle,$$

$$f = \{ [1, 9, 6]_{(3^3)}, [2, 7, 4]_{(3^3)}, [2, 8, 9]_{(3^3)}, [3, 5, 8]_{(3^3)}, [1, 7, 2, 9]_{(4^4)}, \\ [2, 4, 3, 8]_{(4^4)}, [5, 6, 9, 8]_{(4^4)}, [1, 6, 5, 3, 4, 7]_{(6^6)} \};$$

7. Тела  $S_{8,4}$ ,  $S_{14,3}$  имеют следующий тип:

$$\langle \{(3, 4, 6), (3, 4, 3, 4), (4, 6, 6), (3, 6, 4), (3^4), (3, 6, 6), (3, 6, 4), (4, 6, 6), \\ (3, 4, 6), (3, 6, 6)f\} \rangle,$$

$$f = \{ [5, 10, 6]_{(3^3)}, [1, 2, 7]_{(3^3)}, [1, 2, 3, 4]_{(4^4)}, [2, 7, 9, 8]_{(4^4)}, [2, 8, 5, 3]_{(3,6,3,6)}, \\ [3, 5, 6, 4]_{(3,6,3,6)}, [5, 8, 9, 10]_{(3,6,3,6)}, [1, 7, 9, 10, 6, 4]_{(6^6)} \};$$

*Замечание 3.* В следствие 3 не включены подобные многогранники из следствия 2, но они также являются однотипными.

#### 1.14 Приспособление доказательства теоремы для его автоматизации и ее обобщения

Уже в существующем виде доказательство теоремы частично автоматизировано, потому что, во-первых, алгебраическая модель каждого многогранника теоремы представлена в системах компьютерной алгебры GAP и Maple. А во-вторых, процесс соединения не трудно алгоритмизировать: 1) упорядочить списки фундаментальных граней каждой фигуры и образы каждой такой грани при действии не переворачивающими ее симметриями, которые, в свою очередь, не являются симметриями присоединяемого по этой грани тела; 2) выяснить существование построенного многогранника среди ранее созданных.

Описанное выше доказательство опирается на то, что угол между смежными гранями многогранника теоремы получен соединением двугранных углов, образованных смежными гранями правильных пирамид. В общем случае, при добавлении к правильным пирамидам других выпуклых многогранников с паркетными гранями, число таких двугранных углов и их комбинаций заметно увеличится, см. [1].

## 2 Построение многогранника по группе его симметрий и фундаментальным вершинам

### 2.1 Задание многогранников алгебраической моделью

Алгебраическая модель выпуклого многогранника  $P$  с паркетными гранями и определяется фундаментальными вершинами и симметриями, порождающими группу  $AutP$  симметрий тела  $P$ .

Семинар «Группы и правильные многогранники» уже несколько лет пользуется интегрированной программной средой, в которой по этим вершинам и симметриям строится множество всех вершин многогранника  $P$ . Затем визуально и вручную находились фундаментальные грани и опять применялась интегрированная программная среда.

Ниже представлен алгоритм, по которому ручной этап создания алгебраической модели исключается.

Носитель алгебраической модели многогранника  $P$  будем обозначать буквой  $V$  и называть его элементы вершинами. Занумеруем вершины натуральными числами  $1, 2, 3, \dots, m$  так, что первые  $n$  вершин

$$A_1, A_2, \dots, A_n, n \leq m, \quad (15)$$

являются фундаментальными, т. е. во-первых, объединение орбит этих точек совпадает с множеством вершин многогранника  $P$  при действии его группы симметрий  $AutP$ , и, во-вторых, удаление любой вершины списка (15) приведет к объединению, не совпадающему с множеством  $V$ .

Пусть

$$V = \{A_1, A_2, \dots, A_m | m \geq n\}, \quad (16)$$

каждая вершина  $A_i$  есть координатная тройка, группа  $AutP$  порождена движениями, которые заданы матрицами

$$M_1, M_2, \dots, M_k. \quad (17)$$

Множество граней многогранника  $P$ , которое будем обозначать буквой  $F$ , в алгебраической модели будет набором отношений, каждое из которых представляет собой упорядоченный набор номеров вершин, причем первой записана вершина с наименьшим номером, следующие расположены в порядке обхода грани против часовой стрелки, если находиться вне многогранника.

Рассмотрим пример алгебраической модели, заданной координатными тройками фундаментальных вершин и матрицами, порождающими группу симметрий.

Пример 1. Пусть  $P = M_4 = S_{7,2}$ . Тогда его фундаментальными вершинами можно взять координатные тройки  $(1, 0, 0)$  и  $(0, -\sqrt{3}/3, -\sqrt{6}/3)$ , а

порождающими группу симметрий  $Aut(M_4)$  элементами служат матрицы

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что вершины можно отнести к нульмерным граням, а ребра – к одномерным, им будут соответствовать 0-арные и бинарные отношения, которые будем обозначать  $[i]$  и  $[i, j]$  соответственно для номеров вершин  $i, j$ .

Таким образом, каждый многогранник с гранями, составленными из правильных многоугольников, определяется несколькими тройками чисел, которым соответствуют фундаментальные вершины, и матрицами, порождающими группу симметрий этого тела. В работе мы показываем, как строить орбиты фундаментальных вершин и затем по множеству вершин построить грани. Чтобы это сделать в автоматизированном режиме, нужно реализовать следующий алгоритм.

## 2.2 Описание алгоритма построения граней

Его входными данными служат упорядоченный набор  $v$  координатных троек фундаментальных вершин (15) и соответствующие им 0-мерные грани  $[1], [2], \dots, [m]$ .

1) Построение ребер. Пусть  $v$  — упорядоченный список координатных троек вершин многогранника. Строим все отрезки длины 1, соединяющие вершины списка  $v$  следующим образом.

Двойной цикл. Берем первую вершину, измеряем расстояние до каждой следующей. Если расстояние единичное, то ребро появляется в виде пары: 1 и номер вершины, которую мы взяли. Затем берем вторую вершину и измеряем квадрат расстояния от нее до каждой следующей. Если встречается единичное расстояние между вершинами, то появляется пара, у которой на первом месте стоит 2 и такую пару добавляем к списку пар. Дойдя до вершины с номером  $m - 1$ , получим упорядоченный набор всех ребер. Графически одномерной грани будет соответствовать пунктирный отрезок.

2) Построение треугольных граней. Организуем перебор пар смежных ребер, выясняя для каждой пары лежит ли она в плоскости, содержащей грань. Если пара лежит в такой плоскости, то обозначив ее  $(r_1, r_2)$ , ищем такое ребро  $r_3$ , что ребра  $r_1, r_2, r_3$  соединяют три последовательные вершины этой грани. Если она нетреугольная, то находим другие ее ребра.

Пусть  $f_1$  — построенный в первом пункте алгоритма список ребер. Нужную нам пару  $(r_1, r_2)$  ребер плоскости, содержащей грань, выбираем из пар вида  $(f_1(i), f_1(j))$ , причем номера стоящих в паре первыми ребер принимают значения  $i = 1, 2, \dots, n_1 - 2$ , где  $n_1$  — длина списка  $f_1$ . Пусть  $f_1(i) = (a_1, a_2)$ ,

т. е.  $a_1 = f_1(i)(1)$ ,  $a_2 = f_1(i)(2)$  – номера вершин, которые соединяет ребро  $f_1(i)$ , и определим вектор  $a = v(a_2) - v(a_1)$ , построенный на ребре  $f_1(i)$ . Зафиксировав первое ребро пары  $(r_1, r_2)$ , второе ребро  $f_1(j)$  будем выбирать начиная со следующего за первым, т.е. номера второго ребра в списке  $f_1$  следующие:  $j = i + 1, i + 2, \dots, n_1$ . Если конец  $a_2$  первого ребра пары совпадает с началом второго ребра или  $a_2$  равно концу  $f_1(j)(2)$  второго ребра, то строим вектор  $b = v(f_1(j)(1)) - v(f_1(j)(2))$ . Вектор  $c$ , перпендикулярный векторам  $a$  и  $b$ , находим как их векторное произведение.

Пусть  $\alpha$  – плоскость, содержащая ребра  $(r_1, r_2)$ . Перебирая все вершины, точнее направленные к ним векторы с началом в точке  $v(a_1)$ , по знаку скалярного произведения этого вектора и вектора  $c$  выясняем содержит ли плоскость  $\alpha$  грань синтезируемого многогранника. Если  $\alpha$  содержит такую грань, то из вершин ребер  $r_1$  и  $r_2$  составляем тройку последовательных вершины грани. Затем выясняем, будет ли эта грань треугольная и составляем два списка:  $f$  – список треугольных граней,  $fr$  – список троек номеров вершин, последовательно расположенных на грани, имеющей более трех сторон.

3) Построение  $m$ -угольных граней,  $m > 3$ . Пусть  $n = 10$ . Каждая тройка чисел списка  $fr$  определяет смежные стороны  $r_1$  и  $r_2$  нетреугольной грани. Пробегая  $n$  раз список ребер  $f_1$ , будем выяснять для каждого ребра будет ли оно смежной с  $r_2$  стороной грани. Если это так, то дополняем тройку четвертой вершиной. Выбрав  $n = 10$ , гарантируем, что будут построены  $m$ -угольные грани для  $m < 13$ . Пополняем ими список  $f$  треугольных граней.

Заметим, что в список  $f$  попадут наборы номеров вершин, определяющих одинаковые грани. Поэтому, каждый такой набор упорядочим так, чтобы он начинался с наименьшего номера и другие номера перечислялись в порядке расположения соответствующих им вершин на грани против часовой стрелки, если обходить эту грань снаружи многогранника.

Созданный продукт дополняет интегрированную программную среду систем компьютерной алгебры и графики, в которой по фундаментальным вершинам многогранника и порождающим группу его симметрий движениям строится множество всех его вершин. Ранее визуально и вручную находились по этим вершинам фундаментальные грани, по которым все остальные грани строились автоматически. После описанного в работе усовершенствования ручной этап создания алгебраической модели многогранника исключен.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской диссертации получены следующие результаты:

1. Найдены все выпуклые многогранники, составленные из не более 14 правильногранных пирамид с единичными ребрами, а ребра самого многогранника не превышают числа 2.
2. Найдены однотипные многогранники и их тип.
3. Найдены группы симметрий многогранников и выписаны все фундаментальные вершины и фундаментальные грани.
4. Описан и реализован алгоритм построения многогранника по группе его симметрий и фундаментальным вершинам.

**Апробация работы.** Основные результаты исследования докладывались и обсуждались

1. на вебинаре „Группы и правильногранники“,
2. на секции „Математика“ XVII Международного научно-практического форума студентов, аспирантов и молодых ученых XXI века, ИМФИ КГПУ им. В. П. Астафьева, (Красноярск, 2017),
3. на международной научной конференции „Актуальные проблемы математики и физики“, учебно-научный комплекс КБГУ, (веб-трансляция MIND, 2017).

**Публикации.** По результатам научных исследований опубликована работа: [8].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта №16 – 41 – 240670.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Залгаллер, В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями / В. А. Залгаллер // Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1967, Т. 2: С.5–218.
- 2 Тимофеевко, А. В. К перечню выпуклых правильных многогранников / А. В. Тимофеевко // Современные проблемы математики и механики. Том VI. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова / Под ред. И. Х. Сабитова и В. Н. Чубарикова. – М.: Издательство Моск. ун-та, 2011, С. 155–170.
- 3 Пряхин, Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных / Ю. А. Пряхин // Зап. науч. семинаров ЛОМИ, Т. 45, 1974, С. 111–112.
- 4 Табинова, О. А. О классификации паркетных многоугольников / О. А. Табинова, А. В. Тимофеевко // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева, 2013, 1(23): С. 216–219.
- 5 Гурин, А. М. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями составленными из правильных / А. М. Гурин, В. А. Залгаллер // Труды Математического Общества Санкт-Петербурга, Т. 14, 2008, С. 215–294.
- 6 Tupelo-Schneck, R. Convex regular-faced polyhedra with conditional edges / URL: <http://tupelo-schneck.org/polyhedra/>.
- 7 Weisstein, E. W. Johnson Solid // From MathWorld—A Wolfram Web Resource / URL: <http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html>.
- 8 Полтанов Е. В. О выпуклых соединениях правильных пирамид / Е. В. Полтанов, Д. Н. Судак, А. В. Тимофеевко, А. В. Якушева // Труды 47-й Международной школы-конференции – Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН им. Н. Н. Красовского, 2016, С. 148–158..



## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Группы симметрий движений 3-мерного евклидова пространства многогранников теоремы 1.1

**c\_n**

$[n]^+$  циклическая порядка  $n$  поворотов неправильной правильной пирамиды с  $n$ -угольным основанием

```
a1:=360/n;
g:=Elements(Group([[cos(a1), -sin(a1), 0],
                  [sin(a1), cos(a1), 0],
                  [ 0, 0, 1]])));
```

**2c\_n**

$[n]$  диэдральная симметрий неправильной правильной пирамиды с  $n$ -угольным основанием

```
a1:=360/n;
g:=Elements(Group([[cos(a1), -sin(a1), 0],
                  [sin(a1), cos(a1), 0],
                  [ 0, 0, 1]],
                  [[1, 0, 0],
                  [0, -1, 0],
                  [0, 0, 1]])));
```

**tetr\_2**

$[2, n^+]$   $[3, 3]$  симметрий тетраэдра

```
s:=ER(2); t:=ER(3);
m1:=[[1/s, 1/s, 0],
      [-1/s, 1/s, 0],
      [0, 0, 1]];
m2:=[[s/t, 0, -1/t],
      [0, 1, 0],
      [1/t, 0, s/t]];
m3:=[[1, 0, 0],
      [0, -1/2, -t/2],
      [0, t/2, -1/2]];
l3:=[[ 0, -1, 0 ],
      [ 1, 0, 0 ],
```

```

    [ 0, 0, -1 ] ];
a:=m3^(m2*m1);
b:=m3^((m1*m2)^-1);
g:=Elements(Group(a,b,13));

```

### d\_1d\_n

[2, n] симметрий правильной призмы  $Pi_n$  порядка  $4n$ , при  $n=4$  призма есть отличный от куба прямоугольный параллелепипед с квадратной гранью

```

a1:=360/n;
g:=Elements(
  Group([[cos(a1), -sin(a1), 0],
         [sin(a1), cos(a1), 0],
         [ 0, 0, 1]], [[1, 0, 0],
                       [0, -1, 0],
                       [0, 0, -1]], [[1, 0, 0],
                                       [0, 1, 0],
                                       [0, 0, -1]]));

```

### 2.c\_n

$[2^+, 2n^+]$  расширяющая при нечётных  $n$  группу  $[n]^+$  отражением от точки

```

a1:=360/n;
g:=Elements(Group([[cos(a1), -sin(a1), 0],
                   [sin(a1), cos(a1), 0],
                   [ 0, 0, 1]], [[-1, 0, 0],
                                   [ 0, -1, 0],
                                   [ 0, 0, -1]]));

```

### K4

$[2^+, 2]$  Клейна четверная с вращательной симметрией

```

g:=Elements(Group( [[1, 0, 0],
                    [0, -1, 0],
                    [0, 0, -1]],
                  [[-1, 0, 0],
                   [0, 1, 0],
                   [0, 0, 1]]));

```

## cube\_2

[3,4] симметрий куба

```
alpha:=[[1,0,0],
        [0,0,-1],
        [0,1,0]];
nu:=[[ER(2)/2,0,-ER(2)/2],
     [0,1,0],
     [ER(2)/2,0,ER(2)/2]];
beta:=[[1,0,0],
        [0,-1,0],
        [0,0,-1]];
gamma:=[[1,0,0],
         [0,1,0],
         [0,0,-1]];
g:=Elements(Group(alpha,nu*beta*nu^-1,gamma));
```

