

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий
институт

Вычислительная техника
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

_____ О.В.Непомнящий

« _____ » _____ 20 ____ г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Комплекс программ для автоматизированного проектирования
динамических объектов

Тема

09.04.01 «Информатика и вычислительная техника»

код и наименование направления

09.04.01.02 «Информационное и программное обеспечение САПР»

код и наименование магистерской программы

Научный руководитель	_____	_____	доц., канд. техн. наук	Д.В.Волков
	<i>подпись</i>	<i>дата</i>	<i>должность, ученая степень</i>	
Выпускник	_____	_____		Н.С.Храброва
	<i>подпись</i>	<i>дата</i>		
Рецензент	_____	_____	доц., канд. техн. наук	А.В.Чубарь
	<i>подпись</i>	<i>дата</i>	<i>должность, ученая степень</i>	
Нормоконтролер	_____	_____	доц., канд. техн. наук	В.И.Иванов
	<i>подпись</i>	<i>дата</i>	<i>должность, ученая степень</i>	

Красноярск 2018

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий
институт

Вычислительная техника
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

_____ О.В.Непомнящий

« ____ » _____ 20 ____ г.

**ЗАДАНИЕ
НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ
в форме магистерской диссертации**

Студент Храброва Наталья Сергеевна
Фамилия, имя, отчество

Группа КИ16-01-2М **Направление** 09.04.01
номер *код*
Информатика и вычислительная техника
наименование

Тема выпускной квалификационной работы

Комплекс программ для автоматизированного проектирования динамических объектов

Утверждена приказом по университету № 6676/с от 10.05.2018

Руководитель ВКР Д. В. Волков, канд. техн. наук, доцент НУЛ САПР (ка-
инициалы, фамилия, должность, ученое звание, место работы

федра вычислительной техники ИКИТ СФУ)

Исходные данные для ВКР

Методические указания научного руководителя, научные издания по теме исследования.

Перечень разделов

Анализ предметной области, выбор методов исследования и инструментальных средств, разработка алгоритма автоматизированного проектирования и их программная реализация.

Перечень графического материала

Слайды презентации с математическими выражениями, схемами и результатами работы программного обеспечения.

Руководитель ВКР Д.В.Волков
подпись

Задание принял к исполнению Н.С.Храброва
подпись

« » 20 г.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий
институт

Вычислительная техника
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

_____ О.В.Непомнящий

« ____ » _____ 20 ____ г.

**ГРАФИК
НАПИСАНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
в форме магистерской диссертации**

Студент Храброва Наталья Сергеевна
Фамилия, имя, отчество

Группа КИ16-01-2М **Направление** 09.04.01
номер код

Информатика и вычислительная техника
наименование

Тема выпускной квалификационной работы

Комплекс программ для автоматизированного проектирования динамических объектов

График выполнения выпускной квалификационной работы (ВКР) приведен в таблице 1.

Таблица 1 — График выполнения ВКР

Наименование/содержание этапа	Срок выполнения	Примечания
Анализ предметной области, подбор литературы	до 15.09.2017	
Составление плана работы над ВКР	до 30.09.2017	
Разработка и предоставление на проверку раздела 1	до 30.11.2017	
Разработка и предоставление на проверку раздела 2	до 31.12.2018	
Разработка и предоставление на проверку раздела 3	до 28.02.2018	
Работа над программным обеспечением	до 31.03.2018	
Доработка ВКР в соответствии с полученными замечаниями	до 30.04.2018	
Подготовка доклада и презентации для защиты	до 01.06.2018	
Согласование доклада и презентации с руководителем	до 15.06.2018	
Прохождение нормоконтроля	до 13.06.2018	
Ознакомление с отзывом и рецензией	до 14.06.2018	
Передача ВКР с отзывом и рецензией на кафедру	до 15.06.2018	

Руководитель ВКР Д.В.Волков
подпись

График принял к исполнению Н.С.Храброва
подпись

« » 20 г.

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация «Комплекс программ для автоматизированного проектирования динамических объектов» выполнена в научно-учебной лаборатории систем автоматизированного проектирования (кафедра вычислительной техники института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета).

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ, СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, САПР

Объект исследования — процесс проектирования динамических систем автоматического регулирования.

Предмет исследования — автоматизация проектных процедур при проектировании систем автоматического регулирования.

Цель работы — разработка методического, алгоритмического и программного видов обеспечения для использования в научных исследованиях и учебных курсах по автоматизированному проектированию систем автоматического управления.

В программной среде MathCAD14 разработаны модули, автоматизирующие: символьный вывод формул для обоснования используемых методов; преобразование формы представления математических моделей; синтез регулятора замкнутой системы автоматического регулирования; определение показателей качества регулирования и характерных параметров переходных характеристик.

Разработанный материал демонстрирует обучающимся возможности автоматизации как рутинных, так и творческих операций в процессе проектирования.

Материалы диссертации использованы при создании электронных образовательных курсов по дисциплинам «Теория управления» и «Автоматизированное проектирование встраиваемых систем», внедрённых в учебный процесс кафедры вычислительной техники ИКИТ СФУ.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Проблематика автоматизированного проектирования систем автоматического регулирования, цель и задачи исследования.....	8
1.1 Системы автоматического регулирования и автоматизация их проектирования	8
1.2 Проблематика преподавания теории управления и методов автоматизированного проектирования динамических объектов	10
1.3 Цель и задачи диссертационной работы.....	11
Выводы по разделу 1.....	14
2 Выбор материала для формирования образовательного процесса по автоматизации проектирования динамических объектов.....	15
2.1 Общие принципы выбора учебного материала с учётом комплекса дидактических единиц	15
2.2 Выбор материала по автоматизации проектирования динамических объектов	19
Выводы по разделу 2.....	21
3 Методическое, алгоритмическое и программное обеспечение автоматизированного проектирования динамических объектов	22
3.1 Общие принципы организации процесса автоматизированного проектирования динамических объектов	22
3.2 Общие принципы построения комплекса программ	29
3.3 Комплекс разработанных программ	30
Выводы по разделу 3.....	72
Заключение	74
Сокращения и обозначения.....	75
Список использованных источников	76
ПРИЛОЖЕНИЕ А Модуль автоматизированного синтеза регулятора по желаемой передаточной функции в MathCAD14	80

ПРИЛОЖЕНИЕ Б Модули формирования математической модели системы в MathCAD14	93
ПРИЛОЖЕНИЕ В Модуль преобразования передаточной функции в матричную форму переменных состояния в MathCAD14	106
ПРИЛОЖЕНИЕ Г Модуль анализа графика аperiodического процесса в MathCAD14	117
ПРИЛОЖЕНИЕ Д Модуль анализа графика колебательного процесса в MathCAD14	124
ПРИЛОЖЕНИЕ Е Модуль формирования математического описания двигателя постоянного тока в MathCAD14	134
ПРИЛОЖЕНИЕ Ж Модуль формирования матричной математической модели двигателя постоянного тока в MathCAD14	139
ПРИЛОЖЕНИЕ З Модуль формирования передаточной функции двигателя постоянного тока в MathCAD14	147
ПРИЛОЖЕНИЕ И Модуль разложения передаточной функции на типовые динамические звенья в MathCAD14.....	155
ПРИЛОЖЕНИЕ К Сведения об использовании материалов диссертации.....	163

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Рассматриваемые в данной работе динамические объекты — это объекты, математические модели которых содержат обыкновенные дифференциальные уравнения.

В данном случае под динамическими объектами понимаются, прежде всего, системы автоматического регулирования. Теоретической основой их проектирования является теория управления.

Динамические объекты в целом и САР в частности широко распространены в природе и технике.

В образовательную программу направления подготовки бакалавров 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» включены две учебных дисциплины: «Теория управления» и «Автоматизированное проектирование встраиваемых систем». Эти учебные дисциплины тесно связаны: «Теория управления» даёт общие представления о системах автоматического регулирования и методах их проектирования; «Автоматизированное проектирование встраиваемых систем» демонстрирует методы и приёмы автоматизации как рутинных, так и творческих операций в процессе проектирования, и является продолжением первой дисциплины.

Обе дисциплины являются в значительной степени математическими, но в них математические методы применяются непосредственно к техническим объектам. Поэтому обе дисциплины обеспечивают переход от абстрактных математических знаний к конкретным задачам технического творчества. Это означает, что при изучении обеих дисциплин необходимы компетенции (знания, умения, навыки) различного рода, полученные из математики, физики, электротехники, программирования.

Проектирование динамических объектов представляет собой сложную задачу и осуществляется, как правило, с применением систем автоматизированного проектирования.

Но в настоящее время отсутствуют универсальные САПР, автоматизирующие все процессы проектирования САР и все необходимые проектные процедуры. Это связано с многообразием объектов, задач и соответствующих методов проектирования. Поэтому автоматизированное проектирование целесообразно выполнять с применением одной из универсальных математических программ — MathCAD, MatLab и т. п. Это позволяет создать специализированный комплекс САПР того объекта, с которым работает проектировщик, и дополнять его по мере необходимости новыми возможностями.

Процесс автоматизированного проектирования имеет два аспекта: методологический и технологический.

Методологический аспект связан с используемыми математическими моделями и методами расчетов, обеспечением требуемых характеристик разрабатываемой системы, минимизацией погрешностей и т. п.

Технологический аспект связан с выбором среды программирования, выявлением её функциональных возможностей, реализацией конкретных проектных процедур, использованием готовых библиотек и интерфейса.

Все эти обстоятельства должны учитываться как при проведении научных исследований с применением средств автоматизации проектирования, так и при организации обучения студентов.

Таким образом, существует актуальная задача создания комплекса программ для автоматизированного проектирования динамических объектов, предназначенного для использования как в проектно-исследовательской работе научно-учебной лаборатории САПР, так и при организации учебного процесса.

Объект исследования — процесс проектирования динамических систем автоматического регулирования.

Предмет исследования — автоматизация проектных процедур при проектировании систем автоматического регулирования.

Цель работы — разработка методического, алгоритмического и программного видов обеспечения для использования в исследованиях научно-

учебной лаборатории систем автоматизированного проектирования и в учебных курсах по автоматизированному проектированию систем автоматического управления.

Объект разработки — комплекс программ и методических материалов для автоматизации расчётов при проектировании.

Задачи работы:

1 Сформулировать требования к содержанию процесса автоматизированного проектирования систем автоматического регулирования, в том числе, с учётом применения полученных результатов в учебном процессе.

2 Выбрать и при необходимости доработать методы, методики и алгоритмы проектных операций в соответствии с этапами автоматизированного проектирования.

3 Программно реализовать разработанные алгоритмы для автоматизации проектных операций.

4 Подготовить материал для использования в учебном процессе.

Основная идея работы. Для процесса проектирования систем автоматического регулирования демонстрируются возможности автоматизации творческих и рутинных операций различного уровня — от синтеза системы до автоматизации вспомогательных операций, связанных с графической визуализацией результатов расчётов.

Методы, инструментальные средства и технологии. При получении результатов использовались методы системного анализа, теории автоматического управления, электротехники, программирования. Используемое программное обеспечение — программная среда MathCAD.

Научная новизна работы:

1) модифицирован метод синтеза системы автоматического регулирования с использованием желаемой передаточной функции замкнутой, которая задаётся в виде типовых динамических звеньев минимальной сложности из условия реализуемости передаточной функции регулятора;

2) разработан комплекс алгоритмов, обеспечивающих автоматизацию ряда рутинных и отчасти творческих проектных операций.

Значение для теории автоматизированного проектирования заключается в развитии методов синтеза систем автоматического регулирования, в том числе с использованием возможностей и особенностей применения символьных процессоров.

Значение для практики заключается в том, что полученные результаты будут использоваться в ходе научно-исследовательских работ, выполняемых в НУЛ САПР ИКИТ СФУ, а также в учебном процессе по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника». При этом студенты будут обучаться по тем материалам, которые практически используются в научных исследованиях.

Личный вклад и сотрудничество. Все основные научные результаты получены лично автором. Основой некоторых методических материалов являются соответствующие публикации, на которые даны ссылки. В работе использованы отдельные процедуры из библиотеки, разработанной сотрудниками НУЛ САПР, на соответствующие материалы даны ссылки.

Список использованных источников содержит 31 библиографическую ссылку.

По результатам работы опубликована 1 статья в журнале по перечню ВАК.

1 Проблематика автоматизированного проектирования систем автоматического регулирования, цель и задачи исследования

1.1 Системы автоматического регулирования и автоматизация их проектирования

Под динамическими объектами в данной работе понимаются объекты, математические модели которых представляются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Это могут быть отдельные устройства, а также системы автоматического регулирования (САР) различного назначения.

Динамические объекты в целом и САР в частности широко распространены в природе и технике.

В научно-учебной лаборатории систем автоматизированного проектирования кафедры вычислительной техники ИКИТ СФУ ведутся научно-исследовательские работы, связанные с проектированием прецизионных электромеханических систем различного назначения. При этом важная роль отводится построению систем управления двигателями и автоматизации их проектирования.

Кроме того, в образовательную программу направления подготовки бакалавров 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» включены две учебных дисциплины: «Теория управления» и «Автоматизированное проектирование встраиваемых систем». Эти учебные дисциплины тесно связаны: «Теория управления» даёт общие представления о системах автоматического регулирования и методах их проектирования; «Автоматизированное проектирование встраиваемых систем» демонстрирует возможности автоматизации как рутинных, так и творческих операций в процессе проектирования, и является продолжением первой.

Обе дисциплины являются в значительной степени математическими, но в них математические методы применяются непосредственно к техническим объектам. Поэтому обе дисциплины обеспечивают переход от абстрактных математических знаний к конкретным задачам технического творчества.

В настоящее время отсутствуют универсальные комплексные САПР, обеспечивающие все процессы проектирования и все необходимые проектные операции. Это связано с многообразием задач и соответствующих методов проектирования. Поэтому автоматизированное проектирование целесообразно выполнять с применением одной из универсальных математических программ — MathCAD, Matlab и др. [10, 30].

Проблема автоматизированного проектирования имеет два аспекта: методологический и технологический. Методологический аспект связан с используемыми математическими моделями и методами расчетов, обеспечением требуемых характеристик разрабатываемой системы, минимизацией погрешностей и т. п. Технологический аспект связан с выбором используемого программного обеспечения, выявлением его возможностей с точки зрения реализации проектных операций и разработкой соответствующих проектных процедур.

Теория управления широко используется в технике и является одной из базовых дисциплин в инженерном образовании.

В настоящее время значительное внимание придаётся автоматизации проектирования систем автоматического управления (систем автоматического регулирования) [17, 26]. Это связано с тем, что, во первых, системы становятся всё сложнее, а во-вторых, автоматизация повышает надёжность проектирования, так как позволяет выполнять не только анализ систем, но также их синтез, что в ручном режиме можно выполнить только с большими упрощениями и допущениями.

В ряде случаев автоматизированное проектирование представляет собой отдельные компьютерные программы, обличающие выполнение некоторых расчётов [17], в других случаях это — набор программ в рамках некоторого универсального комплекса [25], иногда — специализированные программы для автоматизированного проектирования некоторых классов систем, например, следящих электроприводов [26].

1.2 Проблематика преподавания теории управления и методов автоматизированного проектирования динамических объектов

Результаты диссертационной работы предназначены для использования как для научных, исследовательских и проектных работ, ведущихся в научно-учебной лаборатории САПР, так и для внедрения в учебный процесс.

Указанные выше учебные дисциплины «Теория управления» и «Автоматизированное проектирование встраиваемых систем» связаны с и соответствующим материалом других дисциплин и занимают вполне определённое положение в структуре образовательной программы.

При выборе материала для изучения обычно используется так называемый экспертный подход, когда экспертом является преподаватель соответствующего курса. Он сам выбирает материал, основываясь на собственном опыте и материалах других авторов. В процессе работы над материалом дисциплины требуется указать, на какие предыдущие курсы опирается выбранный материал и в каких дисциплинах, читаемых позже, он будет использоваться.

В реальности эти задачи решаются весьма упрощённо: просматривается список учебных дисциплин до и после изучаемой и выбираются дисциплины, название которых примерно созвучны названию изучаемой дисциплины. Очевидно, что при этом совершенно не учитывается содержание дисциплин, преподаваемые в их рамках дидактические единицы — знаний, умений, навыков владения.

Дополнительной особенностью рассматриваемых дисциплин является то, что они, будучи тесно связаны между собой, преподаются с интервалом в один год, что позволяет при переходе от «Теории управления» к «Автоматизированному проектированию встраиваемых устройств» использовать дополнительно знания из других дисциплин, полученные в промежутке между первой и второй.

Для овладения материалом рассматриваемых дисциплин необходимы комплекс исходных дидактических единиц, полученных из других дисциплин.

Эти дисциплины можно условно разделить на несколько областей:

- 1) общая методология инженерной деятельности;
- 2) математика;
- 3) физика;
- 4) электротехника и электроника;
- 5) программирование.

Усвоение материала из этих областей науки и техники является неременным условием понимания нового материала в рамках рассматриваемых учебных дисциплин.

В свою очередь, в результате изучения предлагаемого материала учащиеся должны будут познакомиться с новыми областями науки и техники, в частности, с математической теорией систем, методами анализа и синтеза систем с обратными связями, сформировать компетенции, обеспечивающие понимание того, как устроены и функционируют существующие автоматические технические объекты, а также того, как можно и нужно проектировать новые системы автоматического регулирования.

В статье автора [1] рассматривается подход к формированию учебного плана на основе использования массива дидактических единиц.

Под дидактической единицей в данном случае понимается некоторое знание (умение, навык) минимального объёма, достаточного для его самостоятельного существования как самодостаточного объекта. Из дидактических единиц строятся новые дидактические единицы, которые всегда имеют некоторые входные и некоторые выходные элементы.

1.3 Цель и задачи диссертационной работы

С учётом рассмотренной выше проблематики автоматизированного проектирования систем автоматического регулирования и преподавания соответствующих учебных дисциплин в вузе можно сформулировать цель и задачи диссертационной работы.

Цель работы — разработка методического, алгоритмического и программного обеспечения для использования в исследованиях научно-учебной лаборатории систем автоматизированного проектирования и в учебных курсах по автоматизированному проектированию систем автоматического регулирования.

Методическое, алгоритмическое и программное обеспечение представляет собой единый комплекс, предоставляющий теоретическое обоснование и практическую реализацию автоматизированных проектных операций при разработке САР.

Методическое обеспечение представляет собой теоретическое основание для разработки алгоритмов, а затем и программ.

Методическое обеспечение:

1) представляет и обосновывает соответствующий метод выполнения проектной операции, включая его доказательство, доработку и модификацию (в случае необходимости);

2) рассматривает возможность автоматизации использования соответствующего метода и соответствующее дополнение его процедурами, связанными с автоматизацией;

3) содержит рекомендации по применению метода и его автоматического варианта с точки зрения постановки и решения соответствующей задачи проектирования.

Алгоритмическое обеспечение конкретизирует как сам метод, так и средства автоматизации его применения.

Программное обеспечение представляет собой реализацию соответствующих алгоритмов в виде рабочих листов MathCAD14 и процедур на внутреннем языке программирования.

Поставленная цель достигается решением следующих задач диссертационной работы:

1 Сформулировать требования к содержанию процесса автоматизированного проектирования систем автоматического регулирования, в том числе, с учётом применения полученных результатов в учебном процессе.

Данная задача вытекает из направленности работы не только на развитие автоматизированных методов проектирования для применения их в научных исследованиях, но и на использование полученных результатов в учебном процессе для бакалавров направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

2 Выбрать и при необходимости доработать методы, методики и алгоритмы проектных операций в соответствии с этапами автоматизированного проектирования.

Данная задача связана с тем, что известные методы и методики проектирования не всегда соответствуют современным тенденциям развития теории управления и нуждаются в доработке, в том числе, с учётом их использования для автоматизированного проектирования.

3 Программно реализовать разработанные алгоритмы для автоматизации проектных операций.

Данная задача напрямую связана с темой диссертационной работы, направленной на создание реально работающего комплекса программ, позволяющего изучить процесс автоматизированного проектирования во всех основных его проявлениях.

4 Подготовить материал для использования в учебном процессе.

Данная задача связана с направленностью диссертации на создание соответствующего инструментария не только для научных, исследовательских и проектных работ, но и для учебного процесса. Это усложняет, прежде всего, методическое обеспечение, так как возникает необходимость подробного рассмотрения каждого метода и алгоритма с обоснованием, приведением примеров, обсуждением результатов. С учётом программной реализации комплекса в среде

MathCAD14 имеется возможность заполнения рабочих листов соответствующими пояснениями.

Выводы по разделу 1

В ходе рассмотрения существующего положения дел с автоматизацией проектирования динамических объектов (в данном случае — систем автоматического регулирования) выявлена актуальность темы диссертации и необходимости разработки таких материалов, которые можно использовать не только в научных, исследовательских и проектных целях, но также и рамках учебного процесса.

Сформулирована цель диссертации, сводящаяся к разработке методического, алгоритмического и программного обеспечения, предназначенного для автоматизации проектирования динамических объектов. Такой комплексный подход отсутствует в доступных для использования материалах других авторов и является новым и практически полезным.

2 Выбор материала для формирования образовательного процесса по автоматизации проектирования динамических объектов

2.1 Общие принципы выбора учебного материала с учётом комплекса дидактических единиц

Вопросы, связанные с методологическими особенностями выбора материала для учебных курсов, рассмотрены в статье автора [1].

Учебные планы (УП) являются основой учебного процесса и содержат перечень учебных дисциплин (УД) с указанием временных границ их преподавания (семестры, их количество), видов аудиторных занятий (лекции, практические и лабораторные занятия), видов самостоятельной работы студентов (курсовые проекты и работы), выделяемых для этого часов и зачётных единиц, видов контроля (экзамен, зачёт). На основе учебных планов разрабатываются рабочие программы дисциплин (РПД), которые содержат исчерпывающий перечень дидактических единиц (ДЕ).

В настоящее время при ручном формировании УП вначале создаётся перечень УД (во ФГОС ВПО — это, прежде всего, базовые УД, а также вариативные УД из примерного УП), затем на основе экспертных оценок они распределяются по семестрам, а затем уже разрабатываются соответствующие РПД, которые наполняются ДЕ. Объективно УД связаны между собой через содержащиеся в них ДЕ, но при ручном формировании УП часто оказывается, что эти связи плохо выстроены, кроме того, слабо учитывается ограниченность временных ресурсов и необходимость разделения времени между параллельно изучаемыми УД. Это связано с тем, что РПД разрабатываются отдельными преподавателями, не имеющими возможности учитывать особенности РПД других УД.

В то же время, появление новых образовательных стандартов предъявляет дополнительные требования к качеству и скорости разработки УП. Во-первых, делается упор на увеличение учебных дисциплин по выбору, а также на предоставление учащимся возможности выбора индивидуальных образовательных

траекторий. Во-вторых, быстрое развитие всех областей знаний предполагает частую коррекцию УП. В-третьих, академическая мобильность в сочетании со свободой введения учебных дисциплин по решению вуза приводит к тому, что учащиеся могут учиться в течение срока обучения по нескольким учебным планам различных вузов. В-четвёртых, отчисление и восстановление учащихся приводит к тому, что им приходится восполнять изученные другими учащимися УД. Всё это делает очень затруднительным ручное формирование УП.

Общая тенденция научных исследований, связанных с автоматизацией синтеза УП вуза, направлена на детализацию материала: учебный план — учебная дисциплина — модуль. В некоторых случаях детализация достигает уровня ДЕ, но, как правило, лишь для конкретизации взаимосвязи модулей или учебных дисциплин.

В данной работе предлагается именно ДЕ взять за основу синтеза УП и осуществлять синтез "снизу вверх" — от частного к общему, т. е. от ДЕ к УП.

Этот подход не является простым, что, видимо и обусловило то, что многие исследователи ограничиваются детализацией на уровне модулей. Но кардинальное решение проблем формирования УП связано именно с реализацией предложенного подхода.

Предполагается, что для каждого профиля бакалавриата или специальности можно сформировать общий массив ДЕ, указав связи между ними.

Дидактическая единица — элемент компетенций, неделимый в рамках рассматриваемого учебного процесса. Поскольку компетенция есть единство знаний, умений и навыков, то и дидактические единицы могут быть разного рода: дидактическая единица знаний, дидактическая единица умений, дидактическая единица навыков. В рамках компетенций дидактические единицы знаний, умений и навыков соединяются в систему и получают свойство эмерджентности, т. е. их совместное (цельное) использование обладает дополнительными свойствами по сравнению со свойствами отдельных составляющих, что и порождает определённую компетенцию.

Примером ДЕ знаний могут служить понятия различных наук, законы природы, математические методы и т. п. Примером ДЕ умений может служить способность учащегося выбрать и применить на практике те или иные методы в соответствии с типом решаемой задачи. Примером ДЕ навыков может служить готовность выполнять те или иные заученные до автоматизма действия в рамках профессиональной деятельности.

Обычно при автоматизации анализа и синтеза УП учитываются только ДЕ знаний, которые легко получаются из содержания УД. ДЕ умений и навыков практически не встречаются.

Существует тесная связь между ДЕ знаний, умений и навыков: ДЕ знаний являются основой для ДЕ умений, которые, в свою очередь, являются базой для ДЕ навыков. Одна и та же ДЕ знаний может порождать несколько ДЕ умений (например, применение одного и того же общего метода для различных объектов). Также и одна ДЕ умений может отражаться в практической области через несколько ДЕ навыков (например, навыки подготовки текста в различных версиях программы MS Word).

Основой общего массива ДЕ является массив ДЕ знаний.

Этот массив задаётся в виде орграфа, в котором ДЕ представляются вершинами. Рёбра такого орграфа не имеют информационного смысла, кроме обозначения связи одних ДЕ с другими. Такой орграф может быть представлен матрицей (наглядная, но громоздкая форма) или списком (компактная, но менее наглядная форма).

При матричном представлении массива ДЕ формируется соответствующая матрица (Таблица 1).

Таблица 1 — Матричное представление массива ДЕ

	→ДЕ1	→ДЕ2	→ДЕ3	→ДЕ4	→ДЕ5	→ДЕ6	→ДЕ7
ДЕ1→	0	1	0	0	0	1	0
ДЕ2→	0	0	1	1	0	0	0
ДЕ3→	0	0	0	1	0	0	0
ДЕ4→	0	1	0	0	0	0	1
ДЕ5→	0	0	0	0	0	0	0
ДЕ6→	0	0	0	0	0	0	0
ДЕ7→	0	1	0	0	0	0	0

В корректно построенных УП обратных связей не должно быть, так как они означают изучение ДЕ на основе ДЕ, которая сама будет изучаться позже: это соответствует контуру. Таким образом, изучение вида матрицы в таблице 2 может дать много информации о структуре отдельных УД или всего УП.