## d\_2n

[2<sup>+</sup>, 2n] симметрий антипризмы  $A_n$  порядка  $4n$ , при  $n=3$  вместо октаэдра рассматривается дважды наращенный октаэдр с шестью ромбическими гранями

```
a1:=360/n;a12:=a1/2;
g:=Elements(
  Group([[cos(a1),-sin(a1),0],
         [sin(a1),cos(a1),0],
         [0,0,1]], [[1,0,0],
                    [0,-1,0],
                    [0,0,-1]],
  [[1,0,0],
   [0,1,0],
   [0,0,-1]]*[[cos(a12),-sin(a12),0],
               [sin(a12),cos(a12),0],
               [0,0,1]]));
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Информация о соединениях пирамид теоремы 1.1

**Многогранник  $S_{1,1} = M_1$**

Треугольная пирамида  $S_{1,1}$ , рис. Б.1, имеет одну фундаментальную вершину 1. Действуя на нее группой симметрий  $Aut(S_{1,1}) = tetr\_2$  получим все оставшиеся вершины. Данный многогранник обладает всего одной фундаментальной треугольной гранью, рис. Б.2.

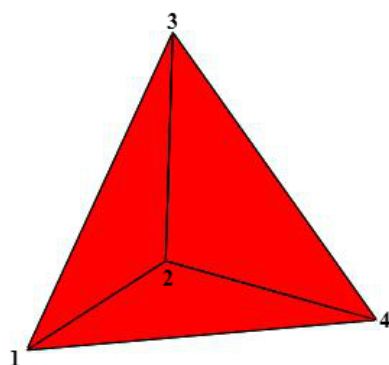


Рисунок Б.1 — Многогранник  $S_{1,1}$

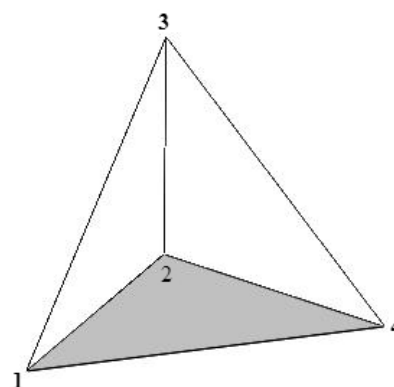


Рисунок Б.2 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{1,1}$

**Многогранник  $S_{1,2} = M_2$**

Пирамида с квадратным основанием  $S_{1,2}$ , рис. Б.3, обладает двумя фундаментальными вершинами 1 и 2 и двумя фундаментальными гранями: треугольной и квадратной, рис. Б.4.  $Aut(S_{1,2}) = 2c\_n, n = 4$ .

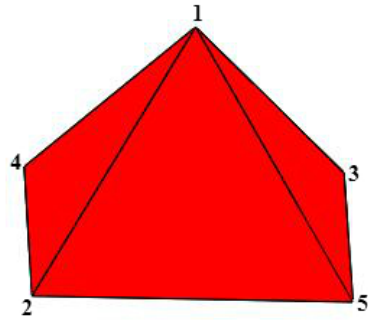


Рисунок Б.3 — Многогранник  $S_{1,2}$

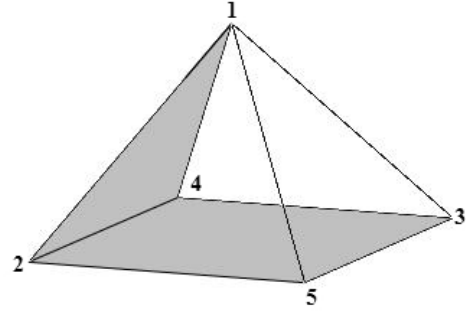


Рисунок Б.4 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{1,2}$

### Многогранник $S_{1,3} = M_3$

Пятиугольная пирамида  $S_{1,3}$ , рис. Б.5, обладает двумя фундаментальными гранями: треугольной и пятиугольной, рис. Б.6. Вершины 1 и 2 являются фундаментальными.  $Aut(S_{1,3}) = 2c_n, n = 1$ .

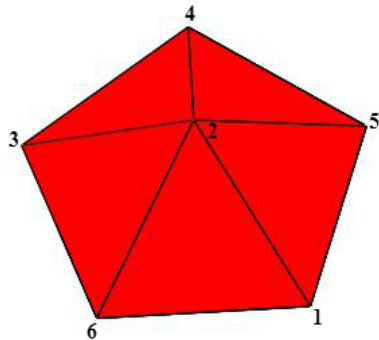


Рисунок Б.5 — Многогранник  $S_{1,3}$

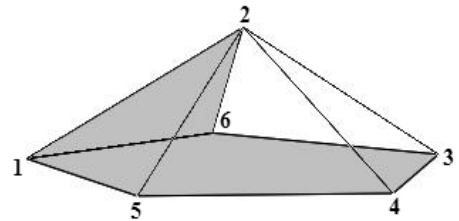


Рисунок Б.6 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{1,3}$

### Многогранник $S_{2,1}$

Тело  $S_{2,1}$ , рис. Б.7, имеет одну фундаментальную треугольную грань, рис. Б.8, и одну фундаментальную вершину 1.  $Aut(S_{2,1}) = d_1 d_n, n = 3$ .

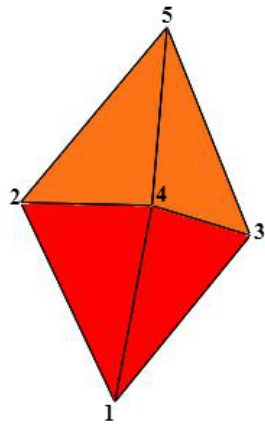


Рисунок Б.7 — Многогранник  $S_{2,1}$

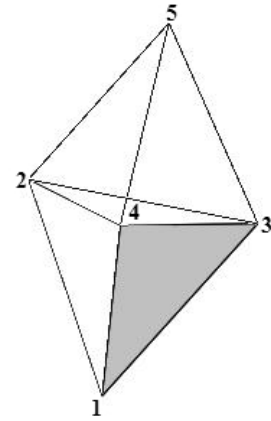


Рисунок Б.8 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{2,1}$

### Многогранник $S_{2,2}$

Тело  $S_{2,2}$ , рис. Б.9, имеет четыре фундаментальных грани: два треугольника, квадрат и ромб, рис. Б.10, и четыре фундаментальных вершины 1–4.  $Aut(S_{2,1}) = 2c_n, n = 1$ .

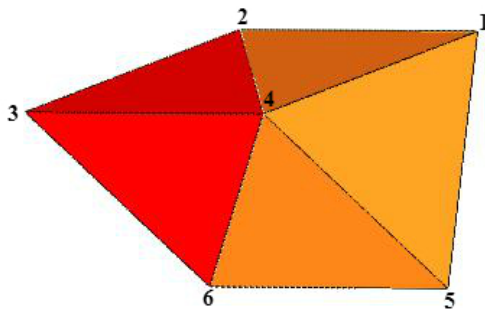


Рисунок Б.9 — Многогранник  $S_{2,2}$

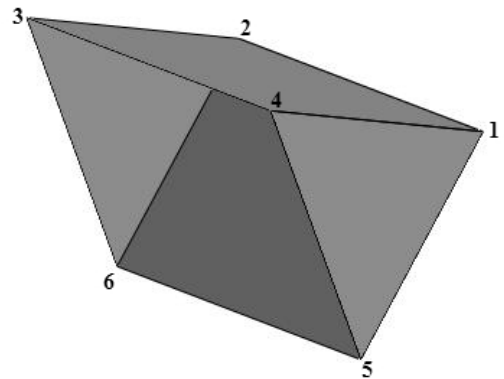


Рисунок Б.10 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{2,2}$

### Многогранник $S_{2,3}$

Тело  $S_{2,3}$ , рис. Б.11, имеет одну фундаментальную треугольную грань, рис. Б.12, и две фундаментальных вершины 1 и 2.  $Aut(S_{2,1}) = d_1 d_n, n = 4$ .

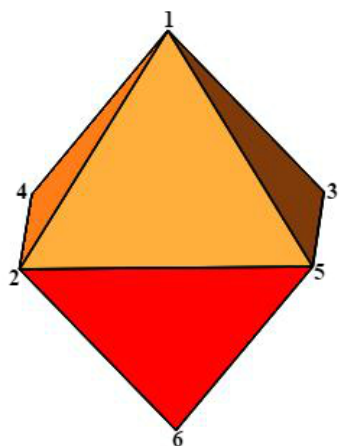


Рисунок Б.11 — Многогранник  $S_{2,3}$

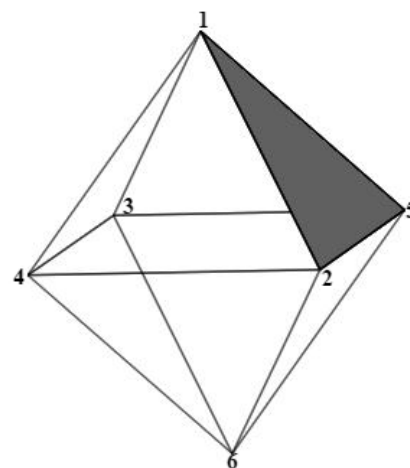


Рисунок Б.12 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{2,3}$

### Многогранник $S_{2,4}$

Многогранник  $S_{2,4}$ , рис. Б.13, обладает одной фундаментальной треугольной гранью, рис. Б.14, и двумя фундаментальными вершинами 1 и 2.  $Aut(S_{1,3}) = d_1 d_n, n = 5$ .

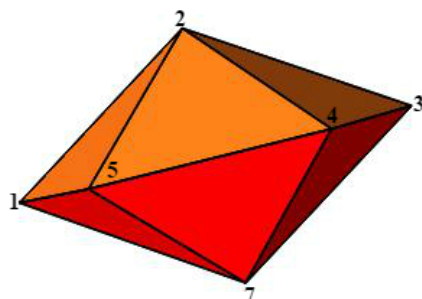


Рисунок Б.13 — Многогранник  $S_{2,4}$

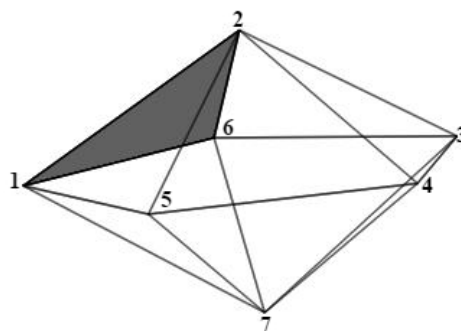


Рисунок Б.14 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{2,4}$

### Многогранник $S_{3,1}$

Тело  $S_{3,1}$ , рис. Б.15, имеет 3 фундаментальные грани: треугольник, квадрат, трапеция, рис. Б.16, и 2 фундаментальные вершины 1 и 2.

$$Aut(S_{3,1}) = 2c_n, n = 2.$$

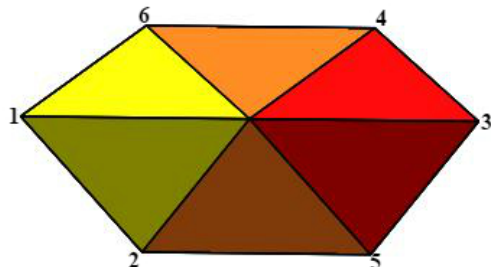


Рисунок Б.15 — Многогранник  $S_{3,1}$

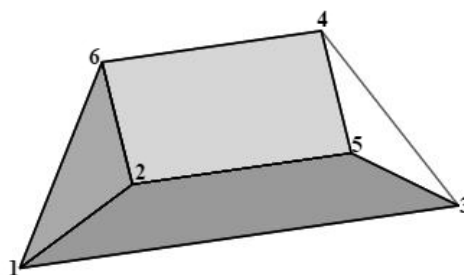


Рисунок Б.16 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{3,1}$

### Многогранник $S_{3,2}$

Тело  $S_{3,2}$ , рис. Б.17, имеет три фундаментальные грани: два треугольника, ромб, рис. Б.18, и фундаментальные вершины 1–3.  $Aut(S_{3,1}) = c_n, n = 3$ .

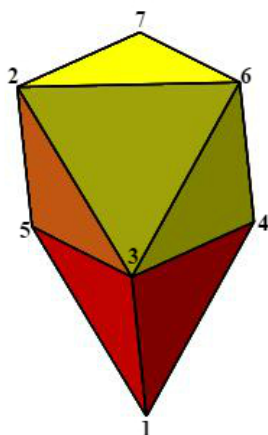


Рисунок Б.17 — Многогранник  $S_{3,2}$

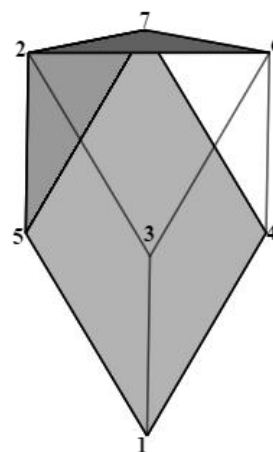


Рисунок Б.18 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{3,2}$



## Многогранник $S_{3,3}$

Тело  $S_{3,3}$ , рис. Б.19, имеет 3 фундаментальные грани: треугольник, прямоугольник, трапеция, рис. Б.20, и две фундаментальные вершины 1 и 2.  $Aut(S_{3,3}) = K4$ ?

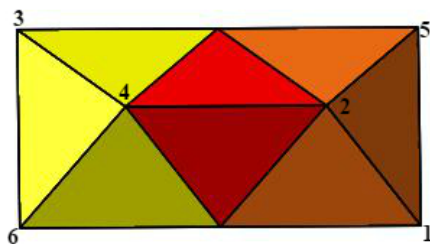


Рисунок Б.19 — Многогранник  $S_{3,3}$

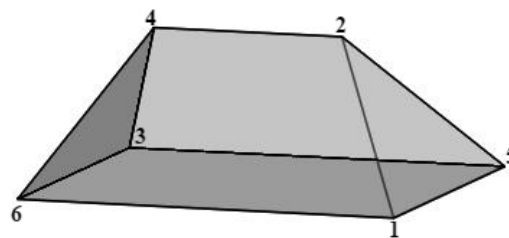


Рисунок Б.20 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{3,3}$

## Многогранник $S_{4,1}$

Тело  $S_{4,1}$ , рис. Б.21, имеет три фундаментальные грани: треугольник, ромб, трапеция, рис. Б.22, и фундаментальные вершины 1, 2 и 3.  $Aut(S_{4,1}) = 2c_n, n = 2$ .

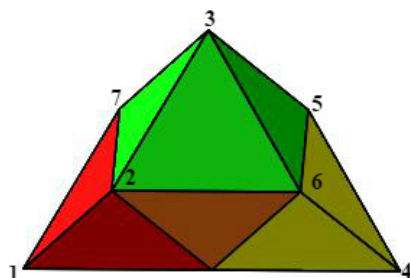


Рисунок Б.21 — Многогранник  $S_{4,1}$

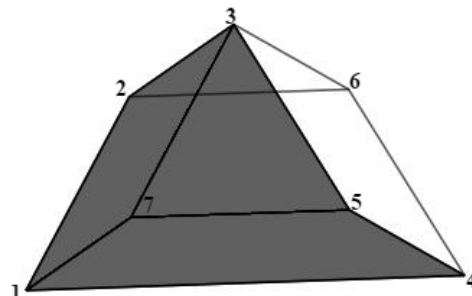


Рисунок Б.22 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{4,1}$

## Многогранник $S_{4,2}$

Тело  $S_{4,2}$ , рис. Б.23, имеет 4 фундаментальных грани: два треугольника, два параллелограмма, рис. Б.24, и фундаментальные вершины: 1–4.  $Aut(S_{4,2}) = 2c_n, n = 1$ .

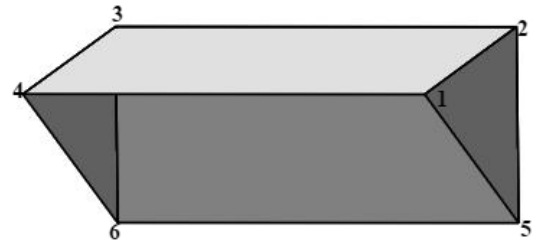
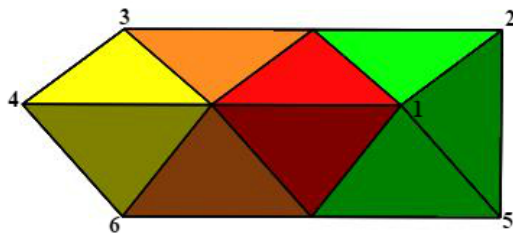


Рисунок Б.23 — Многогранник  $S_{4,2}$

Рисунок Б.24 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{4,2}$

## Многогранник $S_{4,3}$

Тело  $S_{4,3}$ , рис. Б.25, имеет одну фундаментальную треугольную грань, рис. Б.26), и фундаментальные вершины 1 и 2.  $Aut(S_{4,3}) = d_1d_n, n = 3$ .