ДЕ могут быть разделены на два типа:

- 1) элементарные ДЕ, вводимые в процессе изучения;
- 2) составные ДЕ, формируемые на основе предыдущих ДЕ.

Первоначальные ДЕ получают учащимися на предыдущем уровне обучения (например, в средней школе). Комбинация этих исходных элементарных ДЕ порождает новые ДЕ более сложной структуры — составные ДЕ. Например, ДЕ из курса элементарной физики и алгебры порождают законы электрических цепей Кирхгофа в электротехнике.

В процессе обучения преподавателями привносятся также новые элементарные ДЕ, которые не были получены в школе и не являются результатом комбинирования уже изученных ДЕ. Например, в электронике изучаются транзисторы, которые, возможно, не изучались в школе.

На самом деле, любое новое знание формируется на основе уже полученных ранее элементов знания. Но в некоторых случаях для освоения новых ДЕ используется общая культурная подготовка учащегося, и в этом случае ДЕ считается элементарной.

При формировании составных ДЕ используются как элементарные ДЕ, так и составные, полученные на более ранних стадиях изучения.

Каждой ДЕ может быть приписано время её формирования на основе других ДЕ. Элементарные ДЕ не имеют входных ДЕ, а потому время их изучения определяется самой ДЕ. Составные ДЕ имеют входные ДЕ, поэтому время на их изучение обусловлено взаимодействием всех входных ДЕ.

Данный подход был использован при выборе учебного материала в рамках данной диссертационной работы.

2.2 Выбор материала по автоматизации проектирования динамических объектов

Выбор материала основывается на построении дерева дидактических единиц. В данной работе этот процесс имеет ограниченный характер и выполняется не полностью ввиду того, что нет возможности увязать рассматриваемые две учебных дисциплины с другими дисциплинами. Но рассмотренный подход целесообразно использовать в будущем при разработке новых учебных планов в качестве примера.

Первоначально рассматриваются выходные дидактические единицы. Для них определяются те дидактические единицы, которые нужны для их изучения, и так далее.

Дидактические единицы в конце изучения учебной дисциплины «Автоматизированное проектирование встраиваемых систем»:

ДЕ001 — способность синтезировать последовательный регулятор системы автоматизированного регулирования.

Для её изучения требуется знать:

ДЕ002 — синтез как процесс определения характеристик нового элемента на основании характеристик известных элементов и заданных требований;

ДЕ003 — желаемая передаточная функция замкнутой системы;

ДЕ004 — понятие математических операций;

ДЕ005 — символьный процессор MathCAD14;

ДЕ006 — решение систем алгебраических уравнений.

- ДЕ007 — желаемая передаточная функция системы;
- ДЕ008 — система;
- ДЕ009 — передаточная функция системы;
- ДЕ010 — структурная схема системы;
- ДЕ011 — матричные операции;
- ДЕ012 — полином числителя передаточной функции;
- ДЕ013 — полином знаменателя (характеристический полином) передаточной функции;
- ДЕ014 — коэффициенты полинома;
- ДЕ015 — корни полинома;
- ДЕ016 — типовые динамические звенья;
- ДЕ017 — порядок полинома;
- ДЕ018 — оператор Лапласа;
- ДЕ019 — система обыкновенных дифференциальных уравнений;
- ДЕ020 — производная;
- ДЕ021 — матричная форма дифференциальных уравнений;
- ДЕ022 — переменные состояния;
- ДЕ023 — матрица коэффициентов при переменных состояния;
- ДЕ024 — вектор переменных состояния;
- ДЕ025 — вектор входных переменных;
- ДЕ026 — вектор выходных переменных;
- ДЕ027 — матрица коэффициентов при векторе входных переменных;
- ДЕ028 — матрица коэффициентов при векторе выходных переменных;
- ДЕ029 — математическая модель;
- ДЕ030 — математическое описание.

Далее продолжается массив дидактических единиц. общий принцип такой: каждое сложное понятие разлагается на более мелкие (свои составляющие), которые, в свою очередь, разлагаются на более мелкие составляющие.

Затем записывается матрица дидактических единиц, в которой устанавливаются связи между ними. Затем на основании этого дерева дидактических единиц выполняется наполнение соответствующим материалом.

Выводы по разделу 2

На основе предложенного подхода формирования дерева дидактических единиц определён состав материала для изучения в учебных дисциплинах «Теория управления» и «Автоматизированное проектирование встраиваемых систем». Дерево дидактических единиц является разновидностью дерева понятий.

В соответствии с построенным деревом дидактических единиц осуществлён выбор материала для изучения. Часть соответствующего материала в виде примера приведена во втором разделе диссертации и является основой для последующего насыщения дисциплин теоретическим материалом в виде лекций и практическим материалом в виде заданий для практических занятий.

3 Методическое, алгоритмическое и программное обеспечение автоматизированного проектирования динамических объектов

3.1 Общие принципы организации процесса автоматизированного проектирования динамических объектов

3.1.1 Система автоматического регулирования как класс динамических объектов

Системы автоматического регулирования (САР) являются одним из важнейших классов динамических объектов. Теория САР представляет собой часть теории систем и носит название теории управления или теории автоматического управления. При этом различают автоматическое управление и автоматическое регулирование.

Термин «управление» относится к объекту — «объект управления», а термин «регулирование» относится к изменяемой величине — «регулируемая величина». Таким образом, управляют объектом, а регулируют ту или иную величину, относящуюся к этому объекту [18, 29].

Проблематика проектирования САР состоит в следующем и может быть пояснена с помощью структурной схемы САР (Рисунок 3.1).

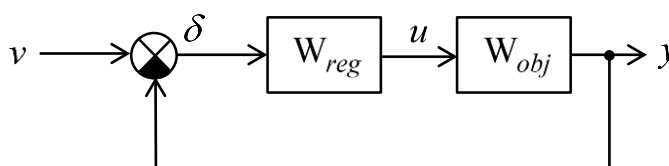


Рисунок 3.1 — Структурная схема замкнутой системы автоматического регулирования в общем виде

Пусть имеется объект управления с передаточной функцией W_{obj} . Его состояние характеризуется выходной величиной y , которая меняется при изменении входной величины u . Как правило, величину y необходимо изменять во

времени определённым образом, а для этого следует выбрать соответствующий закон изменения входной величины u . Этот процесс представляет собой процесс регулирования, при этом величина y называется регулируемой величиной, а величина u — управляющей величиной. Закон изменения u для обеспечения желаемого изменения величины y называется законом управления. Выбор этого закона является основной задачей теории управления, его практическую реализацию осуществляет система автоматического регулирования.

Существует много методов синтеза закона управления, широко представленных в литературе по теории автоматического управления [2, 6, 9, 11, 12, 13, 16, 18, 23, 28].

Все методы синтеза основываются на математических моделях динамических объектов, которые представляют собой систему дифференциальных уравнений (иногда дополненных алгебраическими выражениями) [14, 15, 16, 18].

Форма представления математических моделей может быть разной — в виде системы дифференциальных уравнений, в виде матричного уравнения, в виде передаточной функции. Эти формы легко преобразуются друг в друга. Независимо от формы модели, она всегда содержит производные. Именно это создаёт определённые проблемы анализа и синтеза законов управления.

Общепринятый подход заключается в использовании замкнутой системы автоматического регулирования (Рисунок 3.1). Для этого создается контур обратной связи, включающий задание желаемого изменения выходной величины v , измеритель выходной величины y , элемент сравнения этих двух величин. Элемент сравнения непрерывно вычисляет отклонение реальной величины от заданной и использует результат сравнения для выбора закона управления. Выбор закона управления осуществляется специальным устройством — регулятором.

Одной из широко распространённых форм представления математической модели объекта является передаточная функция, получаемая из системы дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа [15, 16].

Аппарат передаточных функций является один из наиболее удобных для осуществления синтеза законов управления. Общая идея заключается в том, что в процессе синтеза определяется вид передаточной функции регулятора W_{reg} , которая затем реализуется с помощью электронного блока (аналоговый регулятор) или программно (цифровой микропроцессорный регулятор).

3.1.2 Сущность метода синтеза регулятора по желаемой передаточной функции

Метод синтеза замкнутой САР с использованием желаемого вида переходного процесса подробно рассмотрен в литературе [6, 8, 12, 13].

Замкнутая система автоматического регулирования (САР) в общем виде (Рисунок 3.1) содержит объект управления с передаточной функцией W_{obj} и последовательно включённый регулятор с передаточной функцией W_{reg} .

Проектирование САР предполагает, что известна передаточная функция объекта W_{obj} , заданы требования к замкнутой САР и необходимо найти передаточную функцию регулятора W_{reg} — такую, что заданные требования были выполнены.

При этом объект (и его передаточная функция W_{obj}) называются неизменяемой частью САР, а регулятор (с его передаточной функцией W_{reg}) — изменяемой частью.

Неизменяемая часть САР (объект) выбирается по различным соображениям с учётом требований, учитывающих специфику объекта и режимы его работы.

Изменяемая часть САР (регулятор) выбирается с учётом требований к показателям качества регулирования. Обычно это — время регулирования, наличие и величина перерегулирования, наличие или отсутствие колебательности.

Для получения обобщённого выражения передаточной функции САР ниже приводятся соответствующие выкладки.

Исходные выражения:

1) ошибка регулирования в операторной форме:

$$\delta(s) = v(s) - y(s); \quad (3.1)$$

2) передаточная функция объекта управления:

$$W_{obj} = \frac{y(s)}{u(s)}; \quad (3.2)$$

3) передаточная функция регулятора:

$$W_{reg} = \frac{u(s)}{\delta(s)}. \quad (3.3)$$

Передаточная функция замкнутой системы:

$$\Phi = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{W_{reg} W_{obj}}{1 + W_{reg} W_{obj}}. \quad (3.4)$$

В передаточной функции замкнутой САР (3.4) присутствует передаточная функция регулятора, которую необходимо найти. Чтобы её найти, необходимо знать требования к проектируемой САР. Они могут быть заданы с помощью задания желаемой передаточной функции САР.

Пусть известно, что желаемая передаточная функция САР должна быть:

$$\Phi_{dez} = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{G_{dez}}{H_{dez}}, \quad (3.5)$$

где G_{dez} — полином числителя;

H_{dez} — полином знаменателя.

Задача: определить передаточную функцию регулятора W_{reg} — такую, чтобы передаточная функция САР Φ была равна Φ_{dez} :

$$\Phi = \Phi_{dez}. \quad (3.6)$$

Для этого все передаточные функции блоков САР представляются через полиномы числителей и знаменателей:

$$W_{reg} = \frac{u(s)}{\delta(s)} = \frac{G_{reg}}{H_{reg}}, \quad W_{obj} = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_{obj}}{H_{obj}}. \quad (3.7)$$

Выражения (3.7) подставляются в (3.4), после преобразований находятся выражения полиномов передаточной функции регулятора:

$$\Phi = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{G}{H} = \frac{W_{reg} W_{obj}}{1 + W_{reg} W_{obj}} = \frac{G_{obj} G_{reg}}{G_{obj} G_{reg} - H_{obj} H_{reg}}. \quad (3.8)$$

Для определения вида полиномов регулятора приравнивают передаточную функцию замкнутой системы Φ и желаемую передаточную функцию Φ_{dez} (3.6):

$$\Phi = \frac{G}{H} = \Phi_{dez} = \frac{G_{dez}}{H_{dez}} = \frac{G_{obj} G_{reg}}{G_{obj} G_{reg} - H_{obj} H_{reg}}. \quad (3.9)$$

Передаточные функции представляют собой дроби, а дроби равны тогда, когда попарно равны их числители и знаменатели.

В результате получается система из двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} G_{dez} &= G_{obj} G_{reg}; \\ H_{dez} &= G_{obj} G_{reg} - H_{obj} H_{reg}, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

которая имеет единственное решение относительно G_{reg} и H_{reg} :

$$\left. \begin{aligned} G_{reg} &= G_{dez} H_{obj}; \\ H_{reg} &= G_{obj} (H_{dez} - G_{dez}). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Если регулятор будет иметь полиномы в соответствии с (3.11), то передаточная функция замкнутой системы будет в точности равна (3.5).

Для получения вкладок в соответствии с выражениями (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), (3.11) разработана программа в MathCAD14 с применением символьного процессора. Необходимость написания программы связана с тем, что, вообще говоря, структурная схема САР может быть иной, чем принята в данном случае (Рисунок 3.1), например, в прямой цепи может быть несколько передаточных функций объекта, или передаточная функция может присутствовать в обратной цепи САР. В этом случае для упрощения выкладок целесообразно их автоматизировать и выполнять в символьном виде.

Кроме того, в учебных целях продемонстрирована возможность автоматизации таких аналитических преобразований с использованием символьного процессора MathCAD14.

3.1.3 Обобщённый алгоритм синтеза регулятора по желаемой передаточной функции замкнутой системы

В соответствии с представленным выше подходом рассмотренный метод синтеза регулятора по желаемой передаточной функции замкнутой системы может быть представлен в виде обобщённого алгоритма (Рисунок 3.2).

Алгоритм состоит из восьми укрупнённых операций:

1) преобразование системы уравнений объекта в передаточную функцию — исходная математическая модель объекта управления, как правило, задаётся в виде системы дифференциальных уравнений, а проектные процедуры предусматривают операции с передаточными функциями, поэтому осуществляется автоматическое преобразование уравнений в матричную форму, а затем — в передаточную функцию;

2) задание структурной схемы системы — предусматривает, что САР может иметь различную конфигурацию, например, в соответствии с рассмотренной выше (Рисунок 3.1), но также и в ином виде;

3) формирование передаточной функции системы — предусматривает автоматическое формирование передаточной функции САР в соответствии с заданной структурной схемой;

4) задание желаемой передаточной функции — предполагает формирование её полиномов числителя и знаменателя в соответствии с тем, какие показатели регулирования (параметры переходной характеристики) необходимо обеспечить в проектируемой САР;

5) определение передаточной функции регулятора — предполагает определение полиномов передаточной функции регулятора в соответствии с рассмотренными выше формулами;

6) преобразование передаточной функции в уравнения состояния — для последующего расчёта переходной характеристики спроектированной системы методами численного интегрирования её передаточная функция преобразуется в систему дифференциальных уравнений в нормальной форме (форме Коши);

7) расчёт переходной характеристики осуществляется с использованием имеющихся в MathCAD процедур численного интегрирования;

8) определение показателей качества регулирования — выполняется, чтобы определить, насколько удалось обеспечить требуемые показатели качества регулирования, в том числе, при неточно заданных параметрах объекта управления и регулятора.

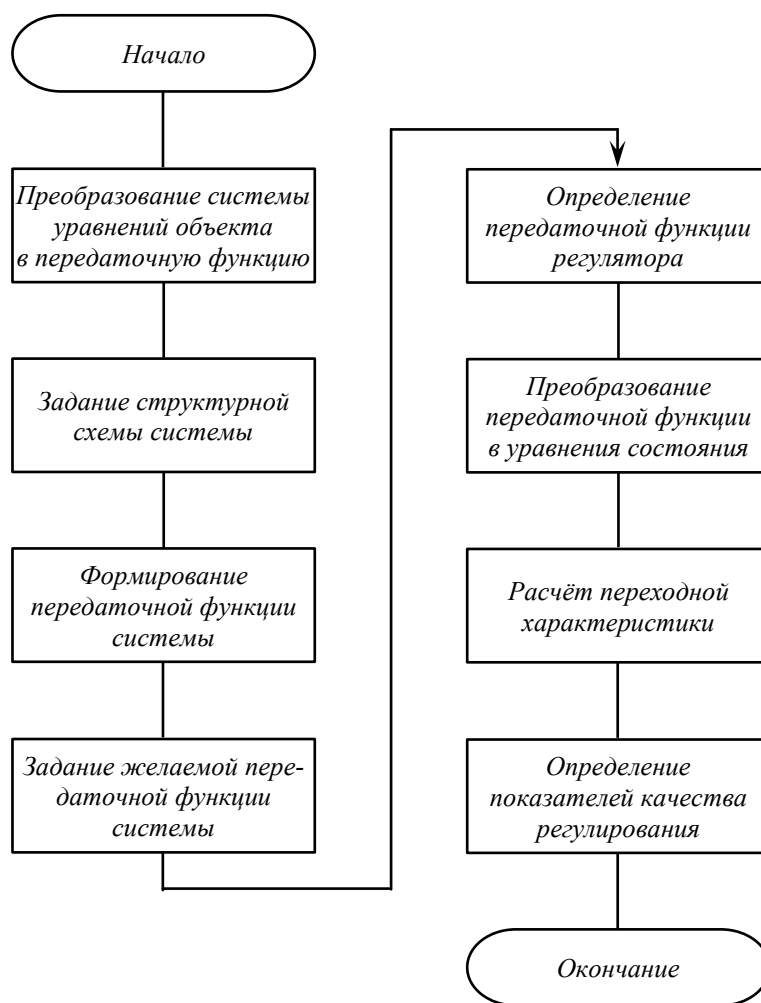


Рисунок 3.2 — Обобщённый алгоритм синтеза регулятора САР

Каждый из восьми шагов обобщённого алгоритма предполагает целый комплекс проектных операций и соответствующих им автоматизированных проектных процедур, которые рассмотрены ниже.

3.2 Общие принципы построения комплекса программ

Комплекс программ разработан с учётом особенностей программной среды MathCAD14, из которых можно выделить:

- 1) работа MathCAD14 осуществляется в режиме интерпретатора;
- 2) листинги программ размещаются на рабочих листах с возможностью приведения поясняющих рисунков и текста;

3) предусмотрена возможность вызова одних рабочих листов из других, обеспечивая при этом последовательность вычислений;

4) наличие встроенного символьного процессора, позволяющего осуществлять символьные операции и совмещать их с вычислительными операциями;

5) наличие встроенной библиотеки численных и символьных процедур, соответствующих потребностям данной работы.

3.3 Комплекс разработанных программ

3.3.1 Преобразование математического описания объекта в его математическую модель

Процесс формирования математического описания на примере двигателя постоянного тока реализован с использованием символьного процессора в программе MathCAD14 (Приложение Е).

Математическое описание — это неупорядоченный комплекс математических выражений, отражающих законы природы и абстрактные математические соотношения исследуемого объекта.

Математическая модель — это упорядоченное математическое описание объекта, в котором выделены переменные состояния, входные переменные, выходные переменные и параметры.

Процесс создания математического описания можно продемонстрировать на примере двигателя постоянного тока с возбуждением от постоянных магнитов (ДПТ).

ДПТ содержит неподвижную часть — *ядро*, на котором размещаются постоянные магниты, а также подвижную часть — *якорь*, на котором размещается обмотка, питаемая напряжением постоянного тока (Рисунок 3.3). При изменении величины напряжения питания скорость двигателя меняется. При изменении полярности напряжения питания скорость меняет знак (имеет место *реверс*).

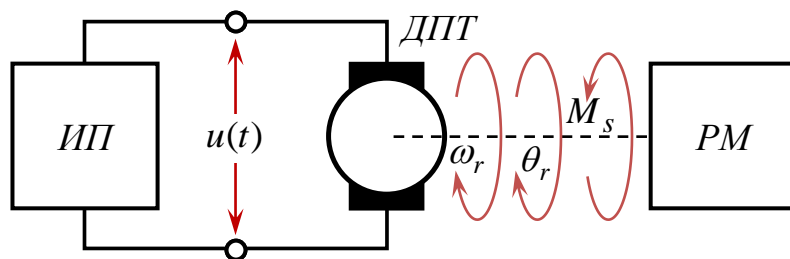


Рисунок 3.3 — Электропривод с двигателем постоянного тока

На схеме (Рисунок 3.3): ДПТ — двигатель постоянного тока, ИП — источник питания с напряжением $u(t)$, РМ — рабочий механизм, вал которого поворачивается двигателем на угол θ_r со скоростью ω_r при моменте сопротивления вращению M_s

Конструкция ДПТ рассмотрена во многих работах [3, 4].

Вопросам проектирования систем автоматического регулирования электроприводов с ДПТ посвящено много работ [2, 5, 26].

Моделирование процессов в двигателе позволяет проектировать электроприводы — сложные устройства, состоящие из двигателя, источника питания, механической нагрузки. Целью проектирования обычно является выбор двигателя нужной мощности и определение закона изменения питающего напряжения для обеспечения желаемой скорости.

Для этого необходимо разработать математическое описание ДПТ, которое получают из рассмотрения электрической схемы замещения (Рисунок 3.4).

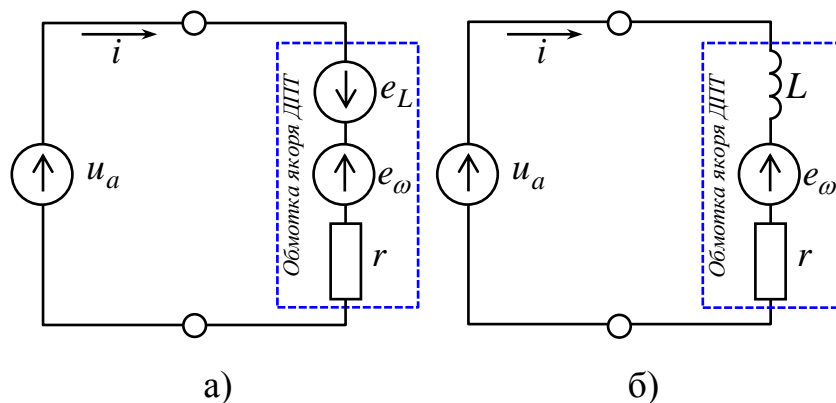


Рисунок 3.4 — Схема замещения ДПТ электрическая

Математическое описание ДПТ на основе схемы замещения (Рисунок 3.4) имеет следующий вид:

$$u_a + e_L = ri + e_\omega, \quad e_L = -L \frac{di}{dt}, \quad e_\omega = c_e \omega_r, \quad (3.1)$$

где u_a — напряжение питания якорной обмотки двигателя;
 e_ω — ЭДС вращения, наводимая в якорной обмотке двигателя из-за вращения якоря в магнитном поле;
 e_L — противо-ЭДС, возникающая всегда при протекании тока через индуктивный элемент;
 M — электромагнитный момент двигателя, создающий усилие для преодоления торможения со стороны присоединённого к валу двигателя рабочего механизма PM ;
 i — ток в якорной обмотке;
 r — активное сопротивление якорной обмотки;
 L — индуктивность якорной обмотки;
 c_e — конструкционная постоянная двигателя (зависит от его размеров и других параметров, приводится в паспортных данных).

К ним следует добавить уравнения механики:

$$J_\Sigma \frac{d\omega_r}{dt} = M + M_s, \quad M = c_M i, \quad \frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r, \quad (3.2)$$

где J_Σ — момент инерции якоря двигателя вместе с присоединённой к валу вращающейся механической нагрузкой;
 M_s — момент сопротивления присоединённой к валу механической нагрузки;
 ω_r — угловая скорость вала двигателя;
 θ_r — угол поворота вала двигателя;

c_M — ещё одна конструкционная постоянная двигателя (приводится в паспортных данных).

В этом математическом описании использованы следующие законы природы:

– выражение $u_a + e_L = ni + e_\omega$ отражает явления, изучаемые в теории электрических цепей (применительно к электромеханике);

– выражение $M = c_M i$ взято из теории двигателей постоянного тока (часть электромеханики);

– выражение $e_\omega = c_e \omega_r$ взято из теории двигателей постоянного тока (часть электромеханики);

– выражение $e_L = -L \frac{di}{dt}$ взято из физики и является законом электромагнитной индукции Фарадея;

– выражение $J_\Sigma \frac{d\omega_r}{dt} = M + M_s$ взято из механики и является вторым законом Ньютона для ускоренного вращательного движения;

– выражение $\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r$ отражает математическое положение, устанавливающее связь между переменной (в данном случае углом поворота θ_r) и её производной (в данном случае угловой скоростью ω_r) через операцию дифференцирования по независимой переменной (в данном случае времени t).

Таким образом, большинство приведённых выражений представляет собой законы природы (в рамках физики), а последнее выражение — математическую абстракцию.

Приведённое математическое описание является некоторой совокупностью математических выражений, по которым невозможно выполнить расчёты, так как неизвестно, какие переменные считать заданными, а какие — рассчитываемыми. Кроме того, некоторые переменные входят в несколько выражений и оказываются связанными с разными переменными, которые, в свою очередь,

связаны между собой. Поэтому для получения математической модели следует упорядочить полученные выражения по какому-то принципу.

Математическая модель — это упорядоченное математическое описание объекта с выделением его входных переменных, выходных переменных, переменных состояния и параметров.

Процесс упорядочения математического описания машины постоянного тока может выглядеть, например, следующим образом (Рисунок 3.5).

$$\begin{array}{l}
 \text{а) } \boxed{e_{\omega} = c_e \omega_r} \rightarrow \boxed{u_a + e_L = ri + e_{\omega}} = \boxed{u_a + e_L = ri + c_e \omega_r} \\
 \text{б) } \boxed{e_L = -L \frac{di}{dt}} \rightarrow \boxed{u_a + e_L = ri + c_e \omega_r} = \boxed{u_a - L \frac{di}{dt} = ri + c_e \omega_r} \\
 \text{в) } \boxed{M = c_M i} \rightarrow \boxed{J_{\Sigma} \frac{d\omega_r}{dt} = M + M_s} = \boxed{J_{\Sigma} \frac{d\omega_r}{dt} = c_M i + M_s} \\
 \text{г) } \boxed{\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r} = \boxed{\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r}
 \end{array}$$

Рисунок 3.5 — Процесс преобразования математического описания в математическую модель

Последнее выражение в (Рисунок 3.5, г) никак не преобразуется.

Таким образом, математическое описание приобрело иной вид:

$$u_a - L \frac{di}{dt} = ri + c_e \omega_r, \quad J_{\Sigma} \frac{d\omega_r}{dt} = c_M i + M_s, \quad \frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r,$$

что можно преобразовать в следующую форму:

$$\left. \begin{array}{l}
 \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (-ri - c_e \omega_r + u_a); \\
 \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{1}{J_{\Sigma}} (c_M i + M_s); \\
 \frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r,
 \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

соответствующую *нормальной форме Коши* для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, упорядочение математического описания означает:

- 1) подстановку одних выражений в другие;
- 2) запись выражений в какой-либо принятой (унифицированной) форме.

Исходное математическое описание содержало систему уравнений и формул разного вида — дифференциальных и алгебраических. Модель вида (3.3) является однородной по языку математического описания — используется только язык дифференциальных уравнений. Таким образом, часто (хотя и не всегда) результирующая математическая модель записывается на каком-то одном математическом языке.

Для численных расчётов использовались паспортные данные ДПТ из справочника [19].

3.3.2 Преобразование системы дифференциальных уравнений в матричную форму

Процесс преобразования системы дифференциальных уравнений в матричную форму реализован с использованием символьного процессора программы MathCAD14 (Приложение Ж).

Полученная модель представляет собой систему *линейных* дифференциальных уравнений, а потому может быть представлена также в матричной форме:

$$\begin{array}{c} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega_r}{dt} \\ \frac{d\theta_r}{dt} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{r}{L} & -\frac{c_e}{L} & 0 \\ \hline \frac{c_M}{J_\Sigma} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \omega_r \\ \hline \theta_r \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline -\frac{1}{L} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{J_\Sigma} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline u_a \\ \hline M_s \\ \hline \end{array} \quad (3.4)$$

В матричной модели явно выделены её составные части.

В левой части уравнения сгруппированы переменные, находящиеся под знаком производной по времени:

$$\begin{matrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega_r}{dt} \\ \frac{d\theta_r}{dt} \end{matrix} \cdot \quad (3.5)$$

В правой части модели выделяется блок с вектором тех же переменных, что и в левой части (но здесь они уже не под знаком производной):

$$\begin{matrix} -\frac{r}{L} & -\frac{c_e}{L} & 0 \\ \frac{c_M}{J_\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} i \\ \omega_r \\ \theta_r \end{matrix} \quad (3.6)$$

В правой части модели выделяется второй блок с вектором переменных, которые не встречаются в левой части модели:

$$\begin{matrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_\Sigma} \end{matrix} \times \begin{matrix} u_a \\ M_s \end{matrix} \cdot \quad (3.7)$$

Векторы переменных носят названия:

$$\begin{matrix} i \\ \omega_r \\ \theta_r \end{matrix} \quad \text{— вектор переменных состояния (или просто вектор состояния);}$$

$$\begin{matrix} u_a \\ M_s \end{matrix} \quad \text{— вектор входных переменных (или просто вектор входа).}$$

Матрицы перед векторами называются матрицами коэффициентов:

$-\frac{r}{L}$	$-\frac{c_e}{L}$	0
$\frac{c_M}{J_\Sigma}$	0	0
0	1	0

— матрица коэффициентов при векторе переменных

состояния;

$\frac{1}{L}$	0
0	$\frac{1}{J_\Sigma}$

— матрица коэффициентов при векторе входных переменных.

Таким образом, исходное математическое описание с неопределённым составом переменных состояния, входных, выходных переменных и параметров преобразовано в математическую модель с этими явно выделенными составляющими.

В общем виде для матричного представления можно записать модель ДПТ в форме *переменных состояния*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x} &= \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}\bar{u}; \\ \bar{y} &= \mathbf{C}\bar{x} + \mathbf{D}\bar{u}, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

где $\bar{x} = \begin{bmatrix} i \\ \omega_r \\ \theta_r \end{bmatrix}$ — вектор переменных состояния; $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_a \\ M_s \end{bmatrix}$ — вектор входных пе-

ременных; $\bar{y} = \begin{bmatrix} \omega_r \\ M_s \end{bmatrix}$ — вектор выходных переменных;

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{r}{L} & -\frac{c_e}{L} & 0 \\ \hline \frac{c_M}{J_\Sigma} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{— матрица коэффициентов при векторе состояния;}$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{1}{L} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{J_\Sigma} \\ \hline \end{array} \quad \text{— матрица коэффициентов при векторе входных переменных;}$$

$$\mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline c_M & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{— матрица коэффициентов при переменных состояния в}$$

уравнении выхода; \mathbf{D} — матрица коэффициентов при входных переменных в уравнении выхода (в рассмотренном примере с ДПТ была равна нулю).

Рассмотренная модель может быть записана в векторной форме и имеет следующий вид:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \bar{x} = \bar{\mathbf{F}}_x(\bar{x}, \bar{u}, P); \\ \bar{y} = \bar{\mathbf{F}}_y(\bar{x}, \bar{u}, Q), \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

$$\text{где } \bar{\mathbf{F}}_x(\bar{x}, \bar{u}, P) = \begin{array}{|c|} \hline F_{x1}(\bar{x}, \bar{u}, P) \\ \hline F_{x2}(\bar{x}, \bar{u}, P) \\ \hline \dots \\ \hline F_{xn}(\bar{x}, \bar{u}, P) \\ \hline \end{array} \quad \text{и } \bar{\mathbf{F}}_y(\bar{x}, \bar{u}, Q) = \begin{array}{|c|} \hline F_{y1}(\bar{x}, \bar{u}, Q) \\ \hline F_{y2}(\bar{x}, \bar{u}, Q) \\ \hline \dots \\ \hline F_{yn}(\bar{x}, \bar{u}, Q) \\ \hline \end{array} \quad \text{— векторные функции}$$

(т. е. вектора, элементы которых являются функциями).

В выражениях (3.9) P и Q — массивы параметров, используемых в соответствующих уравнениях, обозначенных функциями F_x и F_y .

Каждая функция содержит свой набор параметров, но их можно объединить в общие наборы в рамках всех уравнений состояния $\bar{\mathbf{F}}_x(\bar{x}, \bar{u}, Q)$ и всех уравнений выхода $\bar{\mathbf{F}}_y(\bar{x}, \bar{u}, Q)$.

3.3.3 Преобразование системы дифференциальных уравнений в матричной форме в передаточную функцию

Процесс преобразования системы дифференциальных уравнений в форму передаточной функции реализован с использованием символического процессора программы MathCAD14 (Приложение 3).

Представление передаточной функции в виде типовых динамических звеньев представлено на рабочем листе программы MathCAD (Приложение И).

Для получения передаточных функций к матричным уравнениям необходимо применить преобразование Лапласа, заменив оригиналы их изображениями, а производные $\frac{d}{dt} \rightarrow s$.

Тогда операторные выражения уравнений состояния:

Тогда операторные выражения уравнений состояния:

$$\left. \begin{aligned} s \cdot \bar{x}(s) &= \mathbf{A} \cdot \bar{x}(s) + \mathbf{B} \cdot \bar{u}(s); \\ \bar{y}(s) &= \mathbf{C} \cdot \bar{x}(s) + \mathbf{D} \cdot \bar{u}(s). \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Выполняются простые преобразования уравнений (3.10):

$$\begin{aligned} s \cdot \bar{x}(s) - \mathbf{A} \cdot \bar{x}(s) &= \mathbf{B} \cdot \bar{u}(s); \\ [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}] \cdot \bar{x}(s) &= \mathbf{B} \cdot \bar{u}(s); \\ \bar{x}(s) &= [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \bar{u}(s); \\ \bar{x}(s) &= \mathbf{W}(s) \cdot \bar{u}(s), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ — единичная матрица (квадратная матрица, у которой

элементы по главной диагонали — единицы, а все остальные — нули);

$\mathbf{W}(s) = [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{B}$ — матричная передаточная функция.

Понятие *матричная передаточная функция* означает, что уравнение (3.11) может быть записано следующим образом:

$$\begin{array}{|c|} \hline x_1(s) \\ \hline x_2(s) \\ \hline \dots \\ \hline x_n(s) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline W_{1,1}(s) & W_{1,2}(s) & \dots & W_{1,m}(s) & \\ \hline W_{2,1}(s) & W_{2,2}(s) & \dots & W_{2,m}(s) & \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \hline W_{n,1}(s) & W_{n,2}(s) & \dots & W_{n,m}(s) & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline u_1(s) \\ \hline u_2(s) \\ \hline \dots \\ \hline u_m(s) \\ \hline \end{array} \quad (3.12)$$

Отсюда видно, что матричная передаточная функция (3.12) показывает связь между любой переменной состояния x и любым внешним воздействием u , например:

$$x_1(s) = W_{1,1}(s) \cdot u_1(s), \quad x_2(s) = W_{2,5}(s) \cdot u_5(s)$$

и т. д.

В общем виде для k -ой переменной состояния и j -ого внешнего воздействия:

$$x_k(s) = W_{k,j}(s) \cdot u_j(s),$$

где $W_{k,j}$ — частная передаточная функция.

Все частные передаточные функции в (3.12) имеют в общем случае разные числители, но один общий знаменатель. Это связано с тем, что при вычислении обратной матрицы в

$$\mathbf{W}(s) = [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (3.13)$$

определяется знаменатель — общий для всех в виде полинома.

Поэтому уравнение (3.12) можно переписать следующим образом:

$$\begin{array}{|c|} \hline x_1(s) \\ \hline x_2(s) \\ \hline \dots \\ \hline x_n(s) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{G_{1,1}(s)}{H(s)} & \frac{G_{1,2}(s)}{H(s)} & \dots & \frac{G_{1,m}(s)}{H(s)} \\ \hline \frac{G_{2,1}(s)}{H(s)} & \frac{G_{2,2}(s)}{H(s)} & \dots & \frac{G_{2,m}(s)}{H(s)} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \frac{G_{n,1}(s)}{H(s)} & \frac{G_{n,2}(s)}{H(s)} & \dots & \frac{G_{n,m}(s)}{H(s)} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline u_1(s) \\ \hline u_2(s) \\ \hline \dots \\ \hline u_m(s) \\ \hline \end{array}$$

или

$$\begin{array}{|c|} \hline x_1(s) \\ \hline x_2(s) \\ \hline \dots \\ \hline x_n(s) \\ \hline \end{array} = \frac{1}{H(s)} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline G_{1,1}(s) & G_{1,2}(s) & \dots & G_{1,m}(s) \\ \hline G_{2,1}(s) & G_{2,2}(s) & \dots & G_{2,m}(s) \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline G_{n,1}(s) & G_{n,2}(s) & \dots & G_{n,m}(s) \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline u_1(s) \\ \hline u_2(s) \\ \hline \dots \\ \hline u_m(s) \\ \hline \end{array}$$

Из данного уравнения можно получить выражения частных передаточных функций для любого сочетания выходных и входных переменных.

3.3.4 Задание структурной схемы системы

Процесс формирования передаточной функции системы реализован на рабочем листе программы MathCAD14 (Приложение Б).

Структурные схемы замкнутых САР могут иметь самую различную конфигурацию, в частности, иметь не один контур, как на схеме (Рисунок 3.1), а несколько контуров. Это обусловлено несколькими обстоятельствами.

Во-первых, проектируемая САР может содержать не одно устройство, а несколько устройств, например, датчики, преобразователи и т. д.

Во-вторых, даже одно устройство может иметь несколько входов и поэтому иметь несколько контуров.

В данном случае конфигурация САР не имеет значения — главное, чтобы в ней использовался один регулятор.

Общие принципы автоматического формирования передаточной функции сложной САР рассмотрены ниже на примере системы с двумя входами и одним выходом (Рисунок 3.6).

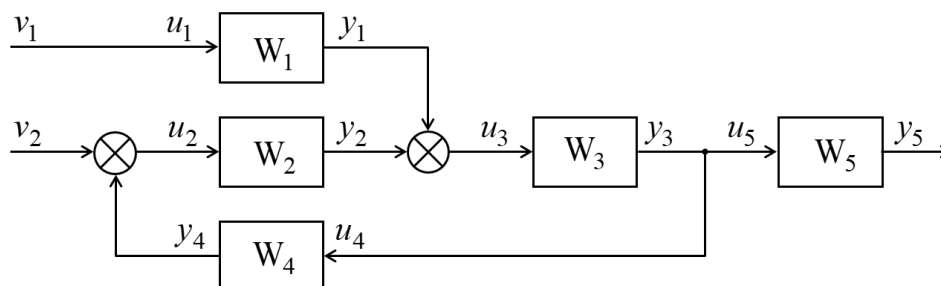


Рисунок 3.6 — Структурная схема системы автоматического регулирования

На схеме (Рисунок 3.6) обозначено:

– блоки с передаточными функциями $W_1(s)$, $W_2(s)$, $W_3(s)$, $W_4(s)$, $W_5(s)$;

– вектор входных переменных блоков $\bar{u}(s) = \begin{matrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ u_3(s) \\ u_4(s) \\ u_5(s) \end{matrix}$;

– вектор выходных переменных блоков $\bar{y}(s) = \begin{matrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \\ y_4(s) \\ y_5(s) \end{matrix}$;

– вектор внешних переменных САР $\bar{v}(s) = \begin{matrix} v_1(s) \\ v_2(s) \end{matrix}$.

Метод формирования передаточной функции всей системы основан на теории графов и является модификацией методов, рассмотренных в работах [8, 13, 16, 20].

3.3.5 Формирование передаточной функции системы

Процесс формирования передаточной функции системы реализован на рабочем листе программы MathCAD14 (Приложение Б).

В соответствии с заданной структурной схемой (Рисунок 3.6) записываются операторные уравнения связи между выходными и входными сигналами каждого блока:

$$y_1(s) = W_1(s) \cdot u_1(s);$$

$$y_2(s) = W_2(s) \cdot u_2(s);$$

$$y_3(s) = W_3(s) \cdot u_3(s);$$

$$y_4(s) = W_4(s) \cdot u_4(s);$$

$$y_5(s) = W_5(s) \cdot u_5(s).$$

В общем виде эти выражения можно представить в матричной форме:

$$\bar{y}(s) = \mathbf{S}_{yu}(s) \cdot \bar{u}(s) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline W_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & W_2 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & W_n \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline \dots \\ \hline u_n \\ \hline \end{array}, \quad (3.12)$$

где n — число блоков;

u — входные величины блоков;

y — выходные величины блоков;

W — передаточные функции соответствующих блоков (для уменьшения громоздкости оператор Лапласа не приводится).

Матрица передаточных функций блоков:

$$\mathbf{S}_{yu} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{W}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{W}_2 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & \mathbf{W}_n \\ \hline \end{array}. \quad (3.13)$$

Далее записывается уравнение связи между выходами одних блоков и входами других блоков:

$$\bar{u}(s) = \mathbf{S}_{uy} \cdot \bar{y}(s), \quad (3.14)$$

где матрица связей между блоками применительно к рассматриваемому примеру системы:

$$\mathbf{S}_{uy} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \hline u_1 & & & & & \\ \hline u_2 & & & & 1 & \\ \hline u_3 & 1 & 1 & & & \\ \hline u_4 & & & 1 & & \\ \hline u_5 & & & 1 & & \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{S}_{uv} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (3.15)$$

В матрице связей между блоками перебираются по очереди входные переменные u , если связь между соответствующей выходной переменной одного блока и входной переменной другого блока есть, ставится 1, если нет — ставится 0.

Далее записывается уравнение внешних связей, отражающее наличие входов САР и их подключение к тому или иному блоку:

$$\bar{u}(s) = \mathbf{S}_{uv} \cdot \bar{v}(s), \quad (3.16)$$

где вводится матрица внешних подключений, которая для рассматриваемого пример имеет вид:

$$\mathbf{S}_{uv} = \begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2 \\ \hline u_1 & 1 & \\ \hline u_2 & & 1 \\ \hline u_3 & & \\ \hline u_4 & & \\ \hline u_5 & & \end{array}, \quad \mathbf{S}_{uv} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (3.17)$$

Матрица подключений показывает, входы каких блоков являются одновременно входами САР.

Таким образом, структурная схема () описывается системой из трёх матричных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{y}(s) = \mathbf{S}_{yu}(s) \cdot \bar{u}(s); \\ \bar{u}(s) = \mathbf{S}_{uy} \cdot \bar{y}(s); \\ \bar{u}(s) = \mathbf{S}_{uv} \cdot \bar{v}(s). \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

Задача дальнейших выкладок заключается в том, чтобы с использованием системы матричных уравнений (3.18) получить зависимость

$$\bar{y}(s) = \mathbf{W}(s) \cdot \bar{v}(s) \quad (3.19)$$

и определить матричную передаточную функцию САР $\mathbf{W}(s)$.

В связи с этим выполняются следующие преобразования:

$$\bar{y} = \mathbf{S}_{yu} \bar{u} = \mathbf{S}_{yu} (\mathbf{S}_{uy} \bar{y} + \mathbf{S}_{uv} \bar{v}) = \mathbf{S}_{yu} \mathbf{S}_{uy} \bar{y} + \mathbf{S}_{yu} \mathbf{S}_{uv} \bar{v}, \quad (3.20)$$

где для уменьшения громоздкости в переменных не записаны операторы Лапласа.

$$\begin{aligned} \bar{y} - \mathbf{S}_{yu} \mathbf{S}_{uy} \bar{y} &= \mathbf{S}_{yu} \mathbf{S}_{uv} \bar{v}; \\ (\mathbf{E} - \mathbf{S}_{yu} \mathbf{S}_{uy}) \bar{y} &= \mathbf{S}_{yu} \mathbf{S}_{uv} \bar{v}; \\ \bar{y} &= (\mathbf{E} - \mathbf{S}_{yu} \mathbf{S}_{uy})^{-1} \mathbf{S}_{yu} \mathbf{S}_{uv} \bar{v}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где \mathbf{E} — единичная матрица (квадратная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, а остальные 0);

$(\mathbf{E} - \mathbf{S}_{yu}\mathbf{S}_{uy})^{-1}$ — обозначает обратную матрицу.

В соответствии с выражениями (3.19) и (3.21) можно определить матричную передаточную функцию САР:

$$\mathbf{W}(s) = (\mathbf{E} - \mathbf{S}_{yu}\mathbf{S}_{uy})^{-1}\mathbf{S}_{yu}\mathbf{S}_{uv}. \quad (3.22)$$

Для автоматического получения передаточной функции замкнутой системы разработана проектная процедура, представленная на рабочем листе MathCAD14 — Modul-01.xmcd.

В результате работы данной процедуры применительно к рассматриваемой САР (Рисунок 3.6) полученная матричная передаточная функция

$$\mathbf{W} := (\mathbf{E} - \mathbf{S}_{yu}\mathbf{S}_{uy})^{-1}\mathbf{S}_{yu}\mathbf{S}_{uv} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{W_1}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{0}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Полученное выражение содержит передаточные функции САР для любого сочетания входных и выходных переменных.

В рассматриваемом случае имеется 2 внешних переменных v_1 и v_2 , а также 5 выходных переменных y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 .

В связи с этим можно получить $2 \times 5 = 10$ передаточных функций САР.

В разработанной программе для этого задаются номера внешней и выходной переменных и получают частную передаточную функцию, например, при $j = 1$ и $k = 5$:

$$\frac{y_k}{v_j} = W_{k,j} \rightarrow \frac{y_5}{v_1} = -\frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1}, \quad (3.24)$$

а при $j = 2$ и $k = 5$:

$$\frac{y_k}{v_j} = W_{k,j} \rightarrow \frac{y_5}{v_2} = -\frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1}. \quad (3.25)$$

Таким образом можно получить передаточную функцию для любого соотношения внешних и выходных переменных.

В данном случае выходная переменная y_5 является выходной переменной всей САР, поэтому с помощью передаточных функций (3.24) и (3.25) можно исследовать поведение y_5 при изменении внешних переменных v_1 и v_2 соответственно. Но разработчика могут интересовать переходные процессы на выходах любых блоков, т. е. для любых выходных переменных y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 . Для этого можно получить соответствующие передаточные функции. Например, передаточная функция

$$\frac{y_k}{v_j} = W_{k,j} \rightarrow \frac{y_3}{v_2} = -\frac{W_2 \cdot W_3}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \quad (3.26)$$

позволяет исследовать сигнал обратной связи, который идёт с выхода блока W_3 на вход датчика обратной связи W_4 .

Каждая передаточная функция может быть представлена полиномами числителя и знаменателя и тогда результатом работы программы будет автоматическое формирование полиномов числителя и знаменателя передаточной функции САР.

Для автоматического получения передаточной функции замкнутой системы с выделением полиномов числителя и знаменателя разработана проектная процедура, представленная на рабочем листе MathCAD14 — Modul-02.xmcd.

Пусть все передаточные функции заданы соответствующими полиномами числителей и знаменателей:

$$W_1 = \frac{G_1}{H_1}, \quad W_2 = \frac{G_2}{H_2}, \quad W_3 = \frac{G_3}{H_3}, \quad W_4 = \frac{G_4}{H_4}, \quad W_5 = \frac{G_5}{H_5}. \quad (3.27)$$

Если подставить выражения для передаточных функций (3.27) в матричную передаточную функцию (3.23), то получается выражение:

$$W_x := W \text{ simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{G_1}{H_1} & 0 \\ -\frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4}{H_1 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)} & -\frac{G_2 \cdot H_3 \cdot H_4}{G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4} \\ -\frac{G_1 \cdot G_3 \cdot H_2 \cdot H_4}{H_1 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)} & -\frac{G_2 \cdot G_3 \cdot H_4}{G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4} \\ -\frac{G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot H_2}{H_1 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)} & -\frac{G_2 \cdot G_3 \cdot G_4}{G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4} \\ -\frac{G_1 \cdot G_3 \cdot G_5 \cdot H_2 \cdot H_4}{H_1 \cdot H_5 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)} & -\frac{G_2 \cdot G_3 \cdot G_5 \cdot H_4}{H_5 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

из которого можно получить частные передаточные функции по аналогии с (3.24), (3.25) или (3.26), в частности, при задании $j = 2$ и $k = 5$:

$$\frac{y_k}{v_j} = W_{k,j} \text{ simplify} \rightarrow \frac{y_5}{v_2} = -\frac{G_2 \cdot G_3 \cdot G_5 \cdot H_4}{G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot H_5 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \cdot H_5}, \quad (3.29)$$

Эти выражения могут быть далее детализированы, если каждый полином представить в виде степеней оператора Лапласа.

Для автоматического получения передаточной функции замкнутой системы с заданием полиномов числителя и знаменателя в развёрнутом виде разработана проектная процедура, представленная на рабочем листе MathCAD14 — Modul-03.xmcd. Все полиномы числителей и знаменателей раскрываются, т. е. задаются конкретные коэффициенты по соответствующих степенях оператора Лапласа. Для этого используется собственная символьная процедура PForm.

Таблица 2 — Числители и знаменатели передаточных функций для примера

Числитель	Знаменатель
$G_1 := \text{PForm}(0, g_1, g_{1.0}) \rightarrow g_{1.0}$	$H_1 := \text{PForm}(1, h_1, h_{1.0}) \rightarrow h_{1.0} + s \cdot h_{1_1}$
$G_2 := \text{PForm}(1, g_2, g_{2.0}) \rightarrow g_{2.0} + s \cdot g_{2_1}$	$H_2 := \text{PForm}(1, h_2, h_{2.0}) \rightarrow h_{2.0} + s \cdot h_{2_1}$
$G_3 := \text{PForm}(0, g_3, g_{3.0}) \rightarrow g_{3.0}$	$H_3 := \text{PForm}(1, h_3, h_{3.0}) \rightarrow h_{3.0} + s \cdot h_{3_1}$
$G_4 := \text{PForm}(0, g_4, g_{4.0}) \rightarrow g_{4.0}$	$H_4 := \text{PForm}(0, h_4, h_{4.0}) \rightarrow h_{4.0}$
$G_5 := \text{PForm}(0, g_5, g_{5.0}) \rightarrow g_{5.0}$	$H_5 := \text{PForm}(1, h_5, h_{5.0}) \rightarrow h_{5.0} + s \cdot h_{5_1}$

Результат символьных выкладок с учётом полиномов числителей и знаменателей передаточных функций (Таблица 2) приведён на рисунках (Рисунок 3.7) и (Рисунок 3.8).

Символьные выкладки в этом случае дают громоздкие результаты, особенно для полинома знаменателя. Вывести их в форме полинома невозможно, поэтому в программе используется символьная операция вывода коэффициентов полинома знаменателя в виде вектора в соответствующем порядке (Рисунок 3.8).

Разработанная программа Modul-03.xmcd автоматически выполняет все выкладки для различного состава полиномов.

Ниже рассматривается конкретный пример с численным заданием коэффициентов полиномов — в этом случае результирующие выражения становятся вполне обозримыми.

Для этого разработана проектная процедура, представленная на рабочем листе MathCAD14 — Modul-04.xmcd.