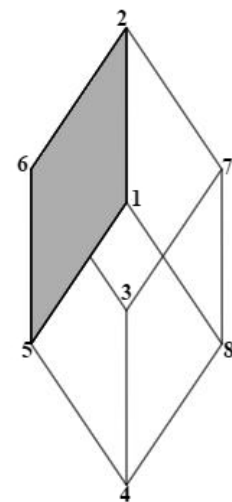
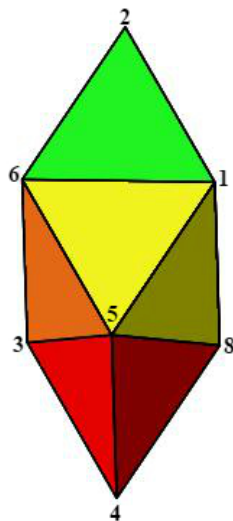


Рисунок Б.25 — Многогранник  $S_{4,3}$

Рисунок Б.26 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{4,3}$

## Многогранник $S_{4,4}$

Тело  $S_{4,4}$ , рис. Б.27, имеет две фундаментальные грани: ромб, квадрат, рис. Б.28, и три фундаментальные вершины: 1, 2 и 3.  $Aut(S_{4,4}) = K_4$ .

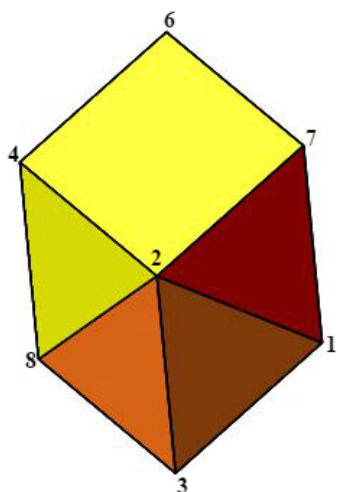


Рисунок Б.27 — Многогранник  $S_{4,4}$

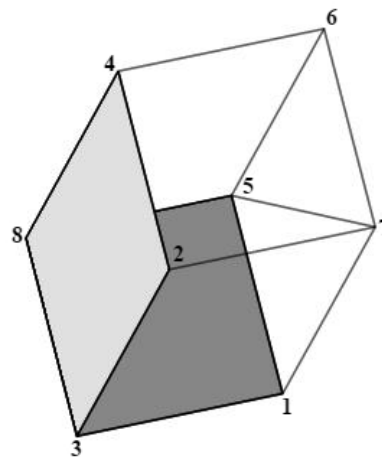


Рисунок Б.28 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{4,4}$

## Многогранник $S_{4,5}$

Тело  $S_{4,5}$ , рис. Б.29, имеет 4 фундаментальные грани: два треугольника, ромб, квадрат, рис. Б.30, и 5 фундаментальных вершин 1–5.  $Aut(S_{4,5}) = c_n$ ,  $n = 2$ .

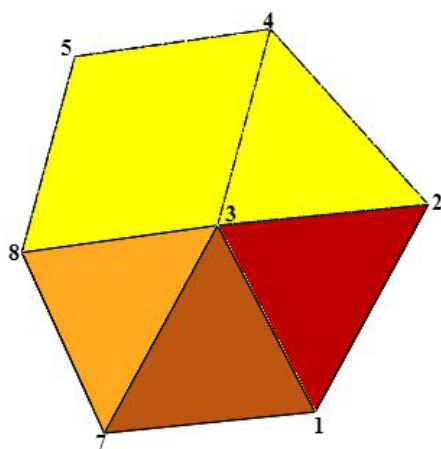


Рисунок Б.29 — Многогранник  $S_{4,5}$

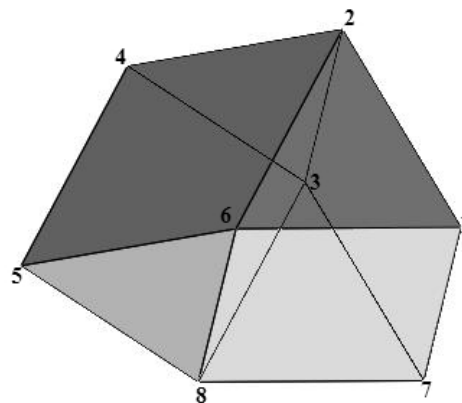


Рисунок Б.30 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{4,5}$

## Многогранник $S_{4,6}$

Тело  $S_{4,6}$ , рис. Б.31, имеет 3 фундаментальные грани: треугольник, трапеция, квадрат, рис. Б.32, и 3 фундаментальные вершины: 1–3.

$$Aut(S_{4,6}) = 2c_n, n = 2.$$

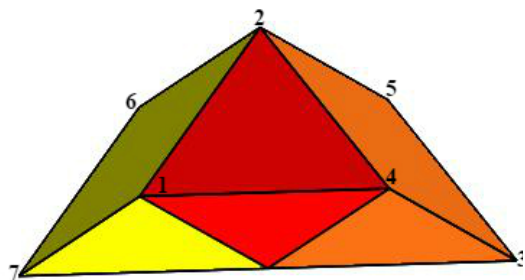


Рисунок Б.31 — Многогранник  $S_{4,6}$

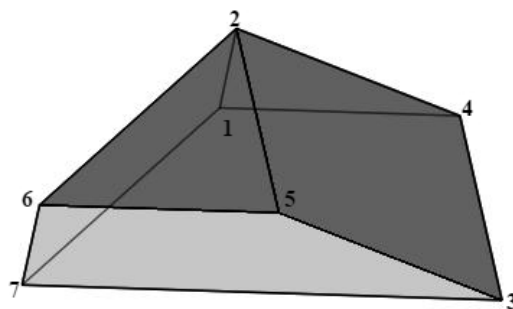


Рисунок Б.32 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{4,6}$

## Многогранник $S_{5,1}$

Тело  $S_{5,1}$ , рис. Б.33, имеет три фундаментальные грани: два треугольника, трапеция, рис. Б.34, и фундаментальные вершины 1 и 2.

$$Aut(S_{5,1}) = 2c_n, n = 3.$$

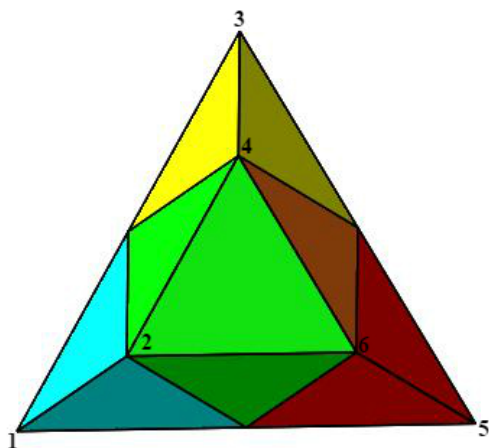


Рисунок Б.33 — Многогранник  $S_{5,1}$

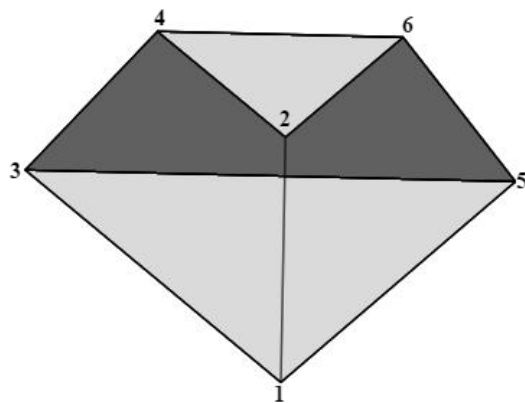


Рисунок Б.34 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{5,1}$

## Многогранник $S_{5,2}$

Тело  $S_{5,2}$ , рис. Б.35, имеет четыре фундаментальные грани: треугольник, квадрат, ромб, трапеция, рис. Б.36, и 6 фундаментальных вершин 1–6.  $Aut(S_{5,2}) = 2c_n, n = 1$ .

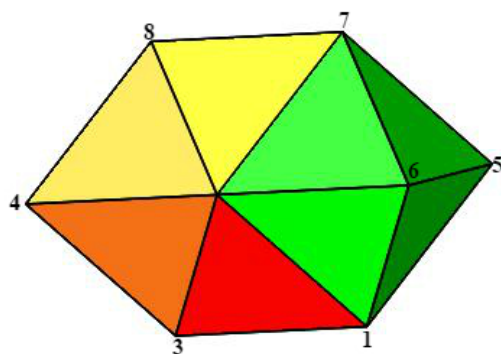


Рисунок Б.35 — Многогранник  $S_{5,2}$

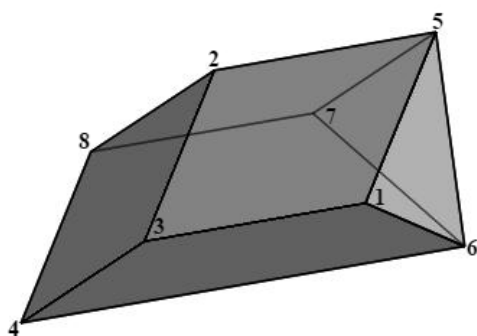


Рисунок Б.36 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{5,2}$

## Многогранник $S_{6,1}$

Тело  $S_{6,1}$ , рис. Б.37, является треугольной пирамидой  $S_{1,1}$  с удвоенными ребрами, поэтому информацию по этому многограннику можно посмотреть на стр. 34.

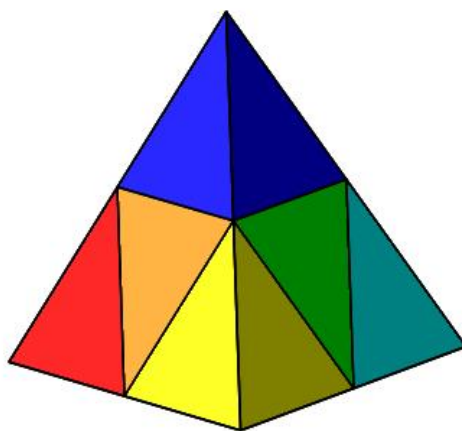


Рисунок Б.37 — Многогранник  $S_{6,1}$

## Многогранник $S_{6,2}$

Тело  $S_{6,2}$ , рис. Б.38, имеет только тождественную симметрию, поэтому все его грани: 2 ромба, 2 трапеции, квадрат, параллелограмм и все 8 вершин являются фундаментальными.

$$Aut(S_{6,2}) = c_n, n = 1.$$

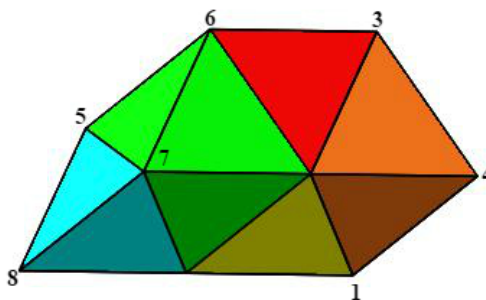


Рисунок Б.38 — Многогранник  $S_{6,2}$

## Многогранник $S_{6,3}$

Тело  $S_{6,3}$ , рис. Б.39, имеет две фундаментальные грани: треугольник, трапеция, рис. Б.40, и фундаментальные вершины 1 и 2.  $Aut(S_{6,3}) = d_1 d_n$ ,  $n = 1$ .

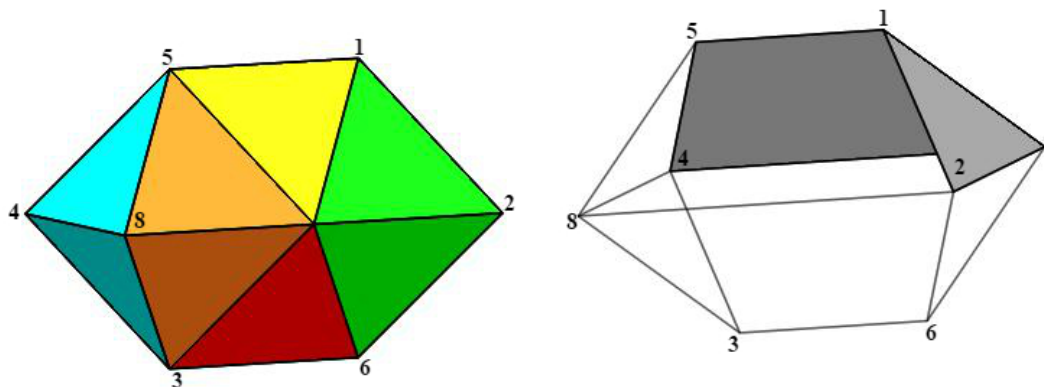


Рисунок Б.39 — Многогранник  $S_{6,3}$

Рисунок Б.40 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{6,3}$

## Многогранник $S_{6,4}$

Тело  $S_{6,4}$ , рис. Б.41, имеет пять фундаментальных граней: квадрат, ромб, 2 трапеции, прямоугольник, рис. Б.42, и 4 фундаментальные вершины 1–4.  $Aut(S_{6,4}) = 2c_n, n = 1$ .

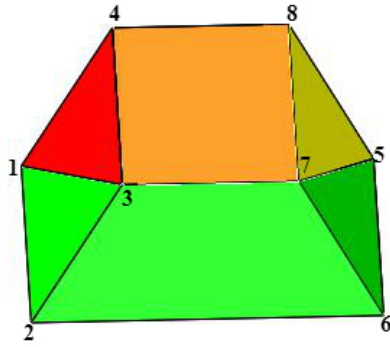


Рисунок Б.41 — Многогранник  $S_{6,4}$

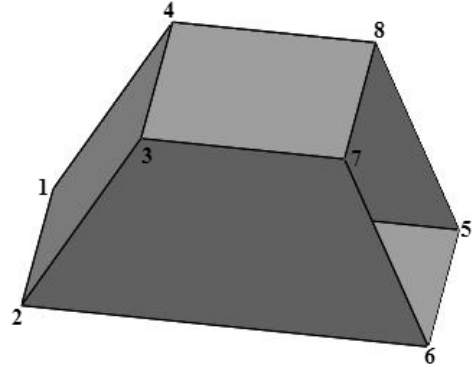


Рисунок Б.42 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{6,4}$

## Многогранник $S_{6,5}$

Тело  $S_{6,5}$ , рис. Б.43, имеет три фундаментальные грани: треугольник, квадрат, трапеция, рис. Б.44, и фундаментальные вершины 1, 2 и 3.  $Aut(S_{6,5}) = 2c_n, n = 2$ .

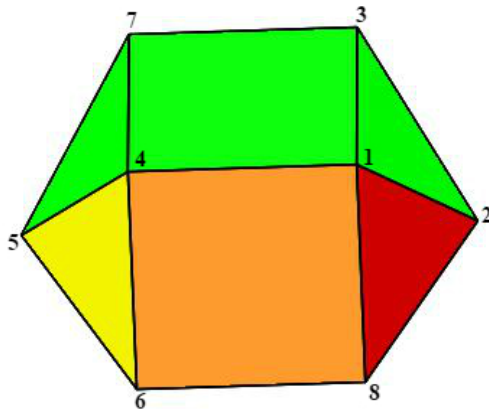


Рисунок Б.43 — Многогранник  $S_{6,5}$

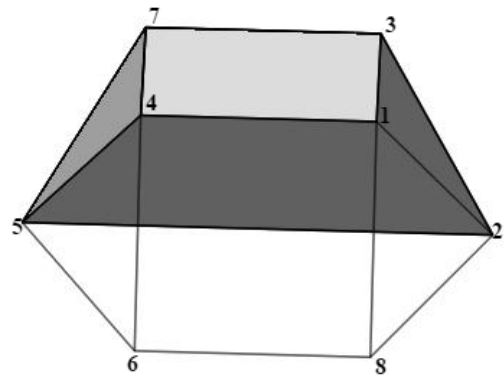


Рисунок Б.44 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{6,5}$

## Многогранник $S_{7,1}$

Тело  $S_{7,1}$ , рис. Б.45, имеет 5 фундаментальных граней: два треугольника, ромб, трапеция, параллелограмм, рис. Б.46, и 6 фундаментальных вершин 1–6.  $Aut(S_{7,1}) = 2c_n, n = 1$ .

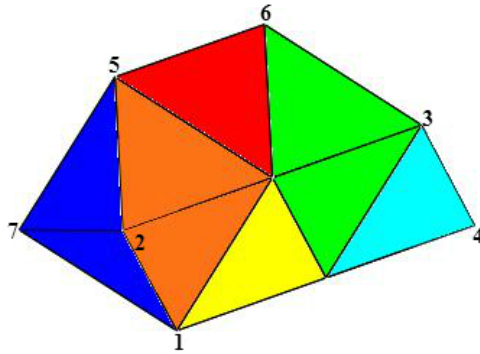


Рисунок Б.45 — Многогранник  $S_{7,1}$

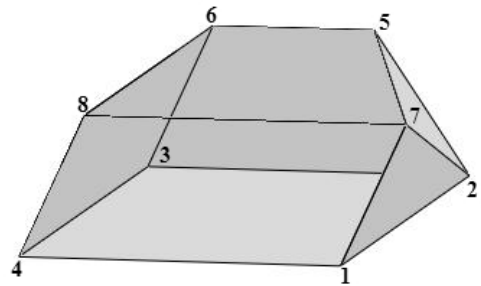


Рисунок Б.46 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{7,1}$

## Многогранник $S_{7,2}$

Тело  $S_{7,2}$ , рис. Б.47, имеет 5 фундаментальных граней: треугольник, треугольник с удвоенными ребрами, 2 трапеции, прямоугольник, рис. Б.48, и 2 фундаментальные вершины 1, 2.  $Aut(S_{7,2}) = 2c_n, n = 1$ .

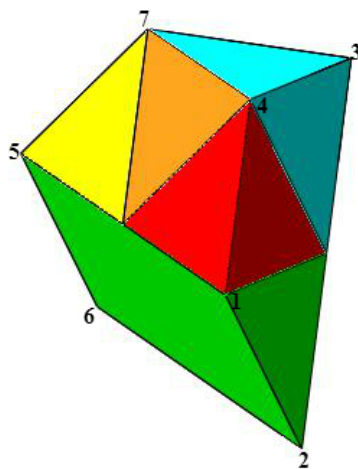


Рисунок Б.47 — Многогранник  $S_{7,2}$

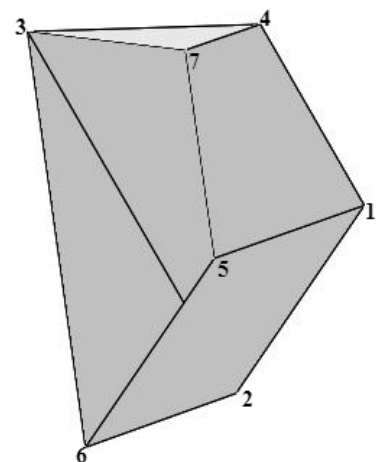


Рисунок Б.48 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{7,2}$



## Многогранник $S_{7,3}$

Тело  $S_{7,3}$ , рис. Б.49, имеет 7 фундаментальных граней: 3 треугольника, квадрат, ромб, 2 трапеции, рис. Б.50, и 5 фундаментальных вершин 3–5,7,8.  $Aut(S_{7,3}) = 2c_n, n = 1$ .

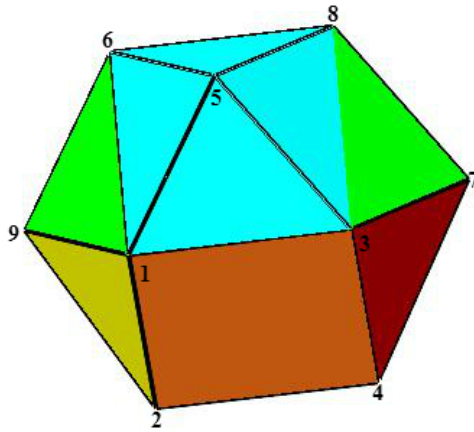


Рисунок Б.49 — Многогранник  $S_{7,3}$

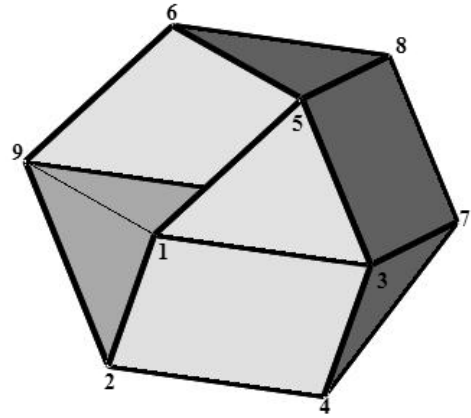


Рисунок Б.50 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{7,3}$

## Многогранник $S_{8,1}$

Тело  $S_{8,1}$ , рис. Б.51, имеет 2 фундаментальные грани: ромб, параллелограмм, рис. Б.52, и 3 фундаментальные вершины 1–3.  $Aut(S_{8,1}) = K4$ .

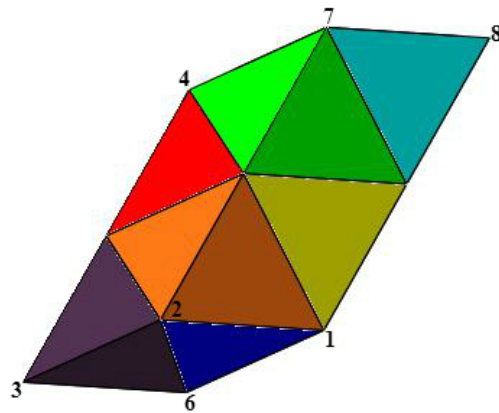


Рисунок Б.51 — Многогранник  $S_{8,1}$

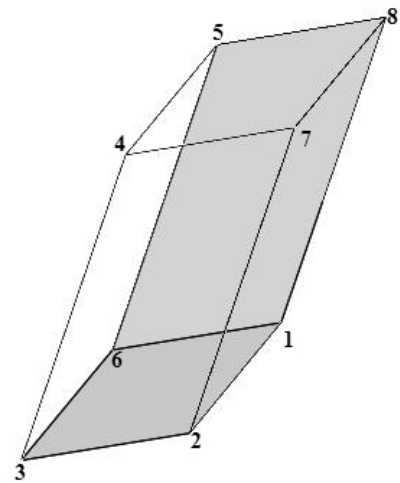


Рисунок Б.52 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{8,1}$

## Многогранник $S_{8,2}$

Тело  $S_{8,2}$ , рис. Б.53, имеет 4 фундаментальных грани: 2 треугольника, прямоугольник, параллелограмм, рис. Б.54, и 4 фундаментальных вершины 1–4.  $Aut(S_{8,2}) = 2c_n, n = 1$ .