При заданных передаточных функциях

$$W_1 := \frac{k_1}{T_1 \cdot s + 1}, W_2 := \frac{k_2}{T_2 \cdot s + 1}, W_3 := \frac{k_3 \cdot (\tau_3 \cdot s + 1)}{T_3^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi_3 \cdot T_3 \cdot s + 1}, W_4 := \frac{k_4 \cdot (\tau_4 \cdot s + 1)}{T_4 \cdot s + 1}, W_5 := \frac{k_5}{T_5 \cdot s + 1} \quad (3.30)$$

и соответствующих значениях параметров передаточная функция системы

$$W_{ss} := W_{ss} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow \frac{1.766e12 \cdot s + 1.21e11 \cdot s^2 + 4.159e9 \cdot s^3 + 5.373e7 \cdot s^4 + 225035.0 \cdot s^5 + -0.00001689 \cdot s^6 + -4.47e-8 \cdot s^7 + 4.688e12}{(s + 100.0) \cdot (s + 12.71) \cdot (s + 229.9) \cdot (s + 15.99) \cdot (-10.8 \cdot s + s^2 + 1601.0) \cdot (35.46 \cdot s + s^2 + 627.0)} \quad (3.31)$$

$$g := \text{numer}(W_x) \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{collect, s} \end{array} \right. \rightarrow \left(-g_{1,0} g_{3,0} g_{5,0} h_{4,0} h_{2,1} \right) \cdot s - g_{1,0} g_{3,0} g_{5,0} h_{2,0} h_{4,0}$$

Рисунок 3.7 — Числитель передаточной функции системы

$$K_h = K_H \rightarrow \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{2,0} g_{3,0} g_{4,0} h_{1,0} h_{5,0} - h_{1,0} h_{2,0} h_{3,0} h_{4,0} h_{5,0} \\ g_{2,0} g_{3,0} g_{4,0} h_{1,0} h_{5,1} + g_{2,0} g_{3,0} g_{4,0} h_{5,0} h_{1,1} + g_{3,0} g_{4,0} h_{1,0} h_{5,0} g_{2,1} - h_{1,0} h_{2,0} h_{3,0} h_{4,0} h_{5,1} - h_{1,0} h_{2,0} h_{4,0} h_{5,0} h_{3,1} - h_{1,0} h_{3,0} h_{4,0} h_{5,0} h_{2,1} - h_{2,0} h_{3,0} h_{4,0} h_{5,0} h_{1,1} \\ g_{2,0} g_{3,0} g_{4,0} h_{1,1} h_{5,1} + g_{3,0} g_{4,0} h_{1,0} g_{2,1} h_{5,1} + g_{3,0} g_{4,0} h_{5,0} g_{2,1} h_{1,1} - h_{1,0} h_{2,0} h_{4,0} h_{3,1} h_{5,1} - h_{1,0} h_{3,0} h_{4,0} h_{2,1} h_{5,1} - h_{1,0} h_{4,0} h_{5,0} h_{2,1} h_{3,1} - h_{2,0} h_{3,0} h_{4,0} h_{1,1} h_{5,1} - h_{2,0} h_{4,0} h_{5,0} h_{1,1} h_{3,1} - h_{3,0} h_{4,0} h_{5,0} h_{1,1} h_{2,1} \\ g_{3,0} g_{4,0} g_{2,1} h_{1,1} h_{5,1} - h_{1,0} h_{4,0} h_{2,1} h_{3,1} h_{5,1} - h_{2,0} h_{4,0} h_{1,1} h_{3,1} h_{5,1} - h_{3,0} h_{4,0} h_{1,1} h_{2,1} h_{5,1} - h_{4,0} h_{5,0} h_{1,1} h_{2,1} h_{3,1} \\ -h_{4,0} h_{1,1} h_{2,1} h_{3,1} h_{5,1} \end{pmatrix}$$

Рисунок 3.8 — Коэффициенты знаменателя передаточной функции системы
(сверху вниз в соответствии со степенями оператора Лапласа)

3.3.6 Задание желаемой передаточной функции

3.3.6.1 Обзор существующих методов выбора желаемой передаточной функции замкнутой системы

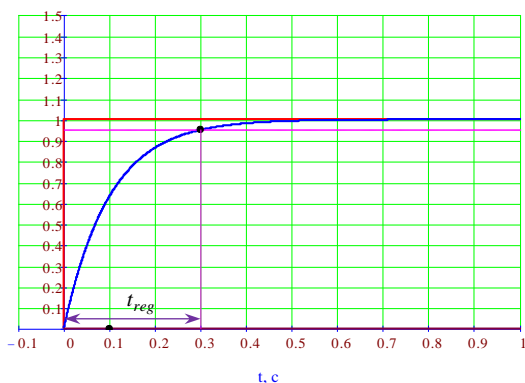
Выбору желаемой передаточной функции замкнутой системы посвящено много работ. В основном, они основаны на том, чтобы обеспечить желаемую переходную характеристику при ступенчатом воздействии.

Вид переходной характеристики полностью определяется корнями полиномов числителя и знаменателя. При этом основную роль играют корни полинома знаменателя — характеристического полинома.

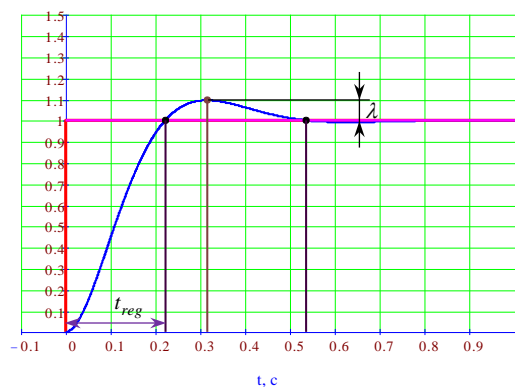
В свою очередь, корни полиномов полностью определяются коэффициентами полиномов, но эта связь не является очевидной и наглядной. Поэтому в ряде работ проведены исследования, как то или иное сочетание коэффициентов полиномов (прежде всего знаменателя) влияет на вид переходной характеристики.

Были получены следующие результаты [12, 13]. В соответствии с ними критериями качества регулирования являются минимум времени регулирования и минимум перерегулирования. Эти показатели противоречивы.

Существует два основных вида переходных характеристик: апериодические и колебательные (Рисунок 3.9). Апериодические характеристики свойственны полиномам первого порядка, а колебательные — полиномам второго порядка. Самых звеньев может быть несколько — при наличии нескольких звеньев одного типа характер переходного процесса не меняется. Поэтому несколько апериодических звеньев дают апериодический процесс, а несколько колебательных — колебательный.



а) аperiodический процесс



б) колебательный процесс

Рисунок 3.9 — К выбору желаемой передаточной функции из условия минимума перерегулирования и времени регулирования

Аperiodический процесс (Рисунок 3.9, а) не имеет перерегулирования, но обладает сравнительно большим временем регулирования.

Колебательный процесс (Рисунок 3.9, б) имеет меньшее, чем у аperiodического процесса, время регулирования, но обладает перерегуливанием. Подбором корней полинома можно обеспечить оптимальное сочетание малых времени регулирования и перерегулирования.

В литературе представлены различные принципы распределения коэффициентов характеристического полинома по степеням оператора Лапласа:

$$H(s) = h_0 + h_1s + h_2s^2 + \dots + h_ns^n, \quad (3.32)$$

из которых можно выделить следующие:

1) в соответствии с методом, представленным в работе [13], все корни характеристического полинома вещественные, а коэффициенты определяются специальными выражениям;

2) в соответствии с методом стандартных переходных характеристик, представленным в работе [6], предложено использовать не только вещественные, но и комплексные корни, при этом коэффициенты характеристического полинома рассчитываются по соответствующим выражениям;

3) в соответствии с принципом модального управления, изложенным в работе [12], предлагается биномиальное распределение коэффициентов характеристического полинома до восьмого порядка включительно:

$$H(s) = \omega_0 + s;$$

$$H(s) = \omega_0^2 + 2\omega_0 s + s^2$$

$$H(s) = \omega_0^3 + 3\omega_0^2 s + 3\omega_0 s^2 + s^3$$

$$H(s) = \omega_0^4 + 4\omega_0^3 s + 6\omega_0^2 s^2 + 4\omega_0 s^3 + s^4$$

$$H(s) = \omega_0^5 + 5\omega_0^4 s + 10\omega_0^3 s^2 + 10\omega_0^2 s^3 + 5\omega_0 s^4 + s^5$$

$$H(s) = \omega_0^6 + 6\omega_0^5 s + 15\omega_0^4 s^2 + 20\omega_0^3 s^3 + 15\omega_0^2 s^4 + 6\omega_0 s^5 + s^6$$

$$H(s) = \omega_0^7 + 7\omega_0^6 s + 21\omega_0^5 s^2 + 35\omega_0^4 s^3 + 35\omega_0^3 s^4 + 21\omega_0^2 s^5 + 7\omega_0 s^6 + s^7$$

$$H(s) = \omega_0^8 + 8\omega_0^7 s + 28\omega_0^6 s^2 + 56\omega_0^5 s^3 + 70\omega_0^4 s^4 + 56\omega_0^3 s^5 + 28\omega_0^2 s^6 + 8\omega_0 s^7 + s^8$$

(3.33)

Во всех рассматриваемых методах анализируются и выбираются именно корни характеристического полинома, а уже через них — коэффициенты полинома.

Можно заметить, что такой подход, хотя и имеет глубокое математическое обоснование, является недостаточно наглядным, так как коэффициенты полинома не дают наглядного представления о переходных характеристиках. Применительно к учебному процессу это особенно важно, так как обучающийся должен понимать смысл выполняемых проектных операций, в частности, выбора желаемой переходной характеристики и соответствующей желаемой передаточной функции.

3.3.6.2 Предложенный метод выбора желаемой передаточной функции замкнутой системы

В рамках данной работы предложено выбирать не переходную характеристику, а типовые динамические звенья, из которых будет состоять желаемая передаточная функция проектируемой системы. Типовые динамические звенья однозначно определяют переходный процесс и поэтому с математической точки зрения дают то же, что и выбор корней. Но с точки зрения наглядности типовые динамические звенья гораздо более понятны, чем абстрактные коэффициенты полинома.

Таким образом, желаемая передаточная функция должна иметь вид:

$$\Phi_{dez} = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{G_{dez}}{H_{dez}} = \frac{Z_{rg1} \cdot Z_{rg2} \cdot \dots \cdot Z_{rgm}}{Z_{rh1} \cdot Z_{rh2} \cdot \dots \cdot Z_{rh n}}, \quad (3.34)$$

где Z_g — типовые динамические звенья числителя (правый нижний индекс g);

Z_h — типовые динамические звенья знаменателя (правый нижний индекс h);

индекс r — степень типового динамического звена, в рассматриваемом случае может быть равна 1 или 2.

Для задания желаемой передаточной функции используются типовые динамические звенья двух видов:

1) первого порядка (апериодическое звено для знаменателя) — $Z_1 = (Ts + 1)$;

2) второго порядка (колебательное звено для знаменателя) — $Z_2 = (T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)$.

Возможно также использование оператора Лапласа в качестве интегрирующего звена в знаменателе — в первой или в большей степени.

У типовых динамических звеньев параметры имеют чётко выраженный физический смысл.

Например, для апериодического звена T — постоянная времени, однозначно связанная со временем регулирования t_{reg} формулой:

$$t_{reg} = 3,5T .$$

Для колебательного звена постоянная времени T имеет иной, но тоже чётко определённый, смысл — это период колебаний, если таковые наблюдаются. Коэффициент затухания ξ определяет наличие и амплитуду колебаний, в частности, при $\xi > 0,8$ колебания практически отсутствуют.

Замкнутая САР рассматриваемого объекта должна обладать в данном случае следующими свойствами:

- 1) отсутствие статической ошибки;
- 2) порядок передаточной функции замкнутой системы (порядок характеристического полинома) должен быть не менее порядка характеристического полинома объекта управления.

Отсутствие статической ошибки не является универсальным требованием. Может быть требование, чтобы ошибка была, но не более некоторой величины. Возможны и другие требования, связанные с ошибками системы.

Рассматриваемое в данном случае условие об отсутствии статической ошибки приводит к тому, что желаемая передаточная функция замкнутой системы должна иметь вид:

$$\Phi_{dez} = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{G_{dez}}{H_{dez}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{k=n} h_{d.k} s^k + 1} = \frac{1}{h_{d.n} s^n + h_{d.n-1} s^{n-1} + \dots + 1} . \quad (3.35)$$

В желаемой передаточной функции (3.35) полином числителя выбран равным 1, а полином знаменателя (характеристический полином) содержит 1 в качестве свободного члена.

Отсутствие статической ошибки означает, что в установившемся режиме передаточная функция (3.35) должна равняться 1 (т. е. превратиться в коэффициент). Поведение системы в установившемся режиме проверяется подстановкой в передаточную функцию условия $s = 0$, так как это соответствует условию достижения статического режима $t = \infty$.

При $s = 0$ передаточная функция (3.35) трансформируется следующим образом:

$$\Phi_{dez} = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{G_{dez}}{H_{dez}} = \frac{1}{h_{d.n}s^n + h_{d.n-1}s^{n-1} + \dots + 1} \Big|_{s=0} = 1, \quad (3.36)$$

что и говорит об отсутствии статической ошибки.

Условие о том, чтобы порядок передаточной функции (т. е. порядок характеристического полинома) был не меньше порядка передаточной функции объекта управления объясняется следующим.

Порядок характеристического полинома передаточной функции объекта управления характеризует его динамические свойства.

Введение последовательного регулятора фактически приводит к тому, что характеристический полином объекта управления должен скомпенсироваться полиномом числителя регулятора и замениться на полином знаменателя регулятора:

$$W_{reg} W_{obj} = \frac{G_{reg} G_{obj}}{H_{reg} H_{obj}} = \frac{G_{dez} H_{obj}}{G_{obj} (H_{dez} - G_{dez}) H_{obj}} = \frac{G_{dez}}{(H_{dez} - G_{dez})}. \quad (3.37)$$

Таким образом, с помощью передаточной функции регулятора полностью компенсируются все свойства объекта управления — сокращаются полиномы его передаточной функции числитель G_{obj} и знаменатель H_{obj} . В результате, объект управления «исчезает». Они замещаются новым объектом, который представляется эквивалентной передаточной функцией с числителем и знаменателем:

- числитель эквивалентной передаточной функции — G_{dez} ;
- знаменатель эквивалентной передаточной функции — $(H_{dez} - G_{dez})$.

Видно, что полученные числитель и знаменатель содержат полиномы только желаемой передаточной функции. Поэтому теоретически можно обеспечить любые динамические свойства замкнутой САУ, выбирая эти полиномы. Но существуют практические ограничения, связанные с последующей реализацией регулятора. Они сводятся к следующему.

Знаменатель регулятора:

$$H_{reg} = G_{obj}(H_{dez} - G_{dez}) \quad (3.38)$$

Это значит, что полином знаменателя передаточной функции регулятора должен иметь порядок не меньше, чем полином знаменателя объекта управления, так как знаменатель передаточной функции объекта управления дополнительно умножается на полином.

Нельзя выбрать желаемую передаточную функцию с одинаковыми числителем и знаменателем:

$$\Phi_{dez} = \frac{G_{dez}}{H_{dez}} = 1, \quad (3.39)$$

так как в этом случае передаточная функция регулятора содержит нуль в знаменателе

$$W_{reg} = \frac{G_{reg}}{H_{reg}} = \frac{G_{dez} H_{obj}}{G_{obj}(H_{dez} - G_{dez})} = \frac{G_{dez}}{0} \quad (3.40)$$

и не реализуема.

Это означает, что невозможно реализовать систему, имеющий коэффициент 1, т. е. такую, которая будет мгновенно и абсолютно точно воспроизводить входной сигнал.

Одно из основных условий реализуемости объекта — требование, чтобы степень полинома числителя была не более степени полинома знаменателя.

Это связано с тем, что оператор Лапласа в числителе — это соответствующая операция дифференцирования, оператор Лапласа в знаменателе — операция умножения. Если в числителе операторов Лапласа больше, то объект обладает свойством чистого дифференцирования, что зачастую физически нереализуемо (кроме некоторых частных случаев). Если число операторов Лапласа больше в знаменателе, то объект обладает свойствами интегрирования, что как раз свойственно реальным физическим объектам.

Можно ввести понятие *порядок полинома* как функцию:

$$\text{grad}[Z(s)], \tag{3.41}$$

где $Z(s)$ — полином.

Функция $\text{grad}[Z(s)]$ даёт число, равное наибольшей степени полинома от s , например:

$$\left. \begin{aligned} \text{grad}(z_5s^5 + z_4s^4 + z_3s^3 + z_2s^2 + z_1s + 1) &= 5; \\ \text{grad}(z_4s^4 + z_1s + 1) &= 4. \end{aligned} \right\} \tag{3.42}$$

В литературе известны методы, основанные на таком подходе, который называется *методом порядкового отображения* [8]. Но они используются для других целей. В данной работе метод порядкового отображения применяется для автоматизированного задания желаемой передаточной функции.

Можно ввести обозначения порядков полиномов числителя и знаменателя, обозначив буквой N — порядок (наибольшую степень оператора Лапласа s) знаменателя, буквой M — порядок (наибольшую степень оператора Лапласа s) числителя. Нижний правый индекс соответствует той передаточной функции, к которой относится рассматриваемый порядок полинома.

Для передаточной функции объекта управления:

$$\left. \begin{aligned} N_{obj} &= \text{grad}(H_{obj}); \\ M_{obj} &= \text{grad}(G_{obj}). \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Для желаемой передаточной функции:

$$\left. \begin{aligned} N_{dez} &= \text{grad}(H_{dez}); \\ M_{dez} &= \text{grad}(G_{dez}). \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Для передаточной функции регулятора:

$$\left. \begin{aligned} N_{reg} &= \text{grad}(H_{reg}); \\ M_{reg} &= \text{grad}(G_{reg}). \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Простейшие математические операции с порядками полиномов:

– операция сложения:

$$\text{grad}(Q+Z) = \begin{cases} \text{grad}(Q) & \text{если } \text{grad}(Q) > \text{grad}(Z); \\ \text{grad}(Z) & \text{если } \text{grad}(Z) > \text{grad}(Q); \end{cases} \quad (3.46)$$

или с использованием понятия максимума:

$$\text{grad}(Q+Z) = \max[\text{grad}(Q), \text{grad}(Z)]; \quad (3.47)$$

– операция вычитания, если $\text{grad}(Q) \neq \text{grad}(Z)$, или если $\text{grad}(Q) = \text{grad}(Z)$

и коэффициенты при старших степенях оператора Лапласа $q_n \neq z_n$:

$$\text{grad}(Q-Z) = \begin{cases} \text{grad}(Q) & \text{если } \text{grad}(Q) > \text{grad}(Z); \\ \text{grad}(Z) & \text{если } \text{grad}(Z) > \text{grad}(Q); \end{cases} \quad (3.48)$$

– операция вычитания, если $\text{grad}(Q) = \text{grad}(Z)$ и коэффициенты при одинаковых старших степенях оператора Лапласа $q_n = z_n$:

$$\text{grad}(Q-Z) = \begin{cases} \text{grad}(Q) & \text{если } \text{grad}(Q) > \text{grad}(Z); \\ \text{grad}(Z) & \text{если } \text{grad}(Z) > \text{grad}(Q); \end{cases} \quad (3.49)$$

где приведённые условия проверяются, начиная со старшей степени полиномов;

– операция умножения:

$$\text{grad}(Q \cdot Z) = \text{grad}(Q) + \text{grad}(Z). \quad (3.50)$$

Операция деления не рассматривается, так как деление полиномов фактически соответствует понятию передаточной функции.

С учётом выражений (3.46), (3.48), (3.50) можно записать условия для выбора полиномов числителя и знаменателя желаемой передаточной функции.

Как было показано выше, числитель желаемой передаточной функции обычно представляет собой усилительное звено и выбирается равным 1, т. е. порядок полинома числителя равен 0.

Порядок полинома знаменателя определяется порядками входящих в него полиномов определяется следующими выкладками.

Условие, что порядок полинома числителя не меньше порядка полинома знаменателя:

$$\text{grad}(H_{reg}) \geq \text{grad}(G_{reg}). \quad (3.51)$$

С учётом (3.11) подставляются выражения для полиномов числителя и знаменателя регулятора:

$$\text{grad}[G_{obj}(H_{dez} - G_{dez})] \geq \text{grad}(G_{dez} H_{obj}). \quad (3.52)$$

С учётом формул для сложения и умножения полиномов (3.46), (3.48), (3.50) подставляются выражения для полиномов числителя и знаменателя регулятора:

$$\begin{aligned} \text{grad}(H_{reg}) &= \text{grad}[G_{obj}(H_{dez} - G_{dez})] = \text{grad}[G_{obj}H_{dez} - G_{obj}G_{dez}] = \\ &= \text{grad}(G_{obj}H_{dez}) = \text{grad}(G_{obj}) + \text{grad}(H_{dez}), \end{aligned} \quad (3.53)$$

где учтено, что порядок полинома числителя G_{dez} обязательно меньше порядка полинома знаменателя H_{dez} , и поэтому произведение полиномов $G_{obj}G_{dez}$ отбрасывается.

Из (3.53) получается степень полинома знаменателя желаемой передаточной функции:

$$\text{grad}(H_{reg}) = \text{grad}(G_{obj}) + \text{grad}(H_{dez}). \quad (3.54)$$

Числитель передаточной функции регулятора содержит числитель желаемой передаточной функции проектируемой САР:

$$\text{grad}(G_{reg}) = \text{grad}(G_{dez}H_{obj}) = \text{grad}(G_{dez}) + \text{grad}(H_{obj}). \quad (3.55)$$

Далее анализируется основное условие ():

$$\begin{aligned} \text{grad}(H_{reg}) &\geq \text{grad}(G_{reg}); \\ \text{grad}(G_{obj}) + \text{grad}(H_{dez}) &\geq \text{grad}(G_{dez}) + \text{grad}(H_{obj}), \end{aligned}$$

куда подставляются степени полиномов в соответствии с выше приведёнными обозначениями:

$$M_{obj} + N_{dez} \geq M_{dez} + N_{obj}. \quad (3.56)$$

Обычно сложности возникают с выбором порядка характеристического полинома (полинома знаменателя) желаемой передаточной функции, поэтому можно выразить его из (3.56):

$$N_{dez} \geq M_{dez} + N_{obj} - M_{obj}. \quad (3.57)$$

Имеется неравенство, содержащее 4 неизвестных величины. Чтобы неравенство выполнялось, необходимо задать какие-нибудь 3, а четвертую величину найти в соответствии с приведённым выражением.

Рассмотрим применение формулы (3.56) на примере построения системы регулирования скорости двигателя постоянного тока (ДПТ).

Передаточная функция ДПТ:

$$W_{obj} = \frac{G_{obj}}{H_{obj}} = \frac{k}{h_0 + h_1s + h_2s^2}, \quad (3.58)$$

откуда получаем: $M_{obj} = 0$, $N_{obj} = 2$.

Из общих соображений обычно для желаемой передаточной функции выбирается просто коэффициент усиления, т. е. $M_{dez} = 0$.

Тогда знаменатель желаемой передаточной функции должен иметь порядок:

$$N_{dez} \geq M_{dez} + N_{obj} - M_{obj} = 0 + 2 - 0 = 2. \quad (3.59)$$

Как правило, используют строгое неравенство, т. е.

$$N_{dez} > 2. \quad (3.60)$$

Нестрогое неравенство используют в исключительных случаях при невозможности использовать строгое.

На основе выражения (3.56) можно автоматизировать формирование желаемой передаточной функции, но возникают другие проблемы, связанные с выбором типовых динамических звеньев и их её параметров. Проблема их выбора пока остаётся не решённой.

3.3.7 Определение передаточной функции регулятора

Для автоматизированного синтеза передаточной функции регулятора разработаны и программно реализованы в среде MathCAD14 соответствующая процедура (Приложение А).

Процедура синтеза реализована на примере электропривода с двигателем постоянного тока при регулировании скорости.

В соответствии с методикой, рассмотренной выше, передаточная функция регулятора определяется после задания желаемой передаточной функции проектируемой системы при известной передаточной функции объекта управления:

$$\left. \begin{aligned} G_{reg} &= G_{dez} H_{obj}; \\ H_{reg} &= G_{obj} (H_{dez} - G_{dez}). \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

В данном модуле реализован синтез регулятора, а также выполняется анализ процесса относительно ошибки регулирования.

Ошибка регулирования напрямую влияет на величину напряжения питания, подаваемого на двигатель постоянного тока, что может приводить к насыщению прямой цепи и мешать реализации желаемого переходного процесса.

Это возможно, в частности, если выбрано слишком быстрое изменение переходного процесса для желаемой передаточной функции.

Использование разработанной программы демонстрирует возникающие ограничения и позволяет опытным путём ограничить задаваемое быстродействие, так как оно фактически не будет реализовано ввиду насыщения по напряжению питания.

На практике структура желаемой передаточной функции выбирается в соответствии с выше изложенным подходом на основе анализа порядка полиномов объекта управления. Затем выбирают минимальные значения постоянных времени, чтобы отсутствовало насыщение в прямой цепи.

3.3.8 Преобразование передаточной функции в уравнения состояния

Преобразование передаточной функции в форму переменных состояния выполняется автоматически (Приложение В).

Поскольку при прямом преобразовании Лапласа исходная система дифференциальных уравнений заменяется передаточной функцией, то обратный переход от передаточной функции к переменным состояния фактически означает обратное преобразование Лапласа. Но в ТАУ обратным преобразованием Лапласа принято называть поиск аналитического решения искомой переменной состояния $x(t)$. Поэтому рассматриваемая операция называется переходом от передаточных функций к переменным состояния.

Такой переход неоднозначен, т. е. можно получить различные варианты уравнений состояния, которые будут давать одну и ту же передаточную функцию. Наиболее общий подход к переходу от передаточных функций к переменным состояния состоит в следующем.

Пусть исходная передаточная функция имеет вид:

$$W(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{g_0 + g_1s + g_2s^2 + \dots + g_ms^m}{h_0 + h_1s + h_2s^2 + \dots + h_ns^n} = \frac{\sum_{j=0}^m g_j s^j}{\sum_{k=0}^n h_k s^k}. \quad (3.14)$$

Уравнения переменных состояния в общем виде:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \bar{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \bar{u}(t), \quad (3.15)$$

где $\mathbf{A} =$

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	\dots	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	\dots	$a_{2,n}$
\dots	\dots	\dots	\dots
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	\dots	$a_{n,n}$

 и $\mathbf{B} =$

$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	\dots	$b_{1,m}$
$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	\dots	$b_{2,m}$
\dots	\dots	\dots	\dots
$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	\dots	$b_{n,m}$

 — матрицы коэффициентов.

циентов.

После применения преобразования Лапласа к уравнению (3.15) можно получить матричную передаточную функцию в общем виде:

$$\mathbf{W}(s) = [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.16)$$

из которой затем получить частную передаточную функцию:

$$\tilde{W}_{k,j}(s) = \frac{x_k(s)}{u_j(s)} = \frac{\tilde{G}_{k,j}(s)}{\tilde{H}(s)} = \frac{\tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 s + \tilde{g}_2 s^2 + \dots + \tilde{g}_m s^m}{\tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 s + \tilde{h}_2 s^2 + \dots + \tilde{h}_n s^n} = \frac{\sum_{j=0}^m \tilde{g}_j s^j}{\sum_{k=0}^n \tilde{h}_k s^k}, \quad (3.17)$$

где знаком \sim (тильда) помечены коэффициенты, полученные из желаемой формы матричного представления переменных состояния.

Коэффициенты передаточной функции (3.17) зависят от элементов матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{g}_0 &= \tilde{g}_0(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}; b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{n,m}); \\ \tilde{g}_1 &= \tilde{g}_1(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}; b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{n,m}); \\ &\dots \\ \tilde{g}_m &= \tilde{g}_m(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}); \\ \tilde{h}_0 &= \tilde{h}_0(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}); \\ \tilde{h}_1 &= \tilde{h}_1(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}); \\ &\dots \\ \tilde{h}_n &= \tilde{h}_n(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}). \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Коэффициенты в (3.17) должны быть равны коэффициентам в (3.14):

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= \tilde{g}_0, \quad g_1 = \tilde{g}_1, \dots, \quad g_m = \tilde{g}_m; \\ h_0 &= \tilde{h}_0, \quad h_1 = \tilde{h}_1, \dots, \quad h_n = \tilde{h}_n, \end{aligned} \right\}$$

что может быть переписано с учётом (3.18):

$$\left. \begin{aligned}
 g_0 &= \tilde{g}_0(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}; b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{n,m}); \\
 g_1 &= \tilde{g}_1(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}; b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{n,m}); \\
 &\dots \\
 g_m &= \tilde{g}_m(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}; b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{n,m}); \\
 h_0 &= \tilde{h}_0(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}); \\
 h_1 &= \tilde{h}_1(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}); \\
 &\dots \\
 h_n &= \tilde{h}_n(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}).
 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Выражения (3.19) представляют собой систему алгебраических уравнений, которую можно разрешить относительно элементов искомым матриц: $(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n})$, $(b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{n,m})$. Вид уравнений (3.19) зависит от предварительного выбора желаемого вида матриц **A** и **B**, но должно быть выполнено условие, что общее число неизвестных элементов этих матриц должно быть равно $n + m$, чтобы система имела единственное решение, так как столько уравнений содержится в системе (3.19), а число искомым переменных должно быть равно числу уравнений. Общее число элементов этих двух матриц $n \cdot n + m \cdot n = (n + m) \cdot n$. Поэтому при выборе желаемого вида матриц **A** и **B** возможны различные варианты.

Очевидно, что можно произвольным образом задать вид матриц **A** и **B**, исходя из дополнительных удобств их последующего использования. Известно несколько вариантов, каждый из которых обладает своими достоинствами.

Нормальная форма матриц уравнений состояния. В заданной передаточной функции (3.14) имеется одна выходная величина x и одна входная величина u . Тогда можно выбрать следующий вид матриц для уравнений переменных состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \hline a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \dots & a_{n,n} \\ \hline \end{array}, \mathbf{B} = \begin{array}{|c|} \hline b_1 \\ \hline b_2 \\ \hline b_3 \\ \hline b_4 \\ \hline \dots \\ \hline b_n \\ \hline \end{array}, \quad (3.20)$$

что соответствует системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + b_1 u; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 + b_2 u; \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,n} x_n + b_n u; \\ y = x_1 + du, \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

где обозначено $x_1 = x$.

В операторной форме:

$$\left. \begin{array}{l} s x_1 = x_2 + b_1 u; \\ s x_2 = x_3 + b_2 u; \\ \dots \\ s x_n = a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,n} x_n + b_n u; \\ y = x_1 + du, \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

Матричная передаточная функция (3.16):

$$\mathbf{W}(s) = [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Из всех частных передаточных функций полученной матричной передаточной функции $\mathbf{W}(s)$ необходимо рассмотреть только одну:

$$\tilde{W}(s) = \frac{x_1(s)}{u(s)} = \mathbf{W}_{1,1}(s) = \frac{\tilde{G}_{1,1}(s)}{\tilde{H}(s)} = \frac{\tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 s + \tilde{g}_2 s^2 + \dots + \tilde{g}_m s^m}{\tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 s + \tilde{h}_2 s^2 + \dots + \tilde{h}_n s^n}, \quad (3.23)$$

так как заданная в (3.14) выходная переменная x соответствует: $x = x_1$.

В соответствии с алгоритмом нахождения обратной матрицы знаменатель (характеристический полином) рассчитывается как определитель результирующей матрицы $[s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]$, а потому одинаков для всех частных передаточных функций и в данном случае имеет вид:

$$\tilde{H}(s) = \det(s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}) = -a_{n,1} - a_{n,2}s - a_{n,3}s^2 - \dots + s^n, \quad (3.24)$$

т. е. выражается простым образом только через нижнюю строку матрицы \mathbf{A} (с отрицательными знаками), а его старший коэффициент равен 1.

Сравнение коэффициентов полиномов знаменателей (3.14) и (3.24) позволяет сделать вывод, что справедливы равенства:

$$a_{n,1} = -h_0, \quad a_{n,2} = -h_1, \quad \dots, \quad a_{n,n} = 1, \quad (3.25)$$

выражающие элементы матрицы \mathbf{A} через коэффициенты полинома заданной передаточной функции $W(s)$ в (3.14); остальные элементы матрицы \mathbf{A} (нулевые и единичные) соответствуют заданным в (3.20).

Для определения элементов матрицы \mathbf{B} необходимо выделить числитель полученной передаточной функции (3.25):

$$\tilde{G}(s) = \tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 s + \tilde{g}_2 s^2 + \dots + \tilde{g}_m s^m, \quad (3.26)$$

коэффициенты которого выражены через элементы матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} в соответствии с (3.19).

Для автоматического перехода от передаточной функции к переменным состояния разработан программный модуль.

3.3.9 Расчёт переходной характеристики

Переходная характеристика синтезированной системы рассчитывается в едином процессе синтеза регулятора (Приложение А).

Переходная характеристика может рассчитываться двумя способами: с использованием обратного преобразования Лапласа или методов численного интегрирования.

Для применения методов численного интегрирования используется математическая модель системы в виде системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, в том числе в матричной форме, полученной на предыдущем этапе.

Эти расчёты совмещены с процедурой синтеза регулятора.

При этом возникает дополнительная задача определить чувствительность спроектированной системы к вариациям параметров. Это могут быть параметры объекта управления или регулятора.

Проблема вариации параметров объекта управления связана с тем, что для расчётов обычно используются идеализированные параметры. Например, при синтезе системы регулирования скорости ДПТ использовались паспортные данные двигателя. Но параметры конкретного экземпляра двигателя могут несколько отличаться от усреднённых паспортных. Кроме того, в процессе работы эти параметры могут изменяться. Например, при нагреве обмотки двигателя её активное сопротивление будет увеличиваться. Важно знать, как скажется это и другие различия в параметрах на показатели качества регулирования.

Проблема вариации параметров регулятора связана с его реализацией. Если регулятор реализуется в виде электронной схемы, то она может содержать резисторы и конденсаторы. Реальные значения их сопротивлений и ёмкостей могут отличаться от номинальных на 5...20%. Очевидно, что это может привести к отклонению переходной характеристики спроектированной системы от желаемой.

3.3.10 Определение показателей качества регулирования

В процессе моделирования (т. е. получения переходной характеристики) системы возникает необходимость анализа показателей качества регулирования, чтобы убедиться, что они получились в соответствии с требованиями.

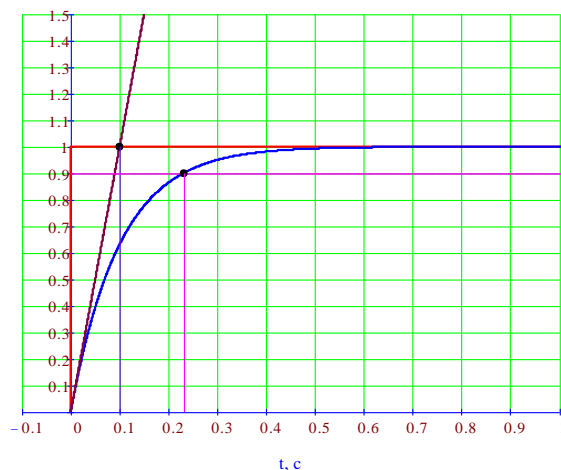
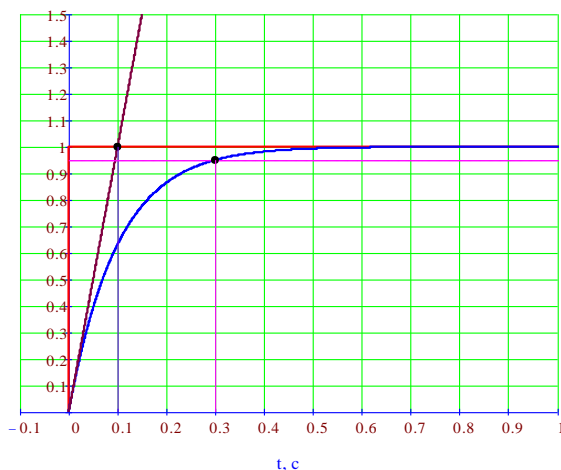
Как правило, проектировщики оценивают полученные результаты без использования автоматических процедур, вручную. Некоторые программы моделирования позволяют вручную отметить интересующий разработчика точку на графике и узнать её абсциссу и ординату. Но этого недостаточно.

В данной работе разработаны и программно реализованы алгоритмы автоматического анализа основных показателей качества регулирования путём визуализации соответствующих точек графика для апериодического процесса (Приложение Г) и для колебательного процесса (Приложение Д).

Детали алгоритмов приведены в указанных выше приложениях.

Разработанные программы позволяют менять параметры процесса и автоматически получать изменившиеся графики с новыми характерными точками.

Например, для апериодического процесса время регулирования определяется моментом достижения нижней границы установившегося режима. Она может быть различной, например, 0,95 от заданной величины (Рисунок 3.10, а) или 0,9 (Рисунок 3.10, б).



а) граница установившегося режима

б) граница установившегося режима

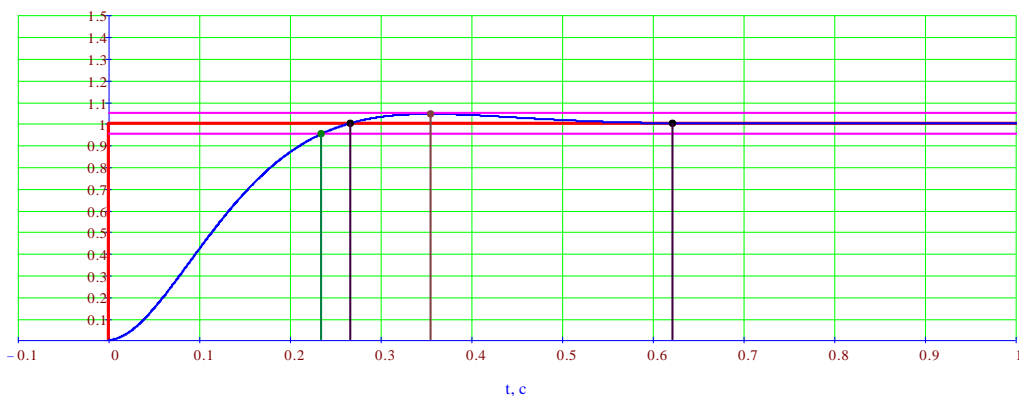
0,95 от заданного значения

0,90 от заданного значения

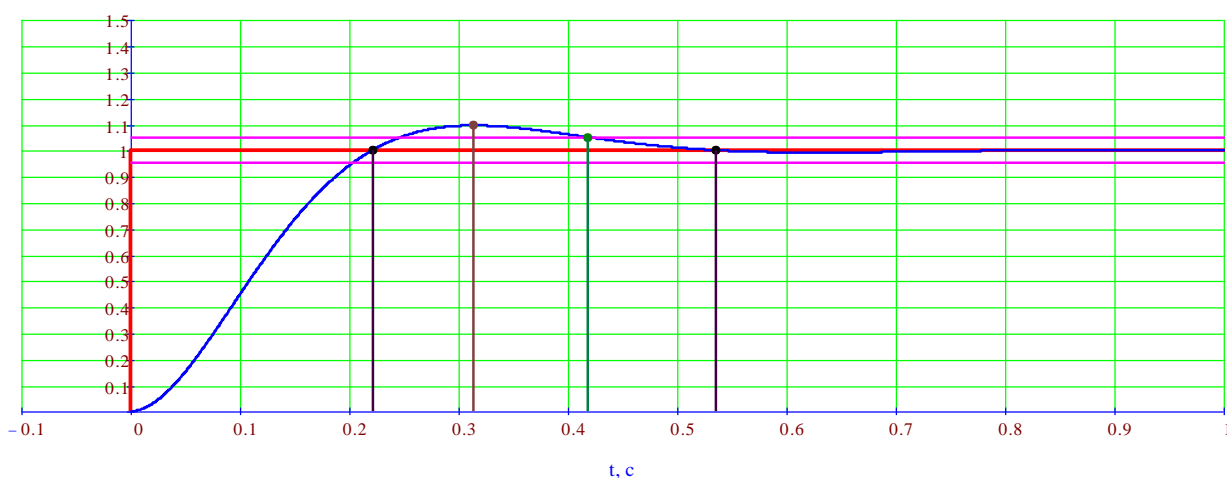
Рисунок 3.10 — Автоматический анализ аperiodического переходного процесса с разными границами установившегося режима

Для анализа колебательного процесса (Рисунок 3.11) необходимо распознавать большее число характерных точек, в частности, точки пересечения установившегося значения для определения периода колебаний, точки окончательного вхождения в зону, считающуюся зоной установившегося режима (и определение момента вхождения в эту зону — времени регулирования).

Можно менять колебательность процесса: например, коэффициент затухания 0,707 (Рисунок 3.11, а) и 0,6 (Рисунок 3.11, б).



а)



б)

Рисунок 3.11 — Автоматический анализ колебательного переходного процесса с разными границами установившегося режима

Видно, что точки автоматически определяются и визуализируются.

Выводы по разделу 3

В результате анализа обобщённого процесса проектирования систем автоматического регулирования выявлены основные этапы (операции) этого проектирования и выбраны соответствующие алгоритмы для автоматизации этих этапов. Из литературы взяты, переработаны и изложены теоретические основания рассмотренных методов и алгоритмов, некоторые из них доработаны.

С использованием программы MathCAD14 создан комплекс рабочих листов, которые реализуют рассмотренные теоретические положения и демонстрируют студентами реальную работу теоретических положений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе работы над магистерской диссертацией был подготовлен материал для наполнения двух учебных дисциплин по направлению подготовки бакалавриата 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»: «Теория управления» и «Автоматизированное проектирование встраиваемых систем».

Подобран теоретический материал, который представлен в виде текстовых файлов (MSWord) и соответствующих рабочих листов в программе MathCAD14.

Теоретический материал предназначен для самостоятельного изучения теории (получение знаний), а рабочие листы в программе MathCAD14 — для выполнения заданий в ходе практических занятий (развитие умений и навыков). Выбранный подход позволяет продемонстрировать студентам реальный результат применения теоретических знаний для выполнения автоматизированных операций проектирования динамических систем. При выполнении заданий студенты должны самостоятельно разработать программы для автоматизации соответствующих проектных операций.

Представленный материал использован для наполнения электронных курсов по соответствующим учебным дисциплинам по кафедре Вычислительной техники и будет использоваться в учебном процессе, начиная с 2018/2019 учебного года. Это позволит использовать курс также для очно-заочной формы обучения.

СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

ДПТ — двигатель постоянного тока

ИКИТ — Институт космических и информационных технологий

НУЛ — научно-учебная лаборатория

ПФ — передаточная функция

САПР — системы автоматизированного проектирования

САР — система автоматического регулирования

СФУ — Сибирский федеральный университет

ТУ — теория управления

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Собственная публикация:

1 Афонасенко (Храброва), Н. С. Автоматизированный анализ и синтез учебных планов вуза на основе массива дидактических единиц / С. А. Бронов, Е. А. Степанова, К. В. Калиновский, И. В. Соколов, Н. С. Афонасенко // Вестник КрасГАУ. – 2014. – Вып. 3. – С. 216–221.

Использованные источники:

2 Doyle, John Comstock. Feedback control theory / John Comstock Doyle, Bruce A. Francis, Allen R. Tannenbaum. – Mineola; New York : Dover Publication, Inc., 2015. – 214 p. – ISBN 978-0-486-46933-1.

3 Gottlieb, Irving M. Electric Motors & Control Techniques // Irving M. Gottlieb. – 2nd ed. – New York, San Francisco, Washington : TAB Books input of McGraw-Hill, 1994. – 294 p. – ISBN 0-07-024011-6.

4 Hughes, Austin. Electric Motors and Drives: Fundamentals, Types and Applications / Austin Hughes. – 3th edition. – London : Elsevier Inc., 2008. – 410 p. – ISBN 978-0-7506-4718-2.

5 Башарин, А. В. Управление электроприводами : учеб. пособие для вузов / А. В. Башарин, В. А. Новиков, Г. Г. Соколовский. – Ленинград : Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. – 392 с.

6 Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – 4-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : Профессия, 2007. – 752 с. – ISBN 5-93913-035-6.

7 Библиотека символьных программ : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010617930 / Ю. В. Игумнова, С. А. Бронов, П. В. Авласко, А. В. А. Поваляев ; правообладатель ФГОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» (RU). – № 2010616181; заявл. 07.10.2010; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 02.12.2010.

8 Васильев, В. И. Синтез многосвязных автоматических систем методом порядкового отображения / В. И. Васильев, Ф. А. Шаймарданов. – Москва : Наука, 1983. – 126 с.

9 Воронов, А. А. Введение в динамику сложных управляемых систем / А. А. Воронов. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 352 с.

10 Галкин, С. Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в MATLAB 6.0 : учеб. пособие / С. Г. Галкин. – СПб. : КОРОНА принт, 2001. – 320 с. – ISBN 5-7931-0158-6.

11 Егоров, А. И. Основы теории управления / А. И. Егоров. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 504 с. – ISBN 5-9221-0543-4.

12 Кузовков, Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства / Н. Т. Кузовков. – Москва : Машиностроение, 1976. – 184 с.

13 Макаров, И. М. Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал) / И. М. Макаров, Б. М. Менский. – 2-е изд. – Москва : Машиностроение, 1982. – 504 с.

14 Математические основы теории автоматического регулирования : В 2 т. Т. 1 / под ред. Б. К. Чемоданова. – Москва : Высшая школа, 1977. – 517 с.

15 Математические основы теории автоматического регулирования : В 2 т. Т. 2 / под ред. Б. К. Чемоданова. – Москва : Высшая школа, 1977. – 517 с.

16 Матричные методы расчета и проектирования сложных систем автоматического управления для инженеров / под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. – 664 с. – ISBN 5-7038-2771-X.

17 Мелса, Дж. Л. Программы в помощь изучающим теорию линейных систем управления : пер. с англ. / Дж. Л. Мелса, Ст. К. Джонс. – Москва : Машиностроение, 1981. – 200 с.

18 Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник в 5-и тт. / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – ISBN 5-7038-2194-0.

19 Микродвигатели для систем автоматики (технический справочник) / под ред. Э. А. Лодочникова, Ф. М. Юферова. – Москва : Энергия, 1969. – 272 с.

20 Мэзон, С. Электрические цепи, сигналы и системы : пер. с англ. / С. Мэзон, Г. Циммерман. – Москва : Изд-во иностр. лит-ры, 1963. – 619 с.

21 Норенков, И. П. Основы автоматизированного проектирования : учебник для вузов / И. П. Норенков. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 448 с. – ISBN 5-7038-2892-9.

22 Петров, Б. Н. О построении и преобразовании структурных схем / Б. Н. Петров // Избранные труды. Том 1. Теория автоматического управления. – Москва : Наука, 1983. — С. 16–34.

23 Петров, Ю. П. Новые главы теории управления и компьютерных вычислений / Ю. П. Петров. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2012. – 192 с. – ISBN 978-5-94157-452-0.

24 Программа численного интегрирования методом Рунге-Кутты-Фельберга 4-5-го порядка : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012610160 / С. А. Бронов, Р. А. Ермаков, П. В. Авласко, В. А. Поваляев, А. В. Марарескул ; правообладатель ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» (RU). – № 2011618237; заявл. 03.11.2011; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 10.01.2012.

25 Программный комплекс для исследования динамики и проектирования технических систем / О. С. Козлов, канд. техн. наук, доц., Д. Е. Кондаков, Л. М. Скворцов, канд. техн. наук, К. А. Тимофеев, В. В. Ходаковский, канд. техн. наук; Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана // Информационные технологии. – 2005. – № 9.

26 Проектирование следящих систем с помощью ЭВМ / под ред. В. С. Медведева. – Москва : Машиностроение, 1979. – 367 с.

27 Расчет матриц перехода от передаточной функции к переменным состояниям / С. А. Бронов, Д. Д. Мищенко ; правообладатель ФБГОУ ВПО

«Красноярский государственный аграрный университет" (RU). – № 2014612888; заявл. 05.11.2013; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20.04.2014.

28 Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1987. – 712 с.

29 Теория управления. Терминология. Вып. 107. – Москва : Наука, 1988. – 56 с.

30 Очков, В. Ф. MathCAD 14 для инженеров и конструкторов / В. Ф. Очков. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2007. – 368 с. – ISBN 978-5-9775-0129-3.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

**Модуль автоматизированного синтеза регулятора
по желаемой передаточной функции в MathCAD14**

ORIGIN:= 1

Автоматизированный синтез регулятора замкнутой системы автоматического управления на примере электропривода постоянного тока

Цель и задачи работы

Цель работы: Изучение метода синтеза систем автоматического регулирования с использованием желаемой передаточной функции.

Задачи работы:

- 1 Получить знание о методе синтеза систем автоматического регулирования, синтезированных с использованием желаемой передаточной функции.
- 2 Освоить умение выполнять синтез систем автоматического регулирования с использованием желаемой передаточной функции на примере системы регулирования скорости двигателя постоянного тока.
- 3 Сформировать навыки использования программы MathCAD для синтеза систем автоматического регулирования с использованием желаемой передаточной функции на примере системы регулирования скорости двигателя постоянного тока.

Порядок выполнения работы:

- 1 В соответствии с образцом дописать все недостающие фрагменты программы.
- 2 Изучить логику построения и работу программы и проанализировать получаемые результаты при вариациях параметров желаемой передаточной функции.

1 Теоретические сведения

При синтезе системы автоматического регулирования (САР) с использованием желаемой передаточной функции определяется передаточная функция регулятора.

Эта передаточная функция представляется в виде отношения двух полиномов -- полинома числителя и полинома знаменателя. Т.е. результатом синтеза регулятора является его математическая модель в виде полиномов числителя и знаменателя передаточной функции.

Процедура синтеза регулятора на основе желаемой передаточной функции замкнутой системы:

- 1) математическая модель системы задаётся математическими моделями объекта управления (двигателя постоянного тока), регулятора в прямой цепи и желаемой системы автоматического управления -- все модели задаются своими передаточными функциями в виде отношения полиномов числителя и знаменателя;
 - 2) по известной формуле записывается передаточная функция замкнутой системы с использованием передаточных функций объекта управления (двигателя постоянного тока) и регулятора -- получается отношение полинома числителя и полинома знаменателя (эти полиномы выражены через комбинацию полиномов числителя и знаменателя объекта управления и регулятора);
 - 3) задают желаемую передаточную функцию замкнутой системы в виде отношения полиномов числителя и знаменателя;
 - 4) приравнивают попарно выражения для полиномов числителя и для полиномов знаменателя желаемой и спроектированной передаточных функций, получая систему алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются полиномы числителя и знаменателя передаточной функции регулятора;
 - 5) решают полученную систему уравнений и находят выражения полиномов числителя и знаменателя передаточной функции регулятора как комбинацию полиномов числителей и знаменателей передаточных функций объекта управления и желаемой системы.
- Записывают выражение для передаточной функции замкнутой системы с использованием заданной передаточной функции объекта управления (двигателя постоянного тока) и синтезированной передаточной функции регулятора.
- Задают единичное ступенчатое воздействие и находят его изображение по Лапласу.
- Преобразуют передаточную функцию в систему уравнений переменных состояния и рассчитывают переходные процессы при произвольном входном воздействии.
- Находят передаточную функцию для напряжения питания. Преобразуются её в систему уравнений переменных состояния, рассчитывают переходный процесс для напряжения.
- Задача: оценить возможность выбора желаемой передаточной функции системы с учётом насыщения источника напряжения питания.