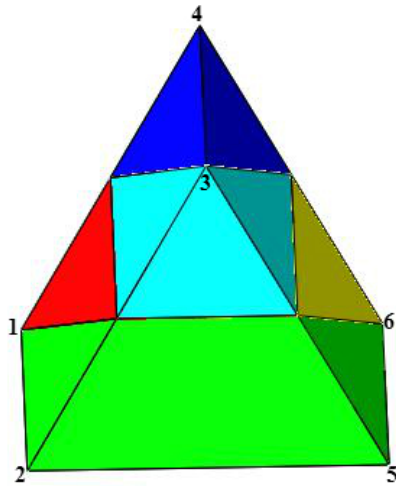


Рисунок Б.53 — Многогранник  $S_{8,2}$

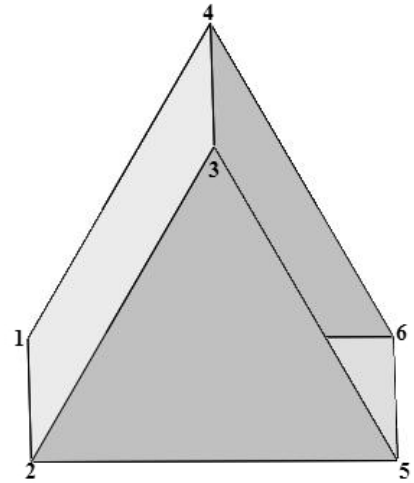


Рисунок Б.54 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{8,2}$

## Многогранник $S_{8,3}$

Тело  $S_{8,3}$ , рис. Б.55, имеет 6 фундаментальных граней: 2 треугольника, треугольник с двойными рёбрами, квадрат, 2 трапеции, рис. Б.56, и 5 фундаментальных вершин 1–5.  $Aut(S_{8,3}) = 2c_n, n = 1$ .

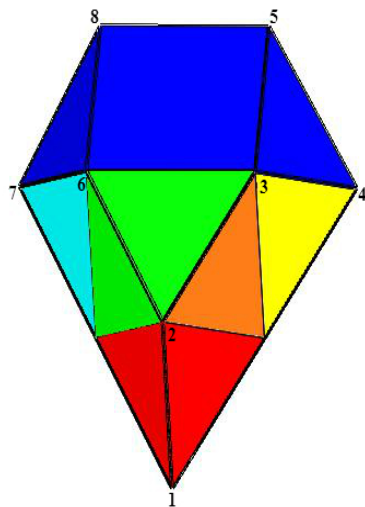


Рисунок Б.55 — Многогранник  $S_{8,3}$

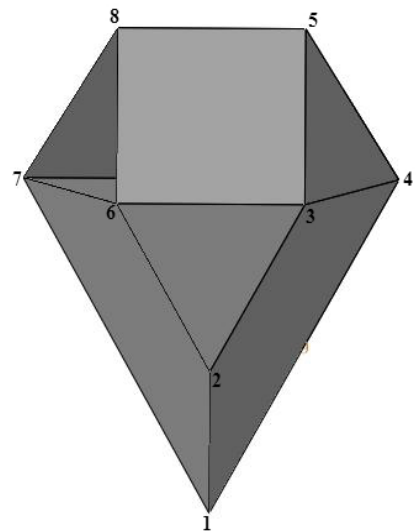


Рисунок Б.56 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{8,3}$

## Многогранник $S_{8,4}$

Тело  $S_{8,4}$ , рис. Б.57, имеет 6 фундаментальных граней: 2 треугольника, квадрат, 2 ромба, шестиугольник, рис. Б.58, и 6 фундаментальных вершин 1–6.  $Aut(S_{8,4}) = 2c_n, n = 1$ .

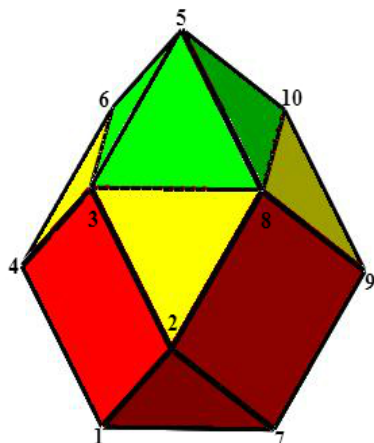


Рисунок Б.57 — Многогранник  $S_{8,4}$

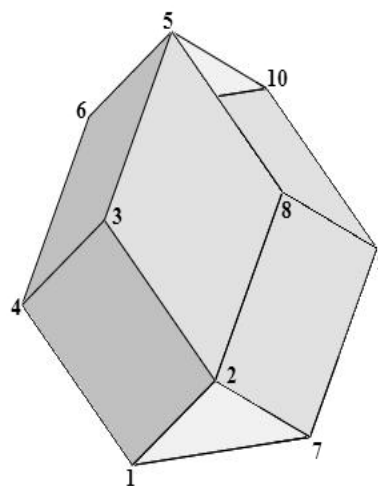


Рисунок Б.58 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{8,4}$

## Многогранник $S_{8,5}$

Тело  $S_{8,5}$ , рис. Б.59, имеет 2 фундаментальные грани: квадрат, параллелограмм, рис. Б.60, и фундаментальные вершин 1 и 2.  $Aut(S_{8,5}) = K4$ .

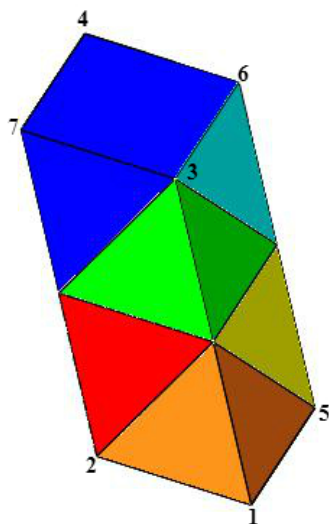


Рисунок Б.59 — Многогранник  $S_{8,5}$

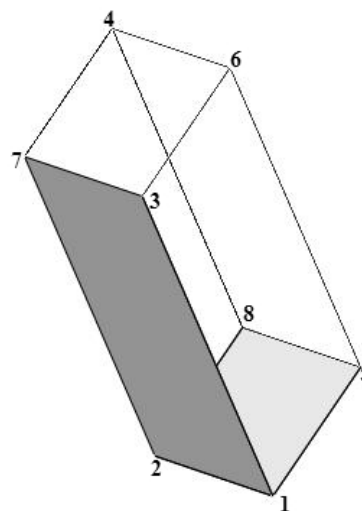


Рисунок Б.60 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{8,5}$

## Многогранник $S_{8,6}$

Тело  $S_{8,6}$ , рис. Б.61, имеет фундаментальные грани: квадрат, параллелограмм, рис. Б.62, и 4 фундаментальные вершины 1,2,3,6.

$$Aut(S_{8,6}) = 2.c_n, n = 1.$$

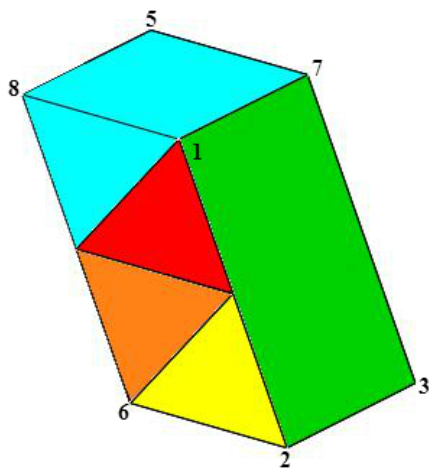


Рисунок Б.61 — Многогранник  $S_{8,6}$

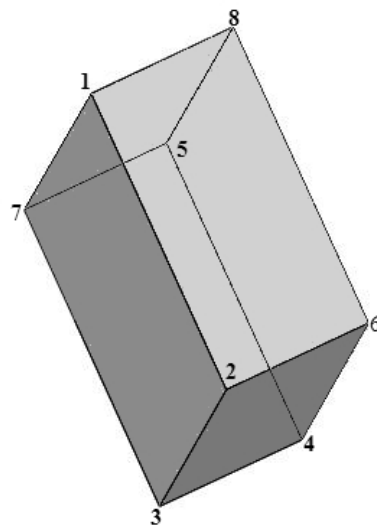


Рисунок Б.62 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{8,6}$

## Многогранник $S_{9,1}$

Тело  $S_{9,1}$ , рис. Б.63, имеет 6 фундаментальных граней: треугольник, квадрат, ромб, 2 трапеции, шестиугольник, рис. Б.64, и 5 фундаментальных вершин 1–5.

$$Aut(S_{9,1}) = 2c_n, n = 1.$$

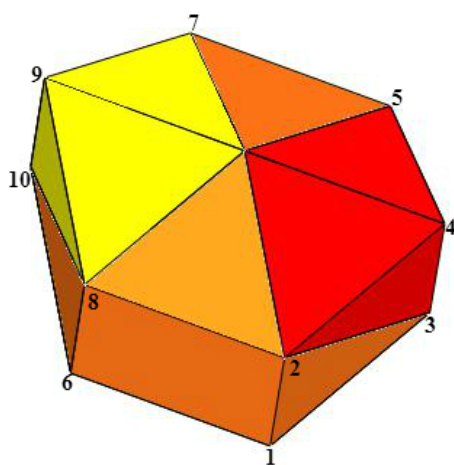


Рисунок Б.63 — Многогранник  $S_{9,1}$

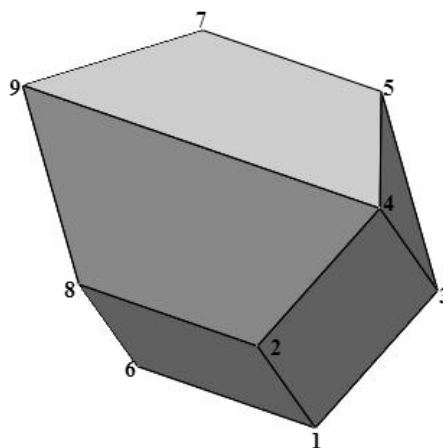


Рисунок Б.64 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{9,1}$

## Многогранник $S_{9,2}$

Тело  $S_{9,2}$ , рис. Б.65, имеет 2 фундаментальные грани: трапеция, прямоугольник, рис. Б.66, и 2 фундаментальные вершины 1 и 5.  $Aut(S_{9,2}) = d_{2n}, n = 2$ .

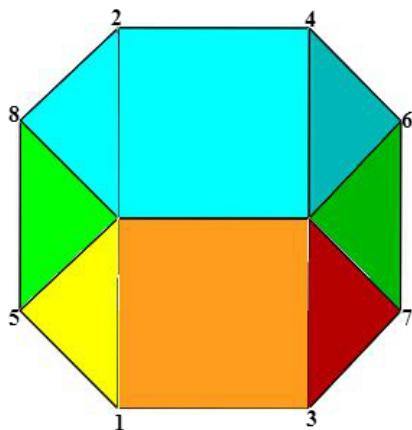


Рисунок Б.65 — Многогранник  $S_{9,2}$

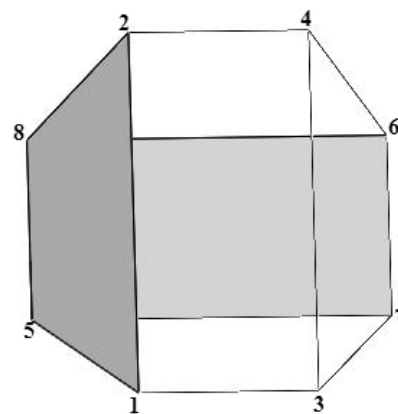


Рисунок Б.66 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{9,2}$

## Многогранник $S_{9,3}$

Тело  $S_{9,3}$ , рис. Б.67, имеет 3 фундаментальные грани: трапеция, 2 квадрата, рис. Б.68, и 2 фундаментальные вершины 1 и 2.  $Aut(S_{9,3}) = 2c_n, n = 4$ .

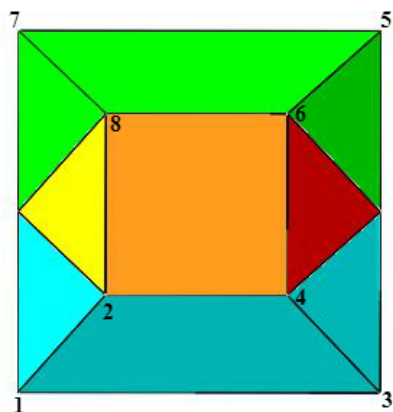


Рисунок Б.67 — Многогранник  $S_{9,3}$

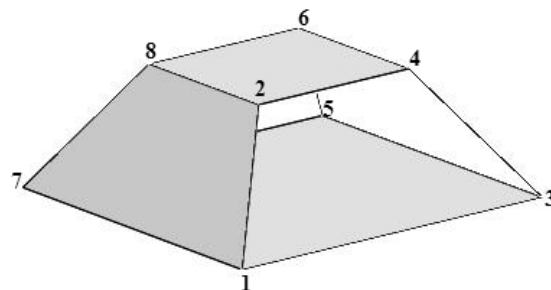


Рисунок Б.68 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{9,3}$

## Многогранник $S_{10,1}$

Поскольку тело  $S_{10,1}$ , рис. Б.69, имеет только тождественную симметрию,  $Aut(S_{10,1}) = c_n, n = 1$ , то все его 9 вершин и грани будут фундаментальными.

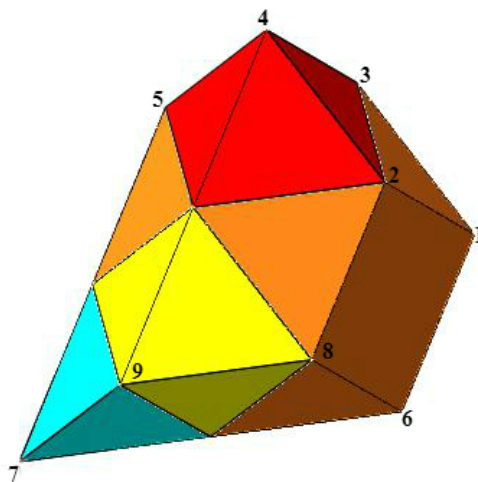


Рисунок Б.69 — Многогранник  $S_{10,1}$

## Многогранник $S_{10,2}$

Тело  $S_{10,2}$ , рис. Б.70, имеет 4 фундаментальные грани: 2 треугольника, трапеция, шестиугольник, рис. Б.71, и 2 фундаментальные вершины 1 и 2.  $Aut(S_{10,2}) = 2c_n, n = 3$ .

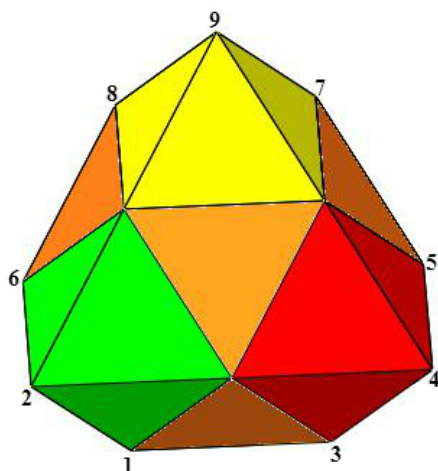


Рисунок Б.70 — Многогранник  $S_{10,2}$

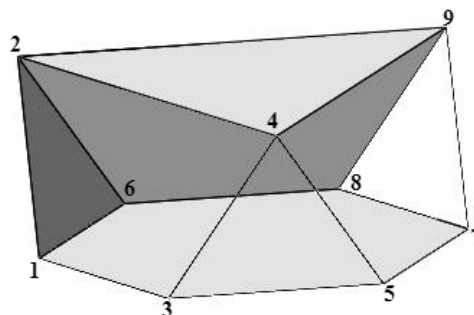


Рисунок Б.71 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{10,2}$

## Многогранник $S_{10,3}$

Тело  $S_{10,3}$ , рис. Б.72, является пирамидой  $S_{1,2}$  с удвоенными ребрами, см. стр. 34.

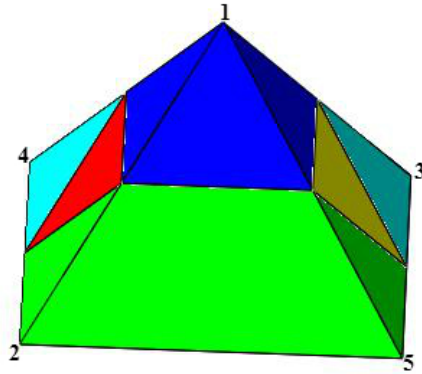


Рисунок Б.72 — Многогранник  $S_{10,3}$

## Многогранник $S_{10,4}$

Поскольку тело  $S_{10,4}$ , рис. Б.73, имеет только тождественную симметрию  $Aut(S_{10,4}) = c_n, n = 1$ , то все его и вершины и грани будут фундаментальными. Данный многогранник отличается от  $S_{10,1}$  только тем, что вместо параллелограмма у него прямоугольник.

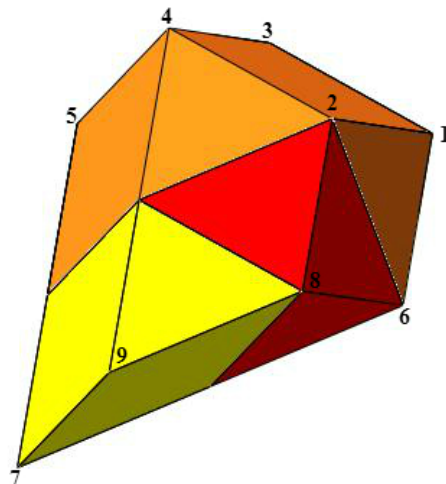


Рисунок Б.73 — Многогранник  $S_{10,4}$

## Многогранник $S_{10,5}$

Тело  $S_{10,5}$ , рис. Б.74, имеет 2 фундаментальные грани: треугольник, трапеция, шестиугольник, рис. Б.75, и 2 фундаментальные вершины 1 и 2.  $Aut(S_{10,5}) = d\_1d\_n, n = 3$ .

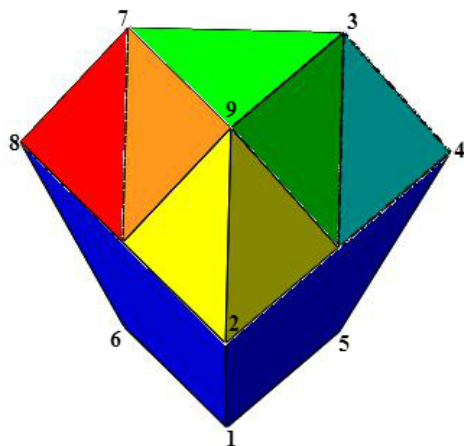


Рисунок Б.74 — Многогранник  $S_{10,5}$

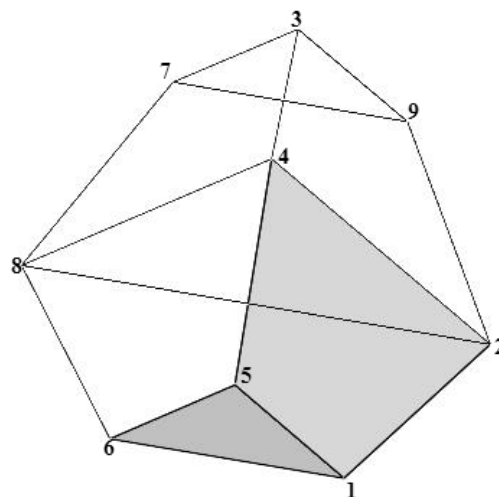


Рисунок Б.75 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{10,5}$

## Многогранник $S_{11,1}$

Тело  $S_{11,1}$ , рис. Б.76, имеет 5 фундаментальных граней: 2 треугольника, трапеция, параллелограмм, пятиугольник, рис. Б.77, и 4 фундаментальные вершины 1–4.  $Aut(S_{11,1}) = 2c\_n, n = 1$ .

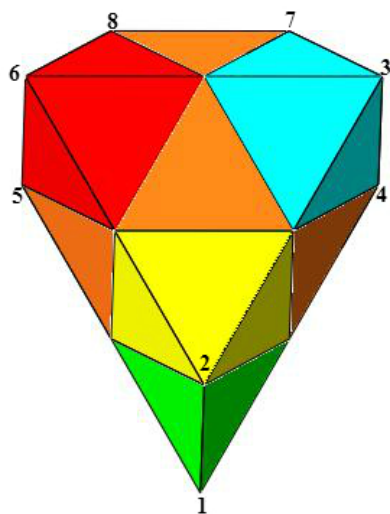


Рисунок Б.76 — Многогранник  $S_{11,1}$

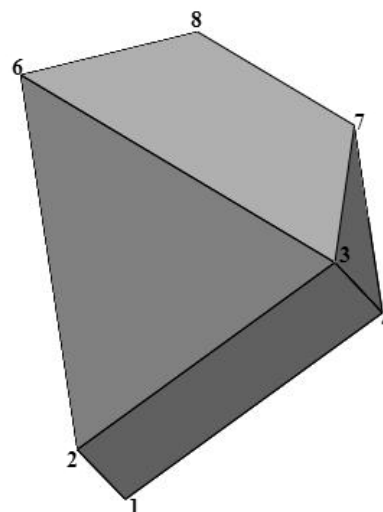


Рисунок Б.77 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{11,1}$



## Многогранник $S_{11,2}$

Поскольку тело  $S_{11,2}$ , рис. Б.78, имеет только тождественную симметрию  $Aut(S_{11,2}) = c_n, n = 1$ , то все его 9 вершин и грани: треугольник, ромб, трапеция, параллелограмм, прямоугольник, шестиугольник будут фундаментальными.

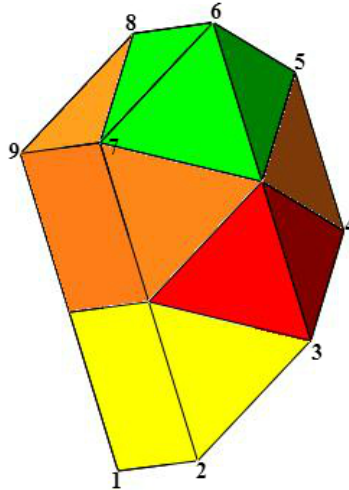


Рисунок Б.78 — Многогранник  $S_{11,2}$

## Многогранник $S_{11,3}$

Тело  $S_{11,3}$ , рис. Б.79, имеет 3 фундаментальные грани: 2 треугольника, трапеция, рис. Б.80, и 3 фундаментальные вершины.  $Aut(S_{11,3}) = 2c_n, n = 3$ .

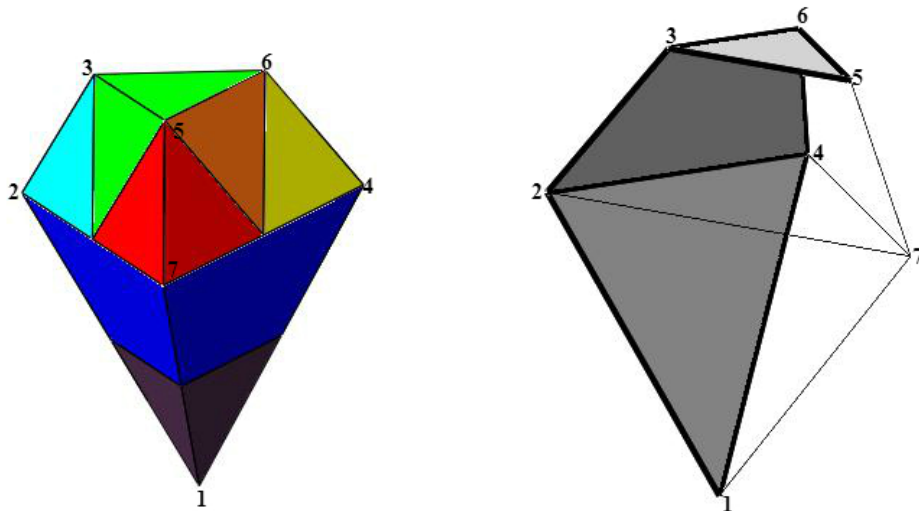


Рисунок Б.79 — Многогранник  $S_{11,3}$

Рисунок Б.80 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{11,3}$

## Многогранник $S_{12,1}$

Поскольку тело  $S_{12,1}$ , рис. Б.81, имеет только тождественную симметрию  $Aut(S_{12,1}) = c_n, n = 1$ , то все его 8 вершин и грани: 2 трапеции, 2 параллелограмма, прямоугольник, ромб будут фундаментальными.

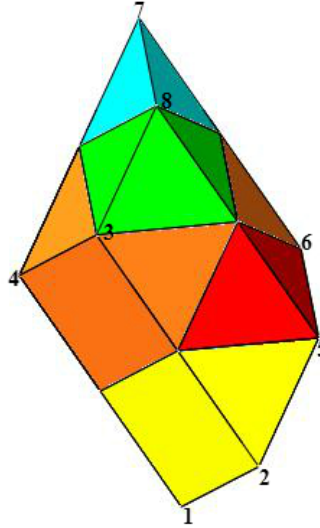


Рисунок Б.81 — Многогранник  $S_{12,1}$

## Многогранник $S_{12,2}$

Тело  $S_{12,2}$ , рис. Б.82, является телом  $S_{2,1}$  с удвоенными ребрами, см. стр. 35.

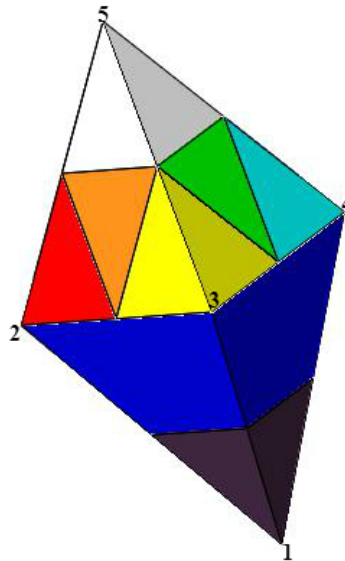


Рисунок Б.82 — Многогранник  $S_{12,2}$

## Многогранник $S_{12,3}$

Тело  $S_{12,3}$ , рис. Б.83, имеет 3 фундаментальные грани: квадрат, ромб, шестиугольник, рис. Б.84, и фундаментальные вершины 1–4.  $Aut(S_{12,3}) = K4$ .

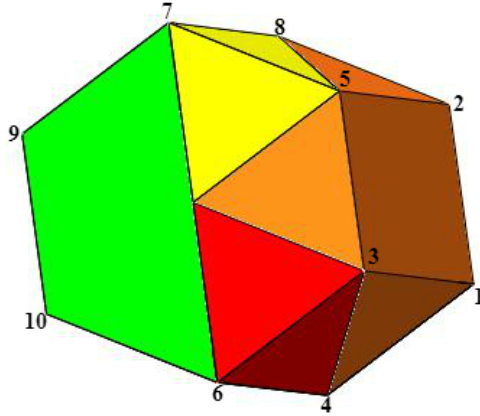


Рисунок Б.83 — Многогранник  $S_{12,3}$

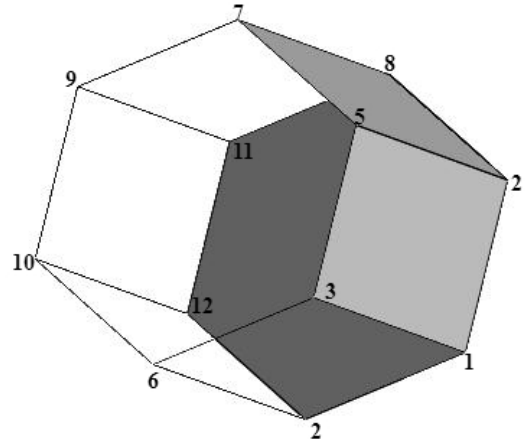


Рисунок Б.84 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{12,3}$

## Многогранник $S_{12,4}$

Тело  $S_{12,4}$ , рис. Б.85, имеет 4 фундаментальные грани: треугольник, трапеция, прямоугольник, шестиугольник, рис. Б.86, и фундаментальные вершины 1–3.  $Aut(S_{12,4}) = 2c_n, n = 2$ .

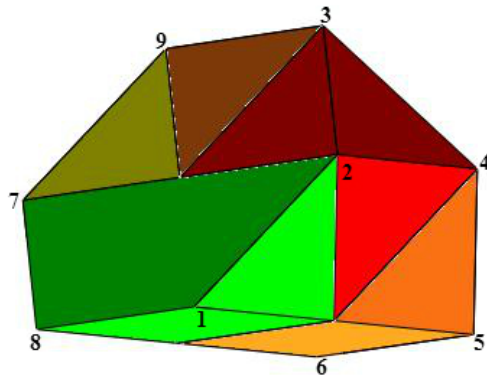


Рисунок Б.85 — Многогранник  $S_{12,4}$

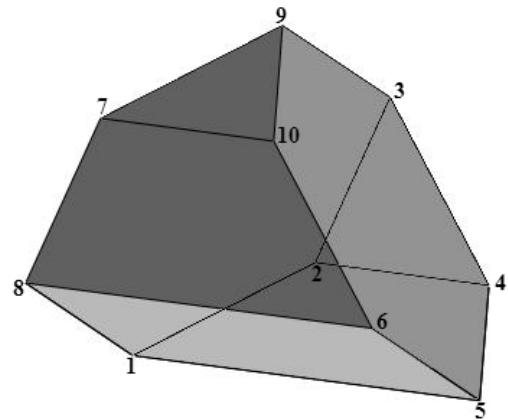


Рисунок Б.86 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{12,4}$

## Многогранник $S_{12,5}$

Тело  $S_{12,5}$ , рис. Б.87, имеет 5 фундаментальные грани: 2 трапеции, параллелограмм, прямоугольник, квадрат, рис. Б.88, и фундаментальные вершины 1–5.  $Aut(S_{12,5}) = 2c_n, n = 1$ .

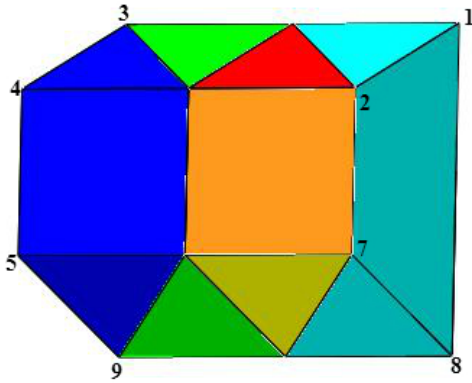


Рисунок Б.87 — Многогранник  $S_{12,5}$

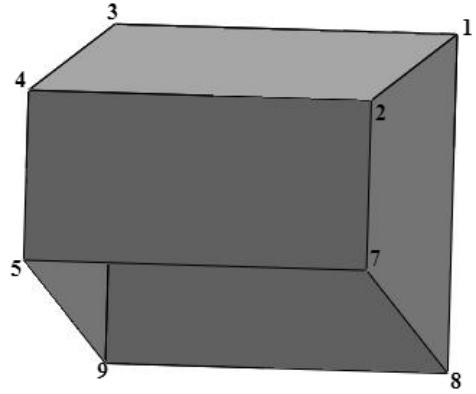


Рисунок Б.88 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{12,5}$

## Многогранник $S_{13,1}$

Тело  $S_{13,1}$ , рис. Б.89, имеет 5 фундаментальных граней: треугольник, квадрат, ромб, трапеция, шестиугольник, пятиугольник, рис. Б.90, и фундаментальные вершины 1–6.  $Aut(S_{13,1}) = 2c_n, n = 1$ .

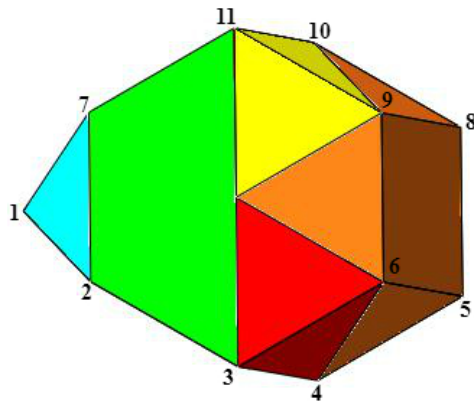


Рисунок Б.89 — Многогранник  $S_{13,1}$

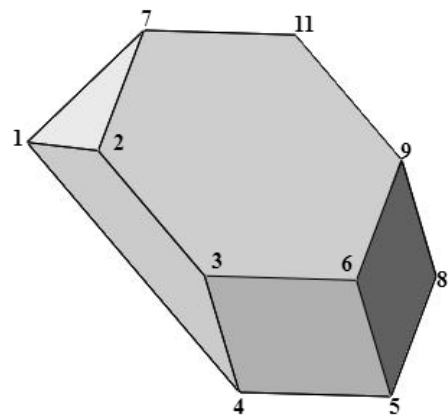


Рисунок Б.90 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{13,1}$

## Многогранник $S_{13,2}$

Тело  $S_{13,2}$ , рис. Б.91, имеет 5 фундаментальных граней: 2 треугольника, трапеция, прямоугольник, пятиугольник, рис. Б.92, и фундаментальные вершины 1–5.  $Aut(S_{13,2}) = 2c_n, n = 1$ .

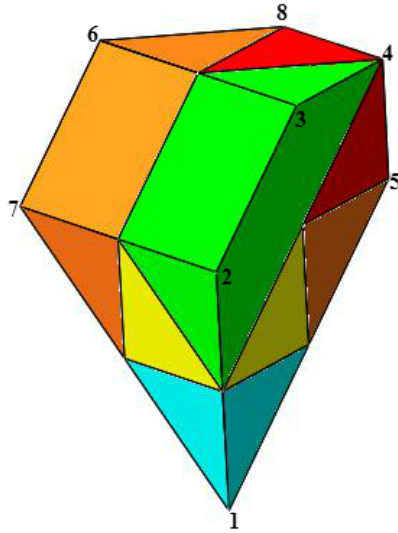


Рисунок Б.91 — Многогранник  $S_{13,2}$

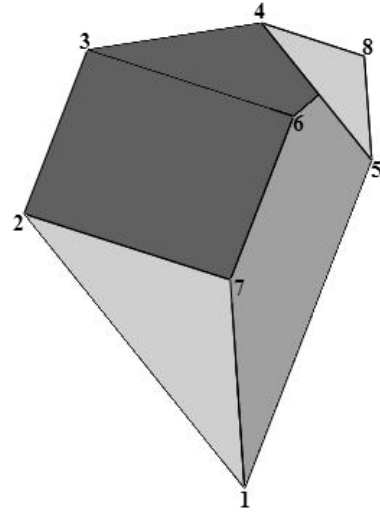


Рисунок Б.92 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{13,2}$

## Многогранник $S_{13,3}$

Тело  $S_{13,3}$ , рис. Б.93, имеет 6 фундаментальных граней: треугольник, квадрат, 2 трапеции, прямоугольник, шестиугольник, рис. Б.94, и фундаментальные вершины 1–4.  $Aut(S_{13,3}) = 2c_n, n = 1$ .

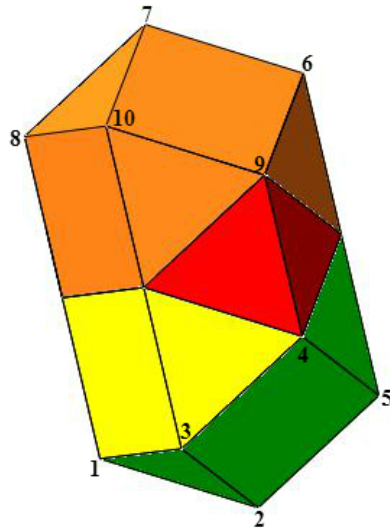


Рисунок Б.93 — Многогранник  $S_{13,3}$

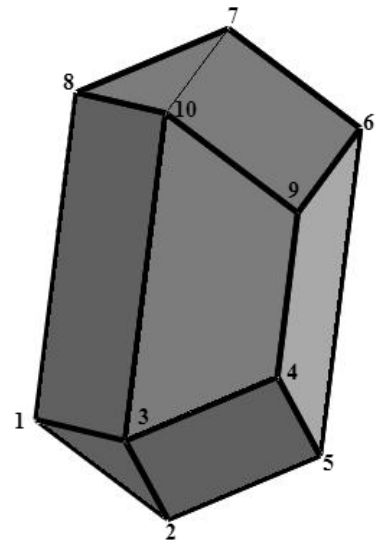


Рисунок Б.94 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{13,3}$

## Многогранник $S_{14,1}$

Тело  $S_{14,1}$ , рис. Б.95, имеет 5 фундаментальных граней: квадрат, ромб, параллелограмм, 2 пятиугольника, рис. Б.96, и фундаментальные вершины 1–6.  $Aut(S_{14,1}) = 2c_n, n = 1$ .

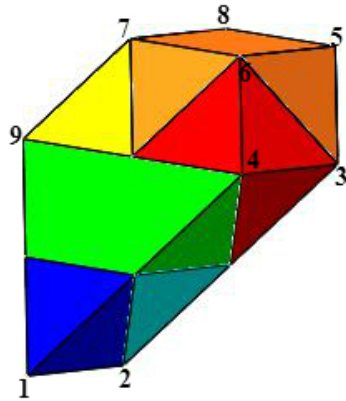


Рисунок Б.95 — Многогранник  $S_{14,1}$

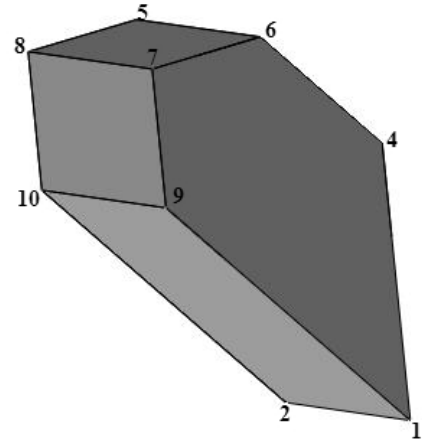


Рисунок Б.96 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{14,1}$

## Многогранник $S_{14,2}$

Тело  $S_{14,2}$ , рис. Б.97, имеет 3 фундаментальные грани: треугольник, трапеция, пятиугольник, рис. Б.98, и фундаментальные вершины 1 и 2.  $Aut(S_{14,2}) = K4$ .

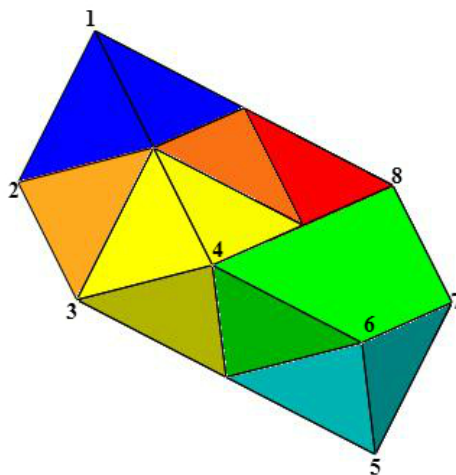


Рисунок Б.97 — Многогранник  $S_{14,2}$

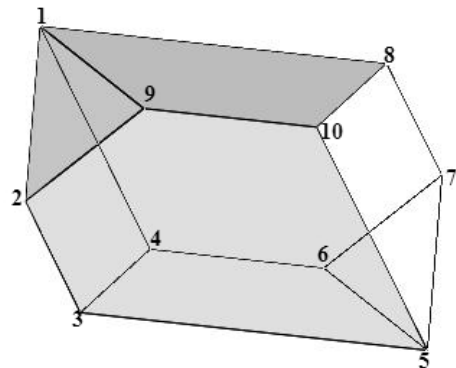


Рисунок Б.98 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{14,2}$

## Многогранник $S_{14,3}$

Поскольку тело  $S_{14,3}$ , рис. Б.99, имеет только тождественную симметрию  $Aut(S_{14,3}) = c_n, n = 1$ , то все его и 11 вершин и грани: 2 треугольника, ромб, квадрат, 2 параллелограмма, прямоугольник, будут фундаментальными.

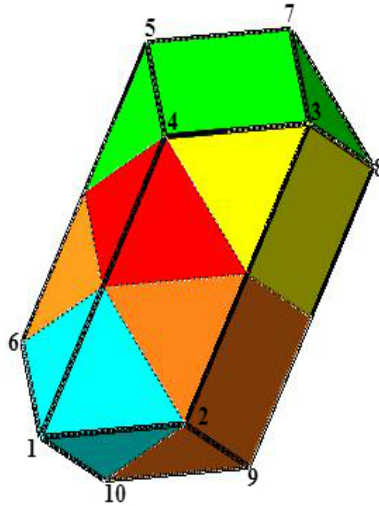


Рисунок Б.99 — Многогранник  $S_{14,3}$

## Многогранник $S_{14,4}$

Поскольку тело  $S_{14,4}$ , рис. Б.100, имеет только тождественную симметрию  $Aut(S_{14,4}) = c_n, n = 1$ , то все его и 10 вершин и грани: 2 ромба, квадрат, параллелограмм, 2 пятиугольника, будут фундаментальными.

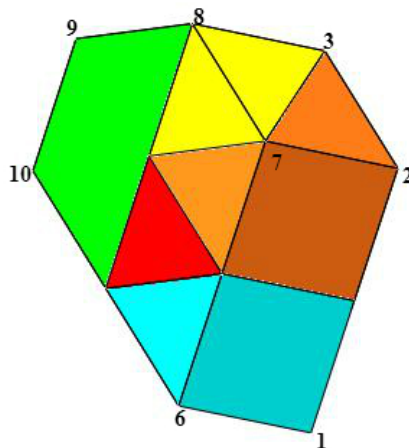


Рисунок Б.100 — Многогранник  $S_{14,4}$

## Многогранник $S_{14,5}$

Тело  $S_{14,5}$ , рис. Б.101, имеет 3 фундаментальные грани: 2 треугольника, квадрат, рис. Б.102, и фундаментальные вершины 1 и 2.

$$Aut(S_{14,5}) = d\_1d\_n, n = 3.$$

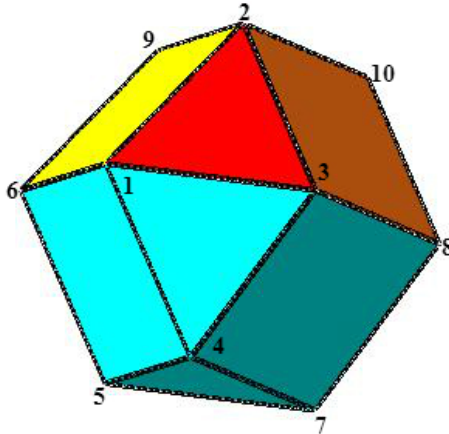


Рисунок Б.101 — Многогранник  $S_{14,5}$

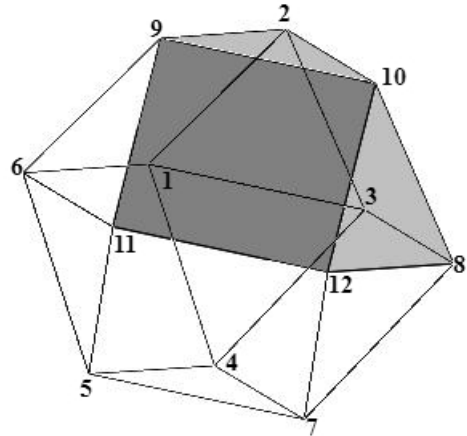


Рисунок Б.102 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{14,5}$

## Многогранник $S_{14,6}$

Тело  $S_{14,6}$ , рис. Б.103, имеет 2 фундаментальные грани: треугольник, квадрат, рис. Б.104, и фундаментальную вершину 1.  $Aut(S_{14,6}) = cube\_2$

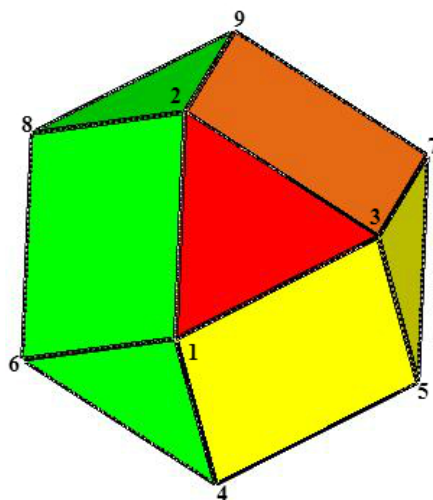


Рисунок Б.103 — Многогранник  $S_{14,6}$

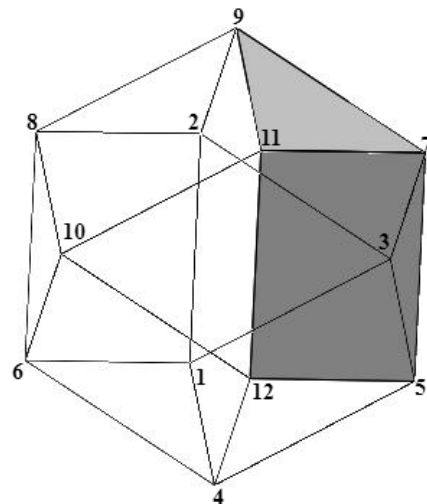


Рисунок Б.104 — Фундаментальные грани многогранника  $S_{14,6}$



## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### Реализация алгоритма построения граней в системе Maple

#### Программа построения ребер по множеству вершин на примере тела $S_{7,4}$