2 Общие выражения для синтеза системы автоматического регулирования по желаемой передаточной функции

- | | |
|--|--|
| 2.1 Передаточная функция объекта управления в общем виде: | $W_{obj} := \frac{G_{obj}}{H_{obj}}$ |
| 2.2 Передаточная функция последовательного регулятора в общем виде: | $W_{reg} := \frac{G_{reg}}{H_{reg}}$ |
| 2.3 Передаточная функция спроектированной САР в общем виде: | $\Phi := \frac{W_{reg} \cdot W_{obj}}{1 + W_{reg} \cdot W_{obj}} \text{ expand} \rightarrow \frac{G_{obj} \cdot G_{reg}}{G_{obj} \cdot G_{reg} + H_{obj} \cdot H_{reg}}$ |
| 2.4 Передаточная функция желаемой САР в общем виде: | $\Phi_{dez} := \frac{G_{dez}}{H_{dez}} \qquad \Phi = \Phi_{dez}$ |
| 2.5 Числитель передаточной функции желаемой САР в общем виде: | $G_d := \text{numer}(\Phi) \rightarrow G_{obj} \cdot G_{reg}$ |
| 2.6 Знаменатель передаточной функции желаемой САР в общем виде: | $H_d := \text{denom}(\Phi) \rightarrow G_{obj} \cdot G_{reg} + H_{obj} \cdot H_{reg}$ |
| 2.7 Числитель и знаменатель синтезированного регулятора в общем виде | |
| 2.7.1 Задание системы уравнений для нахождения G_{reg} и H_{reg} : | $Q := \begin{pmatrix} G_{dez} = G_d \\ H_{dez} = H_d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} G_{dez} = G_{obj} \cdot G_{reg} \\ H_{dez} = G_{obj} \cdot G_{reg} + H_{obj} \cdot H_{reg} \end{pmatrix}$ |
| 2.7.2 Решение системы уравнений относительно G_{reg} и H_{reg} : | $(G_r \ H_r) := Q \text{ solve}, G_{reg}, H_{reg} \rightarrow \left(\frac{G_{dez}}{G_{obj}} \quad -\frac{G_{dez} - H_{dez}}{H_{obj}} \right)$ |
| 2.8 Подстановка найденных числителя и знаменателя в передаточную функцию регулятора: | $W_r := \frac{G_r}{H_r} \text{ simplify} \rightarrow -\frac{G_{dez} \cdot H_{obj}}{G_{obj} \cdot (G_{dez} - H_{dez})}$ |
| 2.9 Числитель передаточной функции регулятора после преобразования: | $G_r := \text{numer}(W_r) \rightarrow -G_{dez} \cdot H_{obj}$ |
| 2.10 Знаменатель передаточной функции регулятора после преобразования: | $H_r := \text{denom}(W_r) \rightarrow G_{obj} \cdot (G_{dez} - H_{dez})$ |

3 Пример синтеза системы автоматического регулирования по желаемой передаточной функции в общем виде

3.1 Передаточная функция объекта управления

$$W_{obj1} = \frac{G_{obj1}}{H_{obj1}}$$

3.1.1 Числитель передаточной функции объекта управления:

$$G_{obj1} := k$$

3.1.2 Знаменатель передаточной функции объекта управления:

$$H_{obj1} := h_2 \cdot s^2 + h_1 \cdot s + h_0$$

$$W_{obj1} := \frac{G_{obj1}}{H_{obj1}} \rightarrow \frac{k}{h_2 \cdot s^2 + h_1 \cdot s + h_0}$$

3.2 Желаемая передаточная функция системы автоматического регулирования

3.2.1 Числитель желаемой передаточной функции САР:

$$G_{dez1} := 1$$

3.2.2 Знаменатель желаемой передаточной функции САР:

$$H_{dez1} := h_{d4} \cdot s^3 + h_{d3} \cdot s^2 + h_{d2} \cdot s + h_{d1}$$

$$\Phi_{dez1} := \frac{G_{dez1}}{H_{dez1}} \rightarrow \frac{1}{h_{d4} \cdot s^3 + h_{d3} \cdot s^2 + h_{d2} \cdot s + h_{d1}}$$

3.3 Передаточная функция регулятора

3.3.1 Числитель передаточной функции регулятора:

$$G_{reg1} := G_r \begin{cases} \text{substitute, } G_{obj} = G_{obj1} \\ \text{substitute, } H_{obj} = H_{obj1} \rightarrow -h_2 \cdot s^2 - h_1 \cdot s - h_0 \\ \text{substitute, } G_{dez} = G_{dez1} \\ \text{substitute, } H_{dez} = H_{dez1} \end{cases}$$

3.3.2 Знаменатель передаточной функции регулятора:

$$H_{reg1} := H_r \begin{cases} \text{substitute, } G_{obj} = G_{obj1} \\ \text{substitute, } H_{obj} = H_{obj1} \rightarrow k - k \cdot h_{d3} \cdot s^2 - k \cdot h_{d2} \cdot s - k \cdot h_{d4} \cdot s^3 - k \cdot h_{d1} \\ \text{substitute, } G_{dez} = G_{dez1} \\ \text{substitute, } H_{dez} = H_{dez1} \end{cases}$$

3.1 Передаточная функция спроектированной системы:

$$\Phi_1 := \Phi \begin{cases} \text{substitute, } G_{obj} = G_{obj1} \\ \text{substitute, } H_{obj} = H_{obj1} \rightarrow \frac{1}{h_{d4} \cdot s^3 + h_{d3} \cdot s^2 + h_{d2} \cdot s + h_{d1}} \\ \text{substitute, } G_{reg} = G_{reg1} \\ \text{substitute, } H_{reg} = H_{reg1} \end{cases}$$

4 Параметры объекта управления - двигателя постоянного тока

4.1 Номинальное питающее напряжение якоря, В:

$$U_{\text{nom}} := 29$$

4.2 Номинальный ток обмотки якоря, А:

$$I_{\text{nom}} := 0.075$$

4.3 Номинальная угловая скорость, рад/с:

$$\omega_{\text{r.nom}} := 942$$

4.4 Номинальный момент двигателя, Н.м:

$$M_{\text{nom}} := 0.0005$$

4.5 Сопротивление обмотки якоря, Ом:

$$r_{\text{a.nom}} := 81$$

$$r_{\text{a}} := 81$$

4.6 Индуктивность обмотки якоря, Гн:

$$L_{\text{a.nom}} := 0.045$$

$$L_{\text{a}} := 0.045$$

4.7 Момент инерции, кг.м.:

$$J_{\text{a}} := 0.0037 \cdot 10^{-5}$$

4.8 Конструкционные постоянные двигателя:

$$c_{\text{e}} := \frac{U_{\text{nom}} - r_{\text{a}} \cdot I_{\text{nom}}}{\omega_{\text{r.nom}}}$$

$$c_{\text{e}} = 0.024$$

$$c_{\text{M}} := \frac{M_{\text{nom}}}{I_{\text{nom}}}$$

$$c_{\text{M}} = 6.667 \times 10^{-3}$$

5 Передаточная функция объекта управления - двигателя постоянного тока при регулировании скорости

5.1 Передаточная функция двигателя:

$$W_{\text{obj}} = \frac{\omega_r}{U_a} \quad W_{\text{obj1}} := \frac{K_d}{h_2 \cdot s^2 + h_1 \cdot s + h_0}$$

5.2 Параметры передаточной функции:

$$h_2 := L_a \cdot J_a \quad h_1 := r_a \cdot J_a \quad h_0 := c_M \cdot c_e \quad K_d := c_M$$

5.3 Воспроизведение передаточной функции:

$$g_{\text{obj1}} := \text{numer}(W_{\text{obj1}}) \rightarrow K_d$$

$$g_{\text{obj1}} := g_{\text{obj1}} \text{ float, 4} \rightarrow 0.006667$$

5.4 Подстановка параметров передаточной функции:

$$h_{\text{obj1}} := \text{denom}(W_{\text{obj1}}) \rightarrow h_2 \cdot s^2 + h_1 \cdot s + h_0$$

$$h_{\text{obj1}} := h_{\text{obj1}} \text{ float, 4} \rightarrow 0.000002997 \cdot s + 1.665e-9 \cdot s^2 + 0.0001622$$

5.5 Корни знаменателя:

$$V_d := h_{\text{obj1}} \text{ coeffs, s} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.0001622 \\ 0.000002997 \\ 1.665e-9 \end{pmatrix}$$

5.6 Параметры типовых динамических звеньев знаменателя:

$$\text{TypZvenDPT} := \text{PolTyp}(V_d) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.744 \times 10^3 & 55.854 \\ 5.733 \times 10^{-4} & 0.018 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.7 Передаточная функция двигателя через типовые динамические звенья:

$$W_{\text{тип}} := W_{\text{TypZven}}(\text{TypZvenDPT}, s) \text{ float, 4} \rightarrow 97417.0 \cdot (0.0179 \cdot s + 1.0) \cdot (0.0005733 \cdot s + 1.0)$$

6 Желаемая передаточная функция

6.1 Представление желаемой передаточной функции через типовые динамические звенья

6.1.1 Числитель желаемой передаточной функции:

$$G_{\text{dez1}} := 1 \quad k := K_d$$

6.1.2 Знаменатель желаемой передаточной функции:

$$H_{\text{dez1}} := (T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi_2 \cdot T_2 \cdot s + 1)$$

6.2 Параметры желаемой передаточной функции:

$$T_1 := 0.00005 \quad T_2 := 0.00005 \quad \xi_2 := 0.85$$

6.3 Знаменатель желаемой передаточной функции (раскрытие):

$$h_{\text{dez1}} := H_{\text{dez1}} \text{ expand} \rightarrow T_1 \cdot T_2^2 \cdot s^3 + T_2^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T_1 \cdot \xi_2 \cdot T_2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi_2 \cdot T_2 \cdot s + T_1 \cdot s + 1$$

6.4 Знаменатель желаемой передаточной функции (подстановка значений):

$$h_{\text{dez1}} := h_{\text{dez1}} \text{ float, 4} \rightarrow 0.000135 \cdot s + 6.75e-9 \cdot s^2 + 1.25e-13 \cdot s^3 + 1.0$$

6.5 Выделение коэффициентов полинома знаменателя желаемой передаточной функции:

$$k_{h,\text{dez}} := h_{\text{dez1}} \text{ coeffs} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.000135 \\ 6.75e-9 \\ 1.25e-13 \end{pmatrix}$$

6.6 Подстановка числовых значений для коэффициентов полинома знаменателя желаемой передаточной функции:

$$h_d := k_{h,\text{dez}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.35 \times 10^{-4} \\ 6.75 \times 10^{-9} \\ 1.25 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

7 Передаточная функция регулятора

7.1 Числитель передаточной функции регулятора

7.1.1 Числитель передаточной функции регулятора (воспроизведение для последующей подстановки параметров):

$$g_{\text{reg1}} := G_{\text{reg1}} \rightarrow -h_2 \cdot s^2 - h_1 \cdot s - h_0$$

7.1.2 Числитель передаточной функции регулятора (выполняется подстановка параметров):

$$g_{\text{reg1}} := g_{\text{reg1}} \text{ float,4} \rightarrow -0.000002997 \cdot s + -1.665\text{e-}9 \cdot s^2 - 0.0001622$$

7.2 Знаменатель передаточной функции регулятора

7.2.1 Знаменатель передаточной функции регулятора (воспроизведение для последующей подстановки параметров):

$$h_{\text{reg1}} := H_{\text{reg1}} \rightarrow k - k \cdot h_{d3} \cdot s^2 - k \cdot h_{d2} \cdot s - k \cdot h_{d4} \cdot s^3 - k \cdot h_{d1}$$

7.2.2 Знаменатель передаточной функции регулятора (выполняется подстановка параметров):

$$h_{\text{reg1}} := h_{\text{reg1}} \text{ float,4} \rightarrow -9.0\text{e-}7 \cdot s + -4.5\text{e-}11 \cdot s^2 + -8.333\text{e-}16 \cdot s^3$$

7.3 Передаточная функция регулятора

7.3.1 Передаточная функция регулятора (в общем виде):

$$W_{\text{reg1}} = \frac{G_{\text{reg1}}}{H_{\text{reg1}}} \rightarrow W_{\text{reg1}} = \frac{h_2 \cdot s^2 + h_1 \cdot s + h_0}{k \cdot h_{d4} \cdot s^3 + k \cdot h_{d3} \cdot s^2 + k \cdot h_{d2} \cdot s - k + k \cdot h_{d1}}$$

7.3.2 Передаточная функция регулятора (с числовыми значениями параметров):

$$W_{\text{reg1}} := \frac{g_{\text{reg1}}}{h_{\text{reg1}}} \rightarrow \frac{-0.000002997 \cdot s + -1.665\text{e-}9 \cdot s^2 - 0.0001622}{-9.0\text{e-}7 \cdot s + -4.5\text{e-}11 \cdot s^2 + -8.333\text{e-}16 \cdot s^3}$$

8 Передаточная функция спроектированной системы

8.1 Передаточная функция спроектированной САР с подстановкой числовых значений:

$$\Phi_1 := \Phi \left[\begin{array}{l} \text{substitute, } G_{\text{obj}} = g_{\text{obj1}} \\ \text{substitute, } H_{\text{obj}} = h_{\text{obj1}} \\ \text{substitute, } G_{\text{reg}} = g_{\text{reg1}} \\ \text{substitute, } H_{\text{reg}} = h_{\text{reg1}} \\ \text{collect, } s \\ \text{float, } 4 \end{array} \right] \rightarrow \frac{6.667e16}{9.0e12 \cdot s + 4.5e8 \cdot s^2 + 8333.0 \cdot s^3 + 6.667e16}$$

8.2 Выделение числителя передаточной функции спроектированной САР:

$$g_1 := \text{numer}(\Phi_1) \rightarrow 6.667e16$$

8.3 Выделение знаменателя передаточной функции спроектированной САР:

$$h_1 := \text{denom}(\Phi_1) \rightarrow 9.0e12 \cdot s + 4.5e8 \cdot s^2 + 8333.0 \cdot s^3 + 6.667e16$$

8.10 Представление передаточной функции для последующего построения переходного процесса:

$$W_{\text{sys}}^{(1)} := g_1 \text{ coeffs, } s \rightarrow 6.667e16 \qquad W_{\text{sys}}^{(2)} := h_1 \text{ coeffs, } s \rightarrow \begin{pmatrix} 6.667e16 \\ 9.0e12 \\ 4.5e8 \\ 8333.0 \end{pmatrix}$$

$$W_{\text{sys}} = \begin{pmatrix} 6.667 \times 10^{16} & 6.667 \times 10^{16} \\ 0 & 9 \times 10^{12} \\ 0 & 4.5 \times 10^8 \\ 0 & 8.333 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

9 Передачная функция ошибки

9.1 Передачная функция ошибки регулирования спроектированной САР:

$$\Phi_u := \frac{W_{reg}}{1 + W_{reg} \cdot W_{obj}} \text{ simplify } \rightarrow \frac{G_{reg} \cdot H_{obj}}{G_{obj} \cdot G_{reg} + H_{obj} \cdot H_{reg}}$$

9.2 Подстановка числовых значений в передачную функцию ошибки регулирования спроектированной САР:

$$\Phi_u := \Phi_u \begin{cases} \text{substitute, } H_{obj} = h_{obj1} \\ \text{substitute, } G_{obj} = g_{obj1} \\ \text{substitute, } H_{reg} = h_{reg1} \\ \text{substitute, } G_{reg} = g_{reg1} \end{cases} \rightarrow \frac{1.665e10 \cdot s^2 + 2.997e13 \cdot s + 1.622e15}{8333.0 \cdot s^3 + 4.5e8 \cdot s^2 + 9.0e12 \cdot s + 6.667e16}$$

9.3 Знаменатель передачной функции ошибки регулирования спроектированной САР:

$$h_u := \text{denom}(\Phi_u) \rightarrow 8333.0 \cdot s^3 + 4.5e8 \cdot s^2 + 9.0e12 \cdot s + 6.667e16$$

Коэффициенты полинома:

$$W_{ux}^{(2)} := h_u \text{ coeffs, } s \rightarrow \begin{pmatrix} 6.667e16 \\ 9.0e12 \\ 4.5e8 \\ 8333.0 \end{pmatrix}$$

9.4 Числитель передачной функции ошибки регулирования спроектированной САР:

$$g_{ux} := \text{numer}(\Phi_u) \text{ float, } 4 \rightarrow 2.997e13 \cdot s + 1.665e10 \cdot s^2 + 1.622e15$$

Коэффициенты полинома:

$$W_{ux}^{(1)} := g_{ux} \text{ coeffs, } s \rightarrow \begin{pmatrix} 1.622e15 \\ 2.997e13 \\ 1.665e10 \end{pmatrix}$$

9.7 Передачная функция ошибки регулирования спроектированной САР:

$$W_{ux} = \begin{pmatrix} 1.622 \times 10^{15} & 6.667 \times 10^{16} \\ 2.997 \times 10^{13} & 9 \times 10^{12} \\ 1.665 \times 10^{10} & 4.5 \times 10^8 \\ 0 & 8.333 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

10 Переходные процессы

10.1 Модели спроектированной системы и ошибки для расчётов

10.1.1 Матрицы системы переменных состояния спроектированной системы:

$$ABCD_{sys} := \text{MatrABCD}(W_{sys})$$

$$A_{sys} := ABCD_{sys1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8.001 \times 10^{12} & -1.08 \times 10^9 & -5.4 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$B_{sys} := ABCD_{sys2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.001 \times 10^{12} \end{pmatrix}$$

10.1.3 Внешнее воздействие:

$$u(t) := 1$$

10.1.4 Модель спроектированной САР (выходная величина - скорость):

$$F_{sys}(t,x) := \begin{cases} U \leftarrow u(t) \\ dx \leftarrow A_{sys} \cdot x + B_{sys} \cdot U \\ z \leftarrow \text{stack}(dx, U) \end{cases}$$

10.1.2 Матрицы системы переменных состояния ошибки спроектированной системы:

$$ABCD_{error} := \text{MatrABCD}(W_{ux})$$

$$A_{error} := ABCD_{error1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8.001 \times 10^{12} & -1.08 \times 10^9 & -5.4 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$B_{error} := ABCD_{error2} = \begin{pmatrix} 1.998 \times 10^6 \\ -1.043 \times 10^{11} \\ 3.475 \times 10^{15} \end{pmatrix}$$

10.1.5 Модель ошибки спроектированной САР (выходная величина - ошибка регулирования):

$$F_{error}(t,x) := \begin{cases} U \leftarrow u(t) \\ dx \leftarrow A_{error} \cdot x + B_{error} \cdot U \\ z \leftarrow \text{stack}(dx, U) \end{cases}$$

10.2 Расчёт моделей (численное интегрирование)

10.2.1 Начало интегрирования:

$$t_{\text{start}} := 0$$

10.2.2 Окончание интегрирования:

$$t_{\text{stop}} := 0.001$$

10.2.3 Число точек вывода:

$$n_{\text{point}} := 4000$$

10.2.4 Расчёты модели спроектированной системы:

$$t_{\text{step}} := \frac{t_{\text{stop}} - t_{\text{start}}}{n_{\text{point}}} \cdot 0.5 = 1.25 \times 10^{-7}$$

10.2.5 Спроектированная система:

10.2.6 Ошибка спроектированной системы:

10.2.5.1 Число уравнений:

$$\text{neqn1} := \text{rows}(A_{\text{sys}}) = 3$$

$$\text{neqn2} := \text{rows}(A_{\text{error}}) = 3$$

10.2.5.1 Задание нулевых начальных условий:

$$x1_{\text{neqn1}} := 0$$

$$x2_{\text{neqn2}} := 0$$

10.2.5.2 Численное интегрирование:

$$X1 := \text{RK45fix}(x1, t_{\text{start}}, t_{\text{stop}}, n_{\text{point}}, F_{\text{sys}}, t_{\text{step}}, \text{neqn1})$$

$$X2 := \text{RK45fix}(x2, t_{\text{start}}, t_{\text{stop}}, n_{\text{point}}, F_{\text{error}}, t_{\text{step}}, \text{neqn2})$$

11 Построение графика переходной характеристики

11.1 Время, с: $t := X1^{(1)}$

11.2 Задание по скорости, рад/с: $U := X1^{(5)}$

11.3 Скорость, рад/с: $z1 := X1^{(2)}$

11.4 Ошибка по скорости, рад/с: $z2 := X2^{(2)}$

11.5 Левая граница шкалы графика: $t_{\text{Start}} := 0$

11.6 Правая граница шкалы графика: $t_{\text{Stop}} := 0.0005$

11.7 Переменная цикла для вывода графиков: $j := 1 .. n_{\text{point}}$

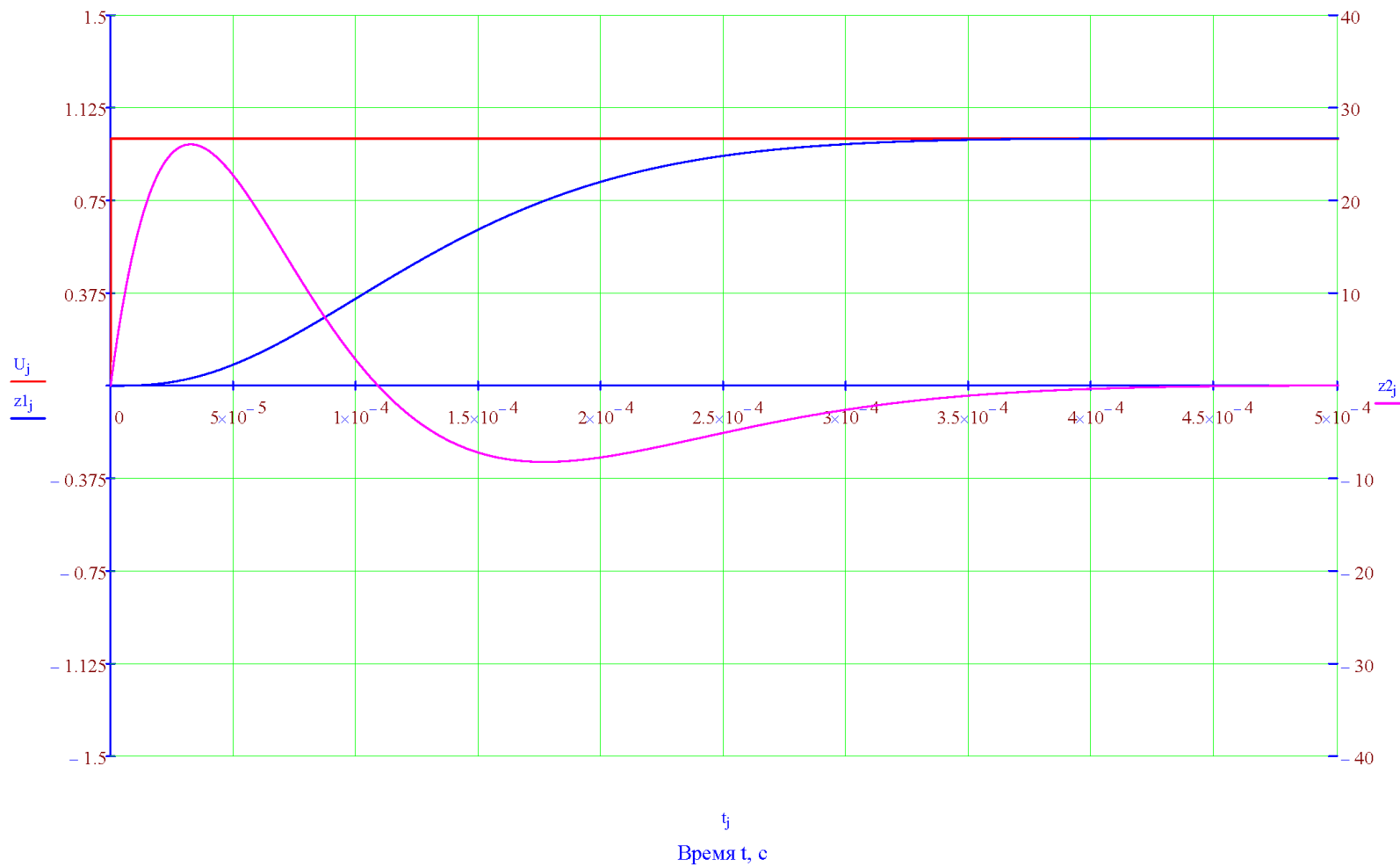


Рисунок 1 - Переходные характеристики заданной скорости, реальной скорости и ошибки по скорости

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Модули формирования математической модели системы в MathCAD14

ORIGIN := 1

Математическая модель системы с заданными структурой и передаточными функциями блоков

1 Теоретическая часть 1.1 Структурная схема системы

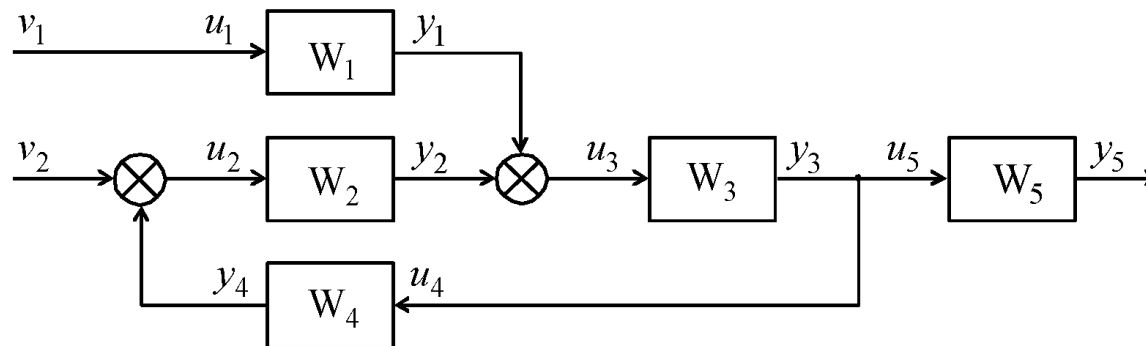


Рисунок 1 - Структурная схема системы с двумя входами и одним выходом

Система содержит 5 блоков (W_1, W_2, W_3, W_4, W_5), сложным образом связанных друг с другом, а также два сумматора. На два входа системы поступают внешние входные сигналы v_1, v_2 . Выход блока W_5 является выходом в всей системе. Требуется определить зависимость выходного сигнала от внешних (входных) сигналов системы

$$y_5 = W(s) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

где W - передаточная функция всей системы, которая должна быть выражена через передаточные функции отдельных блоков.