```
> restart:
E:=n0 ->exp(2*I*Pi/n0):
alias(a=RootOf(t^2-2)):
v := [[1, 0, 0],
[0, -(1/3)*sqrt(3), -(1/3)*sqrt(2)*sqrt(3)],
[-1, 0, 0],
[-1/2, -(1/2)*sqrt(3), 0],
[-1/2, (1/2)*sqrt(3), 0],
[1/2, (1/2)*sqrt(3), 0],
[1/2, -(1/2)*sqrt(3), 0],
[-1/2, (1/6)*sqrt(3), -(1/3)*sqrt(2)*sqrt(3)],
[1/2, (1/6)*sqrt(3), -(1/3)*sqrt(2)*sqrt(3)]:
f:=[[ 1, 6, 5, 3, 4, 7 ], [ 1, 7, 2, 9 ], [ 1, 9, 6 ], [ 2, 8, 9 ],
[ 2, 4, 3, 8 ], [ 5, 6, 9, 8 ], [ 3, 5, 8 ], [ 2, 7, 4 ]]:
with(plots):
polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]], j=1..nops(f[i]))], i=1..8)]);
p:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]], j=1..nops(f[i]))],
i=1..nops(f))]): for i in [seq(j, j=1..nops(v))] do
t[i]:=textplot3d([v[i][1], v[i][2], v[i][3], 'i'], color=black):
end do:display({p, seq(t[i], i=1..nops(v))});
restart:
E:=n0 ->exp(2*I*Pi/n0):
alias(a=RootOf(t^2-2)):
v := [[1, 0, 0],
[0, -(1/3)*sqrt(3), -(1/3)*sqrt(2)*sqrt(3)],
[-1, 0, 0],
[-1/2, -(1/2)*sqrt(3), 0],
[-1/2, (1/2)*sqrt(3), 0],
[1/2, (1/2)*sqrt(3), 0],
[1/2, -(1/2)*sqrt(3), 0],
[-1/2, (1/6)*sqrt(3), -(1/3)*sqrt(2)*sqrt(3)],
[1/2, (1/6)*sqrt(3), -(1/3)*sqrt(2)*sqrt(3)]:
```

Построение списка  $f1$  ребер, каждое из которых есть упорядоченная пара номеров вершин.

```

f1:=[]: m:=nops(v):m1:=m-1:
for i from 1 to m1 do i1:=i+1:
for j from i1 to m do p:=v[i]-v[j]:
d:=normal(p[1]^2+p[2]^2+p[3]^2):
if d=1 then f1:=[op(f1),[i,j]]:end if;
end do: end do:f1;
f:=f1: with(plots):for i from 1 to m do
t[i]:=textplot3d([v[i][1],v[i][2],v[i][3] , 'i' ],
color=black,align ={ABOVE,RIGHT},font=[TIMES,BOLD,14]:
end do:
p:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],j=1..nops(f[i]))],
i=1..nops(f))],thickness=4):
display({p,seq(t[i],i=1..m)});

```

Построение списка  $f$  граней, каждая из которых есть упорядоченная пара номеров вершин.

```

f:=[]:fr:=[]:ff:=[]: n1:=nops(f1): n2:=n1-2:
for i from 1 to n2 do a1:=f1[i][1]: a2:=f1[i][2]:
a:=v[a2]-v[a1]:ff:=[]: nj:=i+1:
for r in f1[nj..n1] do
if ((r[1]=a2) or (r[2]=a2)) then b:=v[r[1]]-v[r[2]]:
c:=[a[2]*b[3]-a[3]*b[2],a[3]*b[1]-a[1]*b[3],
a[1]*b[2]-a[2]*b[1]]:
q1:=0: q2:=0:
for vv in v do u:=vv-v[a1]:
d:=c[1]*u[1]+c[2]*u[2]+c[3]*u[3]:
if (evalf(d)>0) then q1:=q1+1 end if:
if (evalf(d)<0) then q2:=q2+1 end if:
end do:
if (((q1=0) or (q2=0)) and (r[1]=a2)) then
ff:=[a1,a2,r[2]] end if:
if (((q1=0) or (q2=0)) and (r[2]=a2)) then
ff:=[a1,a2,r[1]] end if:
end if:
if ((nops(ff)>0) and not(ff in fr)) then
fr:=[op(fr),ff] end if:
end do: end do: for g in fr do
if ((([g[1],g[3]] in f1) or ([g[3],g[1]] in f1))
and not (g in f))
then f:=[op(f),g] end if: end do: n:=10:
for g in fr do if (not( g in f)) then

```

```

a:=v[g[2]]-v[g[1]];b:=v[g[3]]-v[g[2]];
c:=normal([a[2]*b[3]-a[3]*b[2],
a[3]*b[1]-a[1]*b[3],
a[1]*b[2]-a[2]*b[1]]);
h:=g: for l from 1 to n do
for r in f1 do if ((r[1]=h[nops(h)]) or
(r[2]=h[nops(h)]))
then u:=v[r[1]]-v[r[2]]: ng:=nops(h)-1:
if ((normal(c[1]*u[1]+c[2]*u[2]+c[3]*u[3])=0)
and (not(r[1] in h[1..ng])
and not(r[2] in h[1..ng]))) then
if (r[1]=h[nops(h)]) then h:=[op(h),r[2]]
else h:=[op(h),r[1]] end if:end if:
if ([h[1],h[nops(h)]] in f1) and not (h in f) )
then f:=[op(f),h] end if:end if: end do;
end do; end if:end do;f;
p:=polygonplot3d([seq([seq(v[f[i][j]],
j=1..nops(f[i]))],i=1..nops(f))],
thickness=4): display({p,seq(t[i],i=1..m)});

```

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики  
Кафедра алгебры и математической логики

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой

 / В.М. Левчук

<01> 06 2017 г.

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**  
**К ПРОБЛЕМЕ КЛАССИФИКАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ С**  
**ПАРКЕТНЫМИ ГРАНЯМИ**


Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная  
математика

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, профессор  01.06.17 / А. В. Тимофеев

Выпускник

 01.06.17 / Д. Н. Судак

Красноярск 2017