1.2 Математическая модель системы в общем виде

1.1 Матричное уравнение передаточных функций:	$y = S_{yu} \cdot u$
1.2 Матричное уравнение внутренних связей:	$u = S_{uy} \cdot y$
1.3 Матричное уравнение внешних подключений:	$u = S_{uv} \cdot v$
1.4 Искомый вид решения:	$y = W \cdot v$
1.5 Последовательные преобразования для решения уравнений:	
1.5.1 Исходное выражение:	$y = S_{yu} \cdot u$
1.5.2 Подстановка выражений для входных сигналов (сумма):	$y = S_{yu} (S_{uy} \cdot y + S_{uv} \cdot v)$
1.5.3 Раскрытие скобок:	$y = S_{yu} \cdot S_{uy} \cdot y + S_{yu} \cdot S_{uv} \cdot v$
1.5.4 Перенос в левую часть уравнения:	$y - S_{yu} \cdot S_{uy} \cdot y = S_{yu} \cdot S_{uv} \cdot v$
1.5.5 Вынос за скобки:	$(E - S_{yu} \cdot S_{uy}) \cdot y = S_{yu} \cdot S_{uv} \cdot v$
1.5.6 Решение уравнения:	$y = (E - S_{yu} \cdot S_{uy})^{-1} \cdot S_{yu} \cdot S_{uv} \cdot v$
1.6 Искомая передаточная функция системы:	$W = (E - S_{yu} \cdot S_{uy})^{-1} \cdot S_{yu} \cdot S_{uv}$

2 Формирование векторов и матриц в соответствии с заданной структурной схемой

2.1 Вектор входных переменных блоков:

$$u := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

2.2 Вектор выходных переменных блоков:

$$y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

2.3 Вектор внешних переменных:

$$v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

2.4 Матрица передаточных функций:

$$S_{yu} := \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_5 \end{pmatrix}$$

2.5 Матрица внутренних связей:

$$S_{uy} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.6 Матрица внешних подключений:

$$S_{uv} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Нахождение передаточных функций системы

3.1 Размерность системы:

$$N := \text{rows}(u) \rightarrow 5$$

3.2 Единичная матрица (с использованием встроенной функции `identity`):

$$E := \text{identity}(N) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Матричная передаточная функция системы:

$$W := (E - S_{yu} \cdot S_{uy})^{-1} \cdot S_{yu} \cdot S_{uv} \rightarrow \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ \frac{W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \end{pmatrix}$$

3.4 Операторное матричное выражение для системы:

$$y = W \cdot v \text{ explicit, } y, W, v \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{W_1}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{0}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

3.5 Выбор частной передаточной функции $W_{k,j}$ из матричной передаточной функции W :

вход: $j := 1$ (задан j от 1 до 2) выход: $k := 5$ (задан k от 1 до 5)

$$\frac{y_k}{v_j} = W_{k,j} \rightarrow \frac{y_5}{v_1} = \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1}$$

4 Подстановка полиномов передаточных функций

4.1 Полиномы передаточных функций

$$W_1 := \frac{G_1}{H_1} \quad W_2 := \frac{G_2}{H_2} \quad W_3 := \frac{G_3}{H_3} \quad W_4 := \frac{G_4}{H_4} \quad W_5 := \frac{G_5}{H_5}$$

4.2 Воспроизведение матричной передаточной функции для подстановки полиномов:

$$W := W \rightarrow \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ \frac{W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \end{pmatrix}$$

4.3 Матричная передаточная функция системы после подстановки полиномов:

$$W_x := W \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{G_1}{H_1} & 0 \\ \frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4}{H_1 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)} & \frac{G_2 \cdot H_3 \cdot H_4}{G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4} \\ \frac{G_1 \cdot G_3 \cdot H_2 \cdot H_4}{H_1 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)} & \frac{G_2 \cdot G_3 \cdot H_4}{G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4} \\ \frac{G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot H_2}{H_1 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)} & \frac{G_2 \cdot G_3 \cdot G_4}{G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4} \\ \frac{G_1 \cdot G_3 \cdot G_5 \cdot H_2 \cdot H_4}{H_1 \cdot H_5 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)} & \frac{G_2 \cdot G_3 \cdot G_5 \cdot H_4}{H_5 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)} \end{pmatrix}$$

4.4 Выбор частной передаточной функции $W_{k,j}$ из матричной передаточной функции W :

вход: $j := 2$ (задать j от 1 до 2)

выход: $k := 5$ (задать k от 1 до 5)

$$\frac{y_k}{v_j} = W_{k,j} \text{ simplify} \rightarrow \frac{y_5}{v_2} = \frac{G_2 \cdot G_3 \cdot G_5 \cdot H_4}{G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot H_5 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \cdot H_5}$$

4 Подстановка полиномов передаточных функций

4.1 Полиномы передаточных функций

$$W_1 := \frac{G_1}{H_1} \quad W_2 := \frac{G_2}{H_2} \quad W_3 := \frac{G_3}{H_3} \quad W_4 := \frac{G_4}{H_4} \quad W_5 := \frac{G_5}{H_5}$$

4.2 Воспроизведение матричной передаточной функции для постановки полиномов:

$$W := W \rightarrow \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ \frac{W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \\ \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} & \frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1} \end{pmatrix}$$

4.3 Выбор частной передаточной функции $W_{k,j}$ из матричной передаточной функции W :

вход: $j := 1$ (задать j от 1 до 2) выход: $k := 5$ (задать k от 1 до 5)

$$W_x := W_{k,j} \rightarrow \frac{G_1 \cdot G_3 \cdot G_5}{H_1 \cdot H_3 \cdot H_5 \cdot \left(\frac{G_2 \cdot G_3 \cdot G_4}{H_2 \cdot H_3 \cdot H_4} - 1 \right)}$$

4.4 Упрощение представления передаточной функции:

$$W_x := W_x \text{ simplify} \rightarrow \frac{G_1 \cdot G_3 \cdot G_5 \cdot H_2 \cdot H_4}{H_1 \cdot H_5 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)}$$

4.5 Числитель выбранной передаточной функции:

$$G := \text{numer}(W_x) \rightarrow -G_1 \cdot G_3 \cdot G_5 \cdot H_2 \cdot H_4$$

4.6 Знаменатель выбранной передаточной функции:

$$H := \text{denom}(W_x) \rightarrow H_1 \cdot H_5 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)$$

5 Задание вида полиномов передаточных функций

5.1 Числители заданных передаточных функций:

$$G_1 := \text{PForm}(0, g_1, g_{1,0}) \rightarrow g_{1,0}$$

$$G_2 := \text{PForm}(1, g_2, g_{2,0}) \rightarrow g_{2,0} + s \cdot g_{2,1}$$

$$G_3 := \text{PForm}(0, g_3, g_{3,0}) \rightarrow g_{3,0}$$

$$G_4 := \text{PForm}(0, g_4, g_{4,0}) \rightarrow g_{4,0}$$

$$G_5 := \text{PForm}(0, g_5, g_{5,0}) \rightarrow g_{5,0}$$

5.2 Знаменатели заданных передаточных функций:

$$H_1 := \text{PForm}(1, h_1, h_{1,0}) \rightarrow h_{1,0} + s \cdot h_{1,1}$$

$$H_2 := \text{PForm}(1, h_2, h_{2,0}) \rightarrow h_{2,0} + s \cdot h_{2,1}$$

$$H_3 := \text{PForm}(1, h_3, h_{3,0}) \rightarrow h_{3,0} + s \cdot h_{3,1}$$

$$H_4 := \text{PForm}(0, h_4, h_{4,0}) \rightarrow h_{4,0}$$

$$H_5 := \text{PForm}(1, h_5, h_{5,0}) \rightarrow h_{5,0} + s \cdot h_{5,1}$$

5.3 Воспроизведение передаточной функции:

$$W_x := W_x \rightarrow -\frac{G_1 \cdot G_3 \cdot G_5 \cdot H_2 \cdot H_4}{H_1 \cdot H_5 \cdot (G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 - H_2 \cdot H_3 \cdot H_4)}$$

5.4 Числитель передаточной функции после подстановки полиномов:

$$g := \text{numer}(W_x) \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{collect, s} \end{array} \right. \rightarrow (-g_{1,0} g_{3,0} g_{5,0} h_{4,0} h_{2,1}) \cdot s - g_{1,0} g_{3,0} g_{5,0} h_{2,0} h_{4,0}$$

5.5 Знаменатель передаточной функции после подстановки полиномов:

$$K_H := \text{denom}(W_X) \begin{cases} \text{expand} \\ \text{collect}, s \\ \text{coeffs}, s \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} g_{2,0}g_{3,0}g_{4,0}h_{1,0}h_{5,0} - h_{1,0}h_{2,0}h_{3,0}h_{4,0}h_{5,0} \\ g_{2,0}g_{3,0}g_{4,0}h_{1,0}h_{5,0} + g_{2,0}g_{3,0}g_{4,0}h_{5,0}h_{1,0} + g_{3,0}g_{4,0}h_{1,0}h_{5,0}g_{2,0} - h_{1,0}h_{2,0}h_{3,0}h_{4,0}h_{5,0} - h_{1,0}h_{2,0}h_{4,0}h_{5,0}h_{3,0} - \\ g_{2,0}g_{3,0}g_{4,0}h_{1,0}h_{5,0} + g_{3,0}g_{4,0}h_{1,0}g_{2,0}h_{5,0} + g_{3,0}g_{4,0}h_{5,0}g_{2,0}h_{1,0} - h_{1,0}h_{2,0}h_{4,0}h_{3,0}h_{5,0} - h_{1,0}h_{3,0}h_{4,0}h_{2,0}h_{5,0} - h_{1,0}h_{4,0}h_{5,0}h_{2,0}h_{3,0} - \\ g_{3,0}g_{4,0}g_{2,0}h_{1,0}h_{5,0} - h_{1,0}h_{4,0}h_{2,0}h_{3,0}h_{5,0} - h_{2,0}h_{4,0}h_{1,0}h_{3,0}h_{5,0} - h_{3,0}h_{4,0}h_{1,0}h_{2,0}h_{5,0} - 1 \\ -h_{4,0}h_{1,0}h_{2,0}h_{3,0}h_{5,0} \end{pmatrix}$$

$$h_X := \text{PForm}(4, h, h_0) \rightarrow h_4 \cdot s^4 + h_3 \cdot s^3 + h_2 \cdot s^2 + h_1 \cdot s + h_0$$

$$K_h := h_X \begin{cases} \text{expand} \\ \text{collect}, s \\ \text{coeffs}, s \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$$K_h = K_H \rightarrow \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{2,0}g_{3,0}g_{4,0}h_{1,0}h_{5,0} - h_{1,0}h_{2,0}h_{3,0}h_{4,0}h_{5,0} \\ g_{2,0}g_{3,0}g_{4,0}h_{1,0}h_{5,0} + g_{2,0}g_{3,0}g_{4,0}h_{5,0}h_{1,0} + g_{3,0}g_{4,0}h_{1,0}h_{5,0}g_{2,0} - h_{1,0}h_{2,0}h_{3,0}h_{4,0}h_{5,0} - h_{1,0}h_{2,0}h_{4,0}h_{5,0}h_{3,0} - h_{1,0}h_{3,0}h_{4,0}h_{2,0}h_{5,0} - h_{1,0}h_{4,0}h_{5,0}h_{2,0}h_{3,0} - \\ g_{2,0}g_{3,0}g_{4,0}h_{1,0}h_{5,0} + g_{3,0}g_{4,0}h_{1,0}g_{2,0}h_{5,0} + g_{3,0}g_{4,0}h_{5,0}g_{2,0}h_{1,0} - h_{1,0}h_{2,0}h_{4,0}h_{3,0}h_{5,0} - h_{1,0}h_{3,0}h_{4,0}h_{2,0}h_{5,0} - h_{1,0}h_{4,0}h_{5,0}h_{2,0}h_{3,0} - \\ g_{3,0}g_{4,0}g_{2,0}h_{1,0}h_{5,0} - h_{1,0}h_{4,0}h_{2,0}h_{3,0}h_{5,0} - h_{2,0}h_{4,0}h_{1,0}h_{3,0}h_{5,0} - h_{3,0}h_{4,0}h_{1,0}h_{2,0}h_{5,0} - h_{4,0}h_{5,0}h_{1,0} \\ -h_{4,0}h_{1,0}h_{2,0}h_{3,0}h_{5,0} \end{pmatrix}$$

3 Задание передаточных функций через коэффициенты полиномов

3.1 Параметры передаточных функций блоков системы:

$$k_1 := 0.8$$

$$k_2 := 2$$

$$k_3 := 0.01$$

$$k_4 := 2$$

$$k_5 := 2$$

$$T_1 := 0.1$$

$$T_2 := 0.01$$

$$T_3 := 0.04$$

$$T_4 := 0.01$$

$$T_5 := 0.08$$

$$\xi_3 := 0.707$$

$$\tau_4 := 0.2$$

$$\tau_3 := 0.3$$

3.2 Передаточные функции блоков системы:

$$W_1 := \frac{k_1}{T_1 \cdot s + 1}$$

$$W_2 := \frac{k_2}{T_2 \cdot s + 1}$$

$$W_3 := \frac{k_3 \cdot (\tau_3 \cdot s + 1)}{T_3^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi_3 \cdot T_3 \cdot s + 1}$$

$$W_4 := \frac{k_4 \cdot (\tau_4 \cdot s + 1)}{T_4 \cdot s + 1}$$

$$W_5 := \frac{k_5}{T_5 \cdot s + 1}$$

4 Вычисление передаточной функции замкнутой системы

4.1 Воспроизведение выбранной передаточной функции системы:

$$W_s := W_s \rightarrow \frac{W_2 \cdot W_3 \cdot W_5}{W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - 1}$$

4.2 Знаменатель передаточной функции после подстановки полиномов:

$$H_s := \text{denom}(W_s) \left| \begin{array}{l} \text{collect, s} \\ \text{float, 4} \end{array} \right. \rightarrow -1.926e17 \cdot s + -1.554e16 \cdot s^2 + -6.896e14 \cdot s^3 + -2.035e13 \cdot s^4 + -4.487e11 \cdot s^5 + -8.669e9 \cdot s^6 + -7.664e7 \cdot s^7 + -200000.0 \cdot s^8 - 9.375e17$$

4.3 Нормирование знаменателя передаточной функции так, чтобы свободный член был равен 1:

$$h_0 := H_s \text{ substitute, s = 0} \rightarrow -9.375e17$$

$$H_{ss} := \frac{H_s}{h_0} \left| \begin{array}{l} \text{collect, s} \\ \text{float, 4} \end{array} \right. \rightarrow 0.2054 \cdot s + 0.01658 \cdot s^2 + 0.0007356 \cdot s^3 + 0.00002171 \cdot s^4 + 4.786e-7 \cdot s^5 + 9.247e-9 \cdot s^6 + 8.175e-11 \cdot s^7 + 2.133e-13 \cdot s^8 + 1.0$$

4.4 Числитель передаточной функции после подстановки полиномов:

$$G_s := \text{numer}(W_s) \left| \begin{array}{l} \text{collect, s} \\ \text{float, 4} \end{array} \right. \rightarrow -1.471e16 \cdot s + -1.008e15 \cdot s^2 + -3.465e13 \cdot s^3 + -4.475e11 \cdot s^4 + -1.875e9 \cdot s^5 - 3.906e16$$

4.5 Нормирование числителя передаточной функции так, чтобы свободный член был равен 1:

$$g_0 := G_s \text{ substitute, s = 0} \rightarrow -3.906e16$$

$$G_{ss} := \frac{G_s}{g_0} \left| \begin{array}{l} \text{float, 4} \\ \text{collect, s} \\ \text{float, 4} \end{array} \right. \rightarrow 0.3766 \cdot s + 0.02581 \cdot s^2 + 0.0008871 \cdot s^3 + 0.00001146 \cdot s^4 + 4.8e-8 \cdot s^5 + 1.0$$

4.6 Коэффициент усиления замкнутой системы: $k := \frac{g_0}{h_0} \text{ float, 4} \rightarrow 0.04166$

4.7 Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_{ss} := \frac{G_{ss}}{H_{ss}} \left| \begin{array}{l} \text{collect, s} \\ \text{float, 4} \end{array} \right. \rightarrow \frac{3.766e15 \cdot s + 2.581e14 \cdot s^2 + 8.871e12 \cdot s^3 + 1.146e11 \cdot s^4 + 4.8e8 \cdot s^5 + 1.0e16}{2.054e15 \cdot s + 1.658e14 \cdot s^2 + 7.356e12 \cdot s^3 + 2.171e11 \cdot s^4 + 4.786e9 \cdot s^5 + 9.247e7 \cdot s^6 + 817500.0 \cdot s^7 + 2133.0 \cdot s^8 + 1.0e16}$$

$$W_{ss} := W_{ss} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 4} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1.766e12 \cdot s + 1.21e11 \cdot s^2 + 4.159e9 \cdot s^3 + 5.373e7 \cdot s^4 + 225035.0 \cdot s^5 + -0.000004768 \cdot s^6 + 6.519e-9 \cdot s^7 + 4.688e12}{(s + 100.0) \cdot (s + 12.71) \cdot (s + 229.9) \cdot (s + 15.99) \cdot (-10.8 \cdot s + s^2 + 1601.0) \cdot (35.46 \cdot s + s^2 + 627.0)}$$

Примечание: Программа автоматически разложила пополам знаменателя на стандартные полиномы 1-го и 2-го порядка. Это - результат работы команды `simplify`.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Модуль преобразования передаточной функции в матричную форму переменных состояния в MathCAD14

Преобразование передаточной функции в матричную форму переменных состояния

Цель и задачи работы

Цель работы: Изучение алгоритма преобразования передаточной функции в матричную форму дифференциальных уравнений.

Задачи работы:

- 1 Получить знание общих принципов преобразования передаточных функций в матричную форму дифференциальных уравнений.
- 2 Освоить умение разрабатывать и программно реализовать алгоритмы преобразования передаточных функций в матричную форму дифференциальных уравнений.
- 3 Сформировать навыки использования программы MathCAD для преобразования передаточных функций в матричную форму дифференциальных уравнений.

Порядок выполнения работы:

- 1 В соответствии с образцом дописать все недостающие фрагменты программы.
- 2 Изучить работу программы и проанализировать получаемые результаты при различных параметрах передаточных функций.

1 Теория

Передаточные функции широко используются для выполнения анализа и синтеза систем автоматического управления в случае линейности их моделей.

Для получения передаточных функций в дифференциальных уравнениях заменяют производные на оператор Лапласа s и выполняют соответствующие выкладки.

Но после этих выкладок часто бывает необходимо вернуться к системе дифференциальных уравнений, например, чтобы рассчитать переходную характеристику при произвольной форме внешнего воздействия.

Для этого осуществляют обратный переход - от передаточных функций к системе матричных дифференциальных уравнений в переменных состояния.

Переход от дифференциальных уравнений к передаточным функциям всегда однозначен и получаемые передаточные функции всегда имеют один и тот же вид.

Преобразование передаточных функций к системе дифференциальных уравнений не однозначно - для одной и той же передаточной функции можно получить несколько видов системы дифференциальных уравнений. Это объясняется тем, что при получении передаточной функции выполняются операции перемножения, а при переходе от передаточной функции к дифференциальным уравнениям выполняются операции, которые можно трактовать как разложение произведения на множители. В случае перемножения заданных множителей всегда получается одно и то же произведение, а в случае разложения числа на множители возможно несколько вариантов.

Поэтому рассматриваемое преобразование выполняется следующим образом:

- 1) задается исходная передаточная функция в виде дроби с полиномами в числителе и знаменателе,
- 2) задается желаемая форма дифференциальных уравнений в общем виде с матрицами, коэффициенты которых пока не известны,
- 3) выполняются операции перехода от дифференциальных уравнений к передаточной функции и получают дробь с полиномами числителя и знаменателя, коэффициенты которых состоят из коэффициентов матриц,
- 4) в результате имеют две передаточные функции - заданную и желаемую, у заданной передаточной функции все коэффициенты полинома известны, у желаемой - выражены через коэффициенты матриц,
- 5) приравняют коэффициенты соответствующих полиномов (при соответствующих степенях оператора Лапласа) и получают систему алгебраических уравнений,
- 6) решают полученную систему алгебраических уравнений и находят, как коэффициенты искомого матриц выражаются через коэффициенты полиномов заданной передаточной функции. Задача решена.

2 Заданная передаточная функция (ПФ)

2.1 Порядок полинома знаменателя заданной ПФ (от 1 до 7):

$N := 5$

2.2 Порядок полинома числителя заданной ПФ (от 1 до 5):

$M := 4$

2.3 Внешний вид передаточной функции:

$$W := \text{WForm}(N, h, h_0, M, g, g_0, s) \rightarrow \frac{g_4 \cdot s^4 + g_3 \cdot s^3 + g_2 \cdot s^2 + g_1 \cdot s + g_0}{s^5 + h_4 \cdot s^4 + h_3 \cdot s^3 + h_2 \cdot s^2 + h_1 \cdot s + h_0}$$

3 Желаемая матричная модель объекта управления

3.1 Матричная запись переменных состояния: $\frac{d}{dt}x = A \cdot x + B \cdot u$, где x -- вектор переменных состояния, u -- вектор внешних воздействий, A ; B -- матрицы

3.2 Вектор переменных состояния:

$$X := \text{VForm}(N, x(t)) \rightarrow \begin{pmatrix} x(t)_1 \\ x(t)_2 \\ x(t)_3 \\ x(t)_4 \\ x(t)_5 \end{pmatrix}$$

3.3 Вектор входных переменных:

$$U := \text{VForm}(1, u(t)) \rightarrow (u(t)_1)$$

3.4 Выбираются желаемые матрицы:

$$A := \text{AForm}(N, a) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{pmatrix}$$

$$B := \text{BForm}(N, b) \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

$$C := \text{CForm}(N, 1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5 Желательный вид матричной модели

$$\frac{d}{dt}X = A \cdot X + B \cdot U \rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t)_1 \\ x(t)_2 \\ x(t)_3 \\ x(t)_4 \\ x(t)_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t)_1 \\ x(t)_2 \\ x(t)_3 \\ x(t)_4 \\ x(t)_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \cdot (u(t)_1)$$

3.6 Желательная передаточная функция (ПФ):

$$W_Z := C^T \cdot (s \cdot \text{identity}(N) - A)^{-1} \cdot B$$

$$W_Z \rightarrow \frac{(b_1 \cdot a_{5,5} - b_2) \cdot s^3 - b_1 \cdot s^4 + (b_1 \cdot a_{5,4} + b_2 \cdot a_{5,5} - b_3) \cdot s^2 + (b_1 \cdot a_{5,3} + b_2 \cdot a_{5,4} + b_3 \cdot a_{5,5} - b_4) \cdot s + b_1 \cdot a_{5,2} + b_2 \cdot a_{5,3} + b_3 \cdot a_{5,4} + b_4 \cdot a_{5,5} - b_5}{a_{5,5} \cdot s^4 - s^5 + a_{5,4} \cdot s^3 + a_{5,3} \cdot s^2 + a_{5,2} \cdot s + a_{5,1}}$$

4 Определение коэффициентов матрицы A через параметры заданной передаточной функции

4.1 Коэффициенты знаменателя желаемой ПФ:

$$H_Z := \text{denom}(W_Z) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{5,1} \\ a_{5,2} \\ a_{5,3} \\ a_{5,4} \\ a_{5,5} \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.2 Коэффициенты знаменателя заданной ПФ:

$$H := \text{denom}(W) \rightarrow \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3 Необходимо приравнять искомые коэффициенты при полученной ПФ к соответствующим коэффициентам заданной ПФ:

4.3.1 Смена знака у KH_z (знаки при 1 должны быть одинаковы):

$$Z := H_{z_{N+1}} \cdot H_{N+1} \rightarrow -1$$

$$H := Z \cdot H$$

4.3.2 Отсюда элементы матрицы A через коэффициенты знаменателя заданной ПФ :

$$H_z = H \rightarrow \begin{pmatrix} a_{5,1} \\ a_{5,2} \\ a_{5,3} \\ a_{5,4} \\ a_{5,5} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_0 \\ -h_1 \\ -h_2 \\ -h_3 \\ -h_4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.4 Подстановка вместо элементов матрицы A коэффициентов ПФ :

$$A_z := AzForm(A, H) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -h_0 & -h_1 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \end{pmatrix}$$

5 Определение коэффициентов матрицы В через параметры заданной передаточной функции

5.1 Коэффициенты числителя желаемой ПФ и смена знака с учётом 4.3.1:

$$G_z(a) := Z \cdot \text{numer}(W_z) \rightarrow \begin{pmatrix} b_5 - b_2 \cdot a_{5,3} - b_3 \cdot a_{5,4} - b_4 \cdot a_{5,5} - b_1 \cdot a_{5,2} \\ b_4 - b_2 \cdot a_{5,4} - b_3 \cdot a_{5,5} - b_1 \cdot a_{5,3} \\ b_3 - b_2 \cdot a_{5,5} - b_1 \cdot a_{5,4} \\ b_2 - b_1 \cdot a_{5,5} \\ b_1 \end{pmatrix}$$

5.2 Коэффициенты числителя заданной ПФ:

$$G := \text{numer}(W) \rightarrow \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

$$G := g_f(G, N) \rightarrow \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

5.3 Подстановка найденных значений элементов матрицы A :

$$G_z(b) := G_z(A_z) \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + b_3 \cdot h_3 + b_4 \cdot h_4 + b_5 \\ b_1 \cdot h_2 + b_2 \cdot h_3 + b_3 \cdot h_4 + b_4 \\ b_1 \cdot h_3 + b_2 \cdot h_4 + b_3 \\ b_1 \cdot h_4 + b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

5.4 Для нахождения элементов матрицы B необходимо решить систему уравнений:

$$G_z(b) = G \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + b_3 \cdot h_3 + b_4 \cdot h_4 + b_5 \\ b_1 \cdot h_2 + b_2 \cdot h_3 + b_3 \cdot h_4 + b_4 \\ b_1 \cdot h_3 + b_2 \cdot h_4 + b_3 \\ b_1 \cdot h_4 + b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

5.4.1 Матричное уравнение: $M_b \cdot B_z = G$, где B_z -- искомая матрица коэффициентов.

5.4.2 Вспомогательная матрица для расчёта элементов матрицы B :

$$M_b := MElimin(G_z, N, b, N) \rightarrow \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & 1 \\ h_2 & h_3 & h_4 & 1 & 0 \\ h_3 & h_4 & 1 & 0 & 0 \\ h_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.4.3 Решение матричного уравнения через обратную матрицу:

$$B_Z := M_b^{-1} \cdot G \rightarrow \begin{bmatrix} g_4 \\ g_3 - g_4 \cdot h_4 \\ \left[(h_4)^2 - h_3 \right] \cdot g_4 - g_3 \cdot h_4 + g_2 \\ \left[(h_4)^2 - h_3 \right] \cdot g_3 - g_2 \cdot h_4 - \left[(h_4)^3 - 2 \cdot h_3 \cdot h_4 + h_2 \right] \cdot g_4 + g_1 \\ g_0 - \left[(h_4)^3 - 2 \cdot h_3 \cdot h_4 + h_2 \right] \cdot g_3 - g_1 \cdot h_4 + \left[(h_4)^2 - h_3 \right] \cdot g_2 + g_4 \cdot \left[(h_3)^2 - 3 \cdot h_3 \cdot (h_4)^2 + (h_4)^4 + 2 \cdot h_2 \cdot h_4 - h_1 \right] \end{bmatrix}$$

5.4.4 Коэффициентов матрицы B через коэффициенты передаточной функции:

$$B = B_Z \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} g_4 \\ g_3 - g_4 \cdot h_4 \\ \left[(h_4)^2 - h_3 \right] \cdot g_4 - g_3 \cdot h_4 + g_2 \\ \left[(h_4)^2 - h_3 \right] \cdot g_3 - g_2 \cdot h_4 - \left[(h_4)^3 - 2 \cdot h_3 \cdot h_4 + h_2 \right] \cdot g_4 + g_1 \\ g_0 - \left[(h_4)^3 - 2 \cdot h_3 \cdot h_4 + h_2 \right] \cdot g_3 - g_1 \cdot h_4 + \left[(h_4)^2 - h_3 \right] \cdot g_2 + g_4 \cdot \left[(h_3)^2 - 3 \cdot h_3 \cdot (h_4)^2 + (h_4)^4 + 2 \cdot h_2 \cdot h_4 - h_1 \right] \end{bmatrix}$$

6 Внешний вид матричной модели через коэффициенты заданной передаточной функции

6.1 Желаемый вид матричной модели:

$$\frac{d}{dt} X = A \cdot X + B \cdot U \rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t)_1 \\ x(t)_2 \\ x(t)_3 \\ x(t)_4 \\ x(t)_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t)_1 \\ x(t)_2 \\ x(t)_3 \\ x(t)_4 \\ x(t)_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \cdot (u(t)_1)$$

6.2 Полученный вид матричной модели:

$$\frac{d}{dt} X = A_z \cdot X + B_z \cdot U \rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t)_1 \\ x(t)_2 \\ x(t)_3 \\ x(t)_4 \\ x(t)_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -h_0 & -h_1 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t)_1 \\ x(t)_2 \\ x(t)_3 \\ x(t)_4 \\ x(t)_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_4 \\ g_3 - g_4 \cdot h_4 \\ [(h_4)^2 - h_3] \cdot g_4 - g_3 \cdot h_4 + g_2 \\ [(h_4)^2 - h_3] \cdot g_3 - g_2 \cdot h_4 - [(h_4)^3 - 2 \cdot h_3 \cdot h_4 + h_2] \cdot g_4 + g_1 \\ g_0 - [(h_4)^3 - 2 \cdot h_3 \cdot h_4 + h_2] \cdot g_3 - g_1 \cdot h_4 + [(h_4)^2 - h_3] \cdot g_2 + g_4 \cdot [(h_3)^2 - 3 \cdot h_3 \cdot (h_4)^2 + (h_4)^4 + 2 \cdot h_2 \cdot h_4 - h_1] \end{pmatrix} \cdot (u)$$

7 Проверка корректности произведённых выкладок

7.1 Формирование ПФ на основе полученной матричной модели:

$$W_r := C^T \cdot (s \cdot \text{identity}(N) - A_z)^{-1} \cdot B_z$$

7.2 ПФ на основе полученной матричной модели

$$W_r \rightarrow \frac{g_4 \cdot s^4 + g_3 \cdot s^3 + g_2 \cdot s^2 + g_1 \cdot s + g_0}{s^5 + h_4 \cdot s^4 + h_3 \cdot s^3 + h_2 \cdot s^2 + h_1 \cdot s + h_0}$$

7.3 Исходная заданная ПФ:

$$W \rightarrow \frac{g_4 \cdot s^4 + g_3 \cdot s^3 + g_2 \cdot s^2 + g_1 \cdot s + g_0}{s^5 + h_4 \cdot s^4 + h_3 \cdot s^3 + h_2 \cdot s^2 + h_1 \cdot s + h_0}$$

7.4 Сравнение заданной и полученной ПФ (если ПФ одинаковы, то результат должен быть равен 0):

$$W_r - W \begin{cases} \text{expand} \\ \text{simplify} \end{cases} \rightarrow 0$$

Библиотека процедур

Формирование передаточной функции

$$\text{WForm}(N, h, h_0, M, g, g_0, s) := \begin{cases} H \leftarrow h_0 \\ H \leftarrow h_0 + \sum_{j=1}^{N-1} (h_j \cdot s^j) \text{ if } N > 1 \\ H \leftarrow H + s^N \text{ if } N > 0 \\ G \leftarrow g_0 \\ G \leftarrow g_0 + \sum_{j=1}^M (g_j \cdot s^j) \text{ if } M > 0 \\ W \leftarrow \frac{G}{H} \\ W \end{cases}$$

Выделение матрицы системных уравнений

$$\text{MElimix}(A, NA, v, Nv) := \begin{cases} \text{for } j \in 1..Nv \\ \quad \text{for } k \in 1..Nv \\ \quad \quad v_k \leftarrow 0 \\ \quad v_j \leftarrow 1 \\ \quad \text{for } k \in 1..NA \\ \quad \quad Z_{k,j} \leftarrow A(v)_k \\ Z \end{cases}$$

Формирование нулевого вида матрицы A

$$\text{AForm}(N, a) := \begin{cases} \text{for } j \in 1..N \\ \quad \text{for } k \in 1..N \\ \quad \quad Z_{j,k} \leftarrow 0 \\ \quad \quad Z_{j,k} \leftarrow a_{j,k} \text{ if } j = N \\ \quad \quad Z_{j,k} \leftarrow 1 \text{ if } j = k - 1 \\ Z \end{cases}$$

Формирование символьного вектора, элементы которого z

$$\text{VForm}(N, x) := \begin{cases} \text{for } k \in 1..N \\ \quad z_k \leftarrow x_k \\ z \end{cases}$$

Формирование нулевого вида матрицы Az

$$\text{AzForm}(A, h) := \begin{cases} N \leftarrow \text{rows}(A) \\ \text{for } j \in 1..N \\ \quad A_{N,j} \leftarrow h_j \\ A \end{cases}$$

Расширение вектора коэффициентов многочлена P

$$\text{gf}(v, N) := \begin{cases} M \leftarrow \text{rows}(v) \\ \text{for } j \in 1..N \\ \quad v_j \leftarrow 0 \text{ if } j > M \\ v \end{cases}$$

Формирование нулевого вида матрицы B

$$\text{BForm}(N, b) := \begin{cases} \text{for } j \in 1..N \\ \quad Z_j \leftarrow b_j \\ Z \end{cases}$$

Формирование нулевого вида матрицы C

$$\text{CForm}(N, k) := \begin{cases} \text{for } j \in 1..N \\ \quad Z_j \leftarrow 0 \\ \quad Z_k \leftarrow 1 \\ Z \end{cases}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Модуль анализа графика аperiodического процесса в MathCAD14

ORIGIN:= 1

Показатели качества регулирования переходной характеристики аperiodического процесса

Цель и задачи работы

Цель работы: Исследование переходной характеристики аperiodического звена.

Задачи работы:

- 1 Получить знание об основных особенностях переходной характеристики аperiodического звена.
- 2 Освоить умение рассчитывать переходные характеристики аperiodического звена методом обратного преобразования Лапласа.
- 3 Сформировать навыки использования программы MathCAD для расчёта переходных характеристик заданных передаточных функций.

Порядок выполнения работы:

- 1 В соответствии с образцом дописать все недостающие фрагменты программы.
- 2 Изучить логику построения и работу программы и проанализировать получаемые результаты при различных параметрах аperiodического звена.

Библиотека процедур

Поиск в массиве наименьшего числа больше заданного

```
tStat(x, t, x0) := 
$$\begin{array}{l} N \leftarrow \text{rows}(t) \\ t_0 \leftarrow t_1 \\ \text{for } j \in 2..N \\ \quad t_0 \leftarrow t_j \text{ if } x_j \leq x_0 \\ t_0 \end{array}$$

```

1 Теоретические сведения

1.1 Типовые динамические звенья и их переходные характеристики

Передаточная функция является специальной формой представления системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение объекта управления.

Поведение объекта управления демонстрируется с помощью переходной характеристики, которая представляет собой процесс изменения выходной переменной при ступенчатом изменении входного воздействия.

Переходные характеристики можно классифицировать в зависимости от их вида, который, в свою очередь, определяется типовым динамическим звеном, составляющим передаточную функцию.

В теории управления название типового динамического звена соответствует названию соответствующего переходного процесса.

Выделяют два основных переходных процесса (и, соответственно, типовых звена): периодический (колебательный) и аperiodический (монотонный).

Передаточная функция, имеющая в знаменателе типовое динамическое звено первого порядка, называется аperiodическим, так как соответствующий ей переходный процесс представляет собой экспоненциально нарастающую кривую.

Аperiodическое звено характеризуется единственным параметром - постоянной времени. Оказывается, что многие процессы в природе и технике являются аperiodическими. Для аperiodического процесса выявлены многие соотношения, которые позволяют только по постоянной времени (не находя выражение переходной характеристики) определить многие её важные свойства.

1.2 Особенности задания

В процессе выполнения задания задаётся передаточная функция (аperiodическое звено), рассчитывается её переходная характеристика и строятся графики: заданное ступенчатое воздействие; переходная характеристика выходной величины; уровень, при достижении которого переходный процесс считается законченным (и возникает установившийся режим работы); касательная к переходной характеристике в её начальной точке. С помощью касательной и уровня определяются некоторые характерные свойства аperiodической переходной характеристики.

2 Задание передаточной функции

Апериодическое звено (звено первого порядка в знаменателе)

2.1 Передаточная функция с аperiодическим звеном (звено первого порядка в знаменателе):

$$W_1 := \frac{K_1}{T_1 \cdot s + 1}$$

2.2 Входное воздействие (ступенчатое) в зависимости от времени:

$$U_m := 1 \quad u(t) := U_m$$

2.3 Входное воздействие (ступенчатое) после преобразования по Лапласу (чтобы использовать вместе с передаточной функцией):

$$u_s := u(t) \text{ laplace} \rightarrow \frac{1}{s}$$

2.4 Операторное выражение (по Лапласу) переменной состояния $x(s)$ с учётом входного воздействия:

$$x_s := W_1 \cdot u_s \rightarrow \frac{K_1}{s \cdot (T_1 \cdot s + 1)}$$

2.5 Выражение переменной состояния $x(t)$ от времени после обратного преобразования Лапласа:

$$x_t := x_s \text{ invlaplace, s} \rightarrow -K_1 \cdot \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - 1 \right)$$

2.6 Задание параметров передаточной функции для расчёта переходной характеристики:

$$K_1 := 1 \quad T_1 := 0.1$$

2.7 Подстановка параметров с помощью повторения выражения в символьном виде:

$$x(t) := x_t \rightarrow -K_1 \cdot \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - 1 \right)$$

2.8 Переходная характеристика после подстановки числовых значений параметров:

$$x(t) \rightarrow 1 - e^{t-10.0}$$

3 Построение графиков

3.1 Общие параметры графиков

3.1.1 Начальное значение времени для графика (левая граница оси абсцисс), с:

$$t_{\text{start}} := -0.1$$

3.1.2 Конечное значение времени для графика (правая граница оси абсцисс), с:

$$t_{\text{stop}} := 1$$

3.1.3 Число выводимых точек:

$$N := 4000$$

3.1.4 Цикл расчёта характеристик и построения их графиков:

$$j := 1 .. N$$

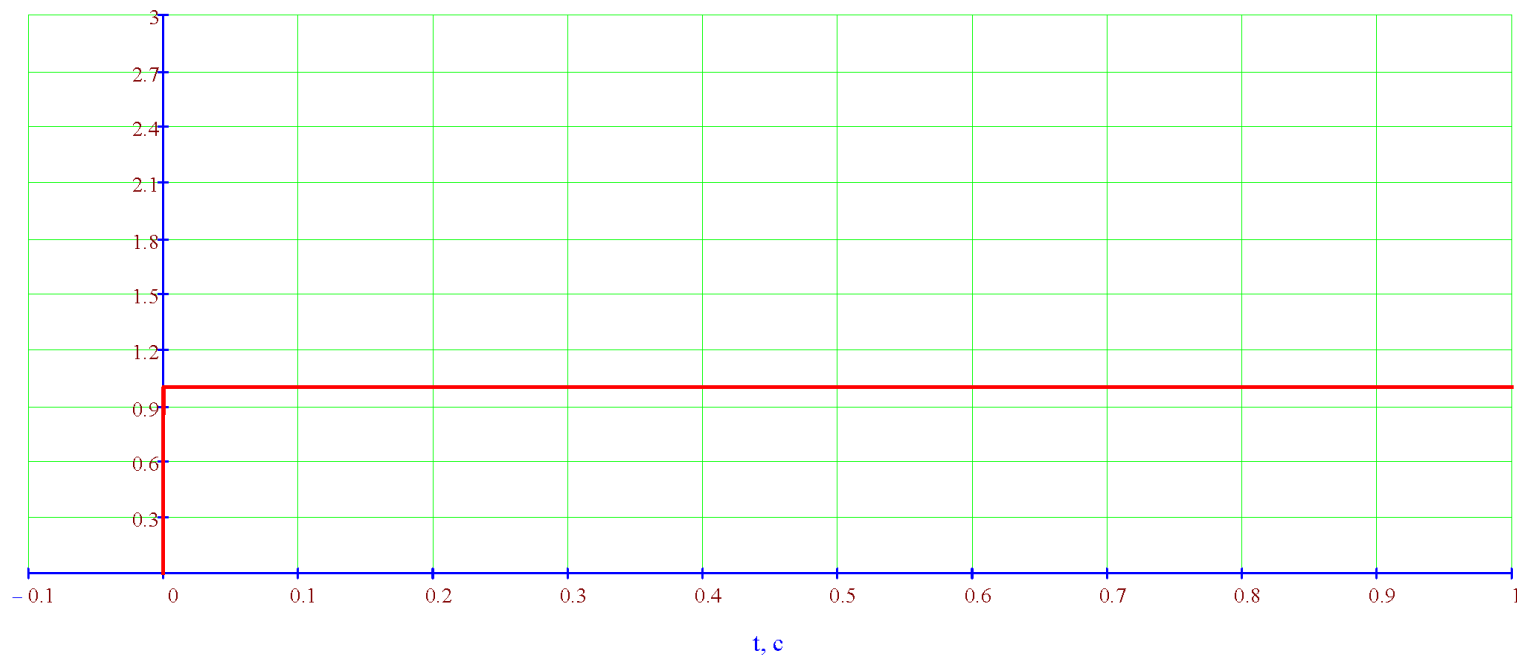
3.1.5 Массив значений времени (по оси абсцисс), с:

$$T_j := (j - 1) \cdot \frac{t_{\text{stop}} - t_{\text{start}}}{N}$$

3.2 График входного воздействия:

$$u(t) \rightarrow 1$$

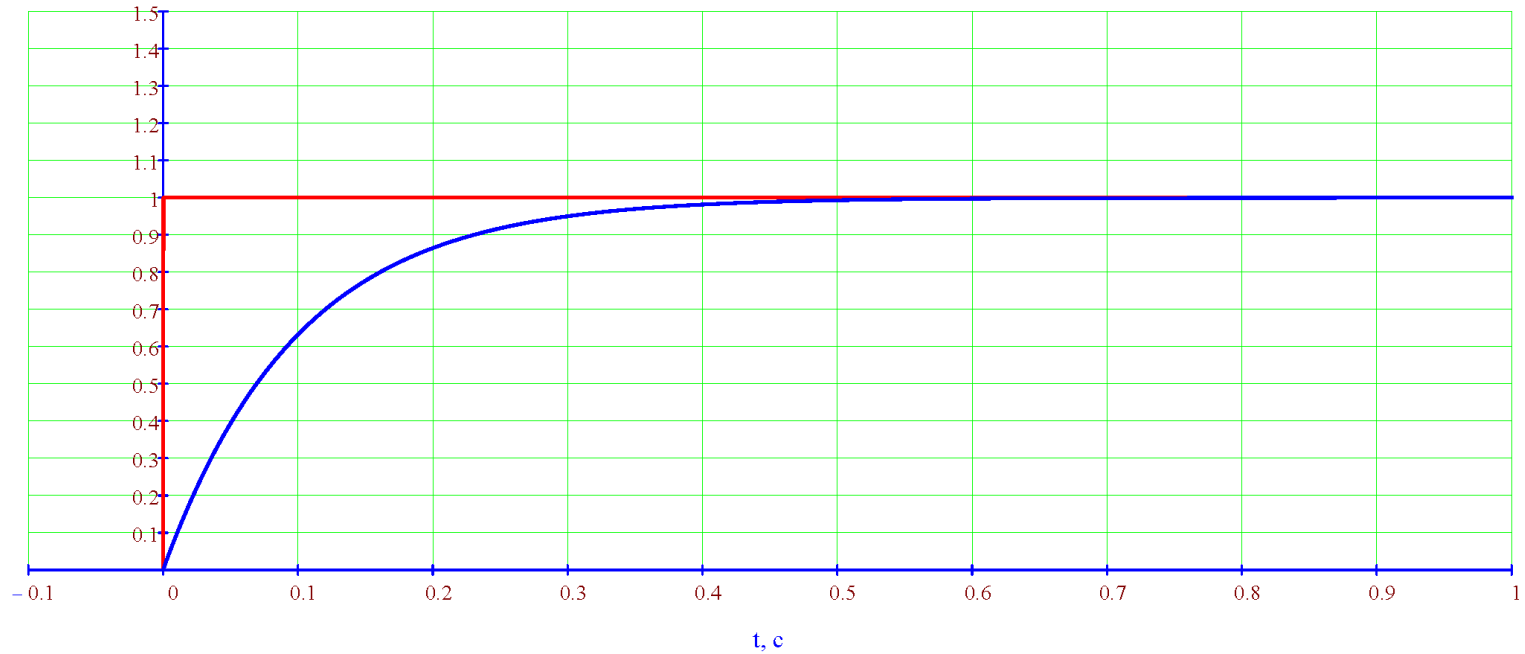
$$u(t) := \begin{cases} z \leftarrow 0 & \text{if } t = 0 \\ z \leftarrow U_m & \text{if } t > 0 \\ z \end{cases} \quad U_j := u(T_j)$$



3.3 График выходной переменной:

$$x(t) \rightarrow 1 - e^{-10.0 \cdot t}$$

$$X_j := x(T_j)$$



3.4 График производной переходной характеристики

3.4.1 Производная переходной характеристики:

$$dx(t) := \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow 10.0 \cdot e^{-10.0 \cdot t}$$

3.4.2 Значение производной переходной характеристики в начальной точке:

$$dx_0 := dx(0) \rightarrow 10.0$$

3.4.3 График касательной к переходной характеристике в начальной точке:

$$Dx_j := dx_0 \cdot T_j$$

3.4.4 Координаты точки пересечения касательной уровня установившегося режима:

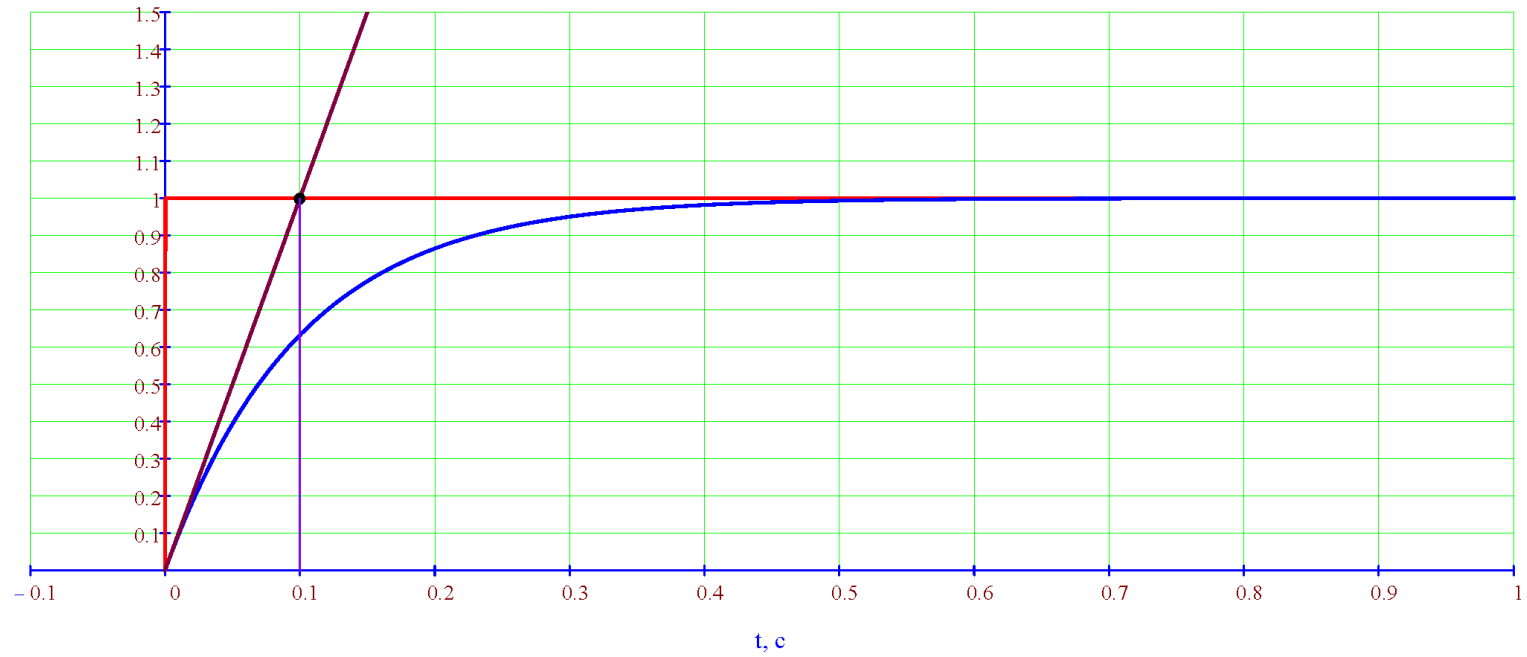
$$T_0 := tStat(Dx, T, U_m) \quad Dx_0 := dx_0 \cdot T_0$$

3.4.5 Массив абсцисс и ординат точки пересечения касательной уровня установившегося режима:

$$t_0 := \begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \end{pmatrix} \quad z_0 := \begin{pmatrix} Dx_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.4.6 Счётчик для построения проекции точки пересечения касательной на ось абсцисс:

$$k := 1 .. 2$$



3.5 Момент пересечения линии установившегося режима

3.5.1 Линия достижения установившегося режима:

$$k_{fin} := 0.95 \quad x_{fin} := k_{fin} \cdot U_m$$

3.5.2 Момент пересечения линии установившегося режима:

$$T_{stat} := tStat(X, T, x_{fin})$$

3.5.3 Значение переменной состояния в момент достижения установившегося режима:

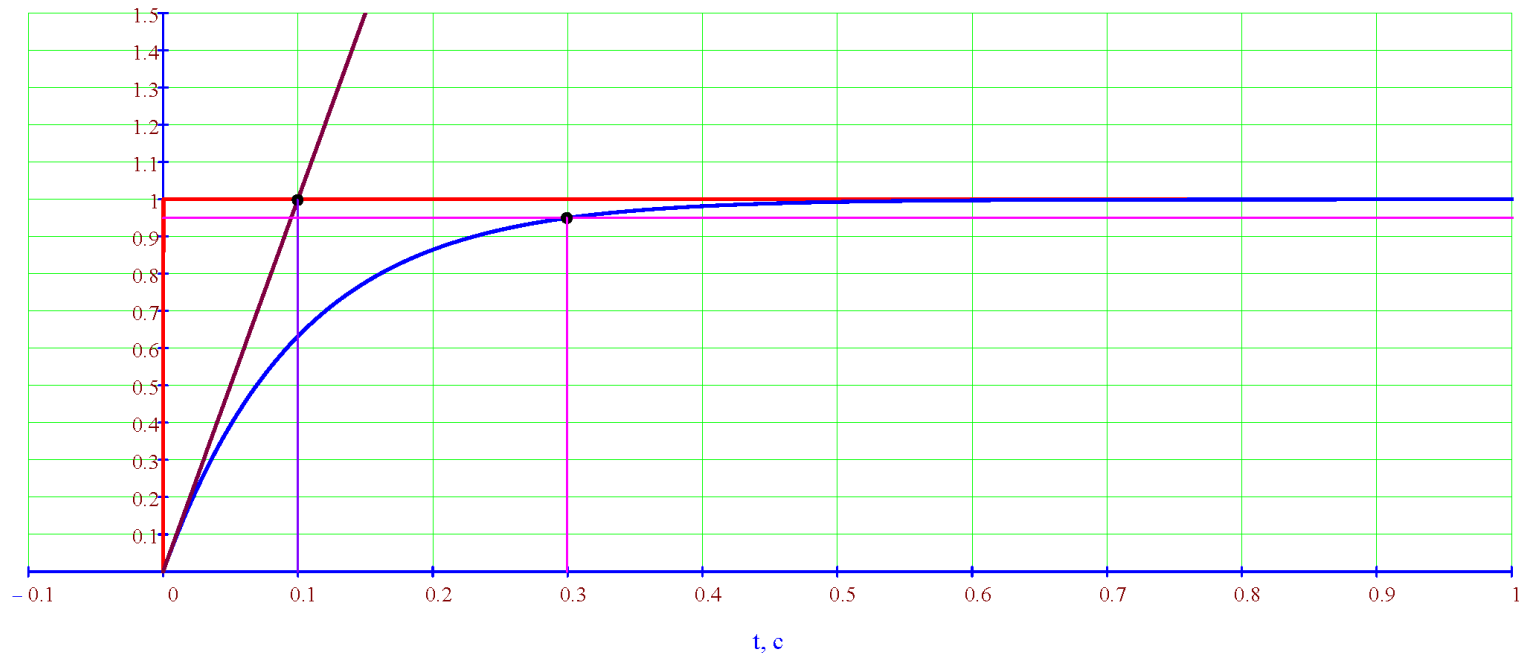
$$x_{stat} := x(T_{stat})$$

3.5.4 Массив ординат точки достижения установившегося режима:

$$z_{st} := \begin{pmatrix} x_{stat} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5.5 Массив значений абсцисс проекции точки достижения установившегося режима:

$$t_{st} := \begin{pmatrix} T_{stat} \\ T_{stat} \end{pmatrix}$$



ПРИЛОЖЕНИЕ Д
Модуль анализа графика колебательного процесса
в MathCAD14

ORIGIN := 1

Автоматический анализ переходной характеристики колебательного звена

Цель и задачи работы

Цель работы: Изучение переходной характеристики колебательного звена.

Задачи работы:

- 1 Получить знание о переходной характеристике колебательного звена (колебательной переходной характеристике).
- 2 Освоить умение рассчитывать переходную характеристику колебательного звена методом обратного преобразования Лапласа.
- 3 Сформировать навыки использования программы MathCAD для расчёта переходной характеристики колебательного звена.

Порядок выполнения работы:

- 1 В соответствии с образцом дописать все недостающие фрагменты программы.
- 2 Изучить логику построения и работу программы и проанализировать получаемые результаты при различных параметрах колебательного звена.

1 Теоретические сведения

1.1 Типовые динамические звенья и их переходные характеристики (колебательное звено)

Передачная функция является специальной формой представления системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение объекта управления.

Поведение объекта управления демонстрируется с помощью переходной характеристики, которая представляет собой процесс изменения выходной переменной при ступенчатом изменении входного воздействия.

Переходные характеристики можно классифицировать в зависимости от их вида, который, в свою очередь, определяется типовым динамическим звеном, составляющим передаточную функцию.

В теории управления название типового динамического звена соответствует названию соответствующего переходного процесса.

Выделяют два основных переходных процесса (и, соответственно, типовых звена): периодический (колебательный) и апериодический (монотонный).

Передачная функция, имеющая в знаменателе типовое динамическое звено второго порядка, называется колебательным, так как соответствующий ей переходный процесс представляет собой кривую, имеющую колебания трёх типов: с постоянной амплитудой, с затухающей амплитудой с нарастающей амплитудой.

Колебательное звено характеризуется двумя параметрами - постоянной времени и коэффициентом затухания. Оказывается, что многие процессы в природе и технике являются колебательными. Для колебательного процесса выявлены соотношения, которые позволяют только по постоянной времени и коэффициенту затухания (не находя выражение переходной характеристики) определить некоторые её важные свойства.

1.2 Особенности задания

В процессе выполнения задания предлагается передаточная функция (колебательное звено), рассчитывается её переходная характеристика и строятся графики: заданное ступенчатое воздействие; переходная характеристика выходной величины; находят точки пересечения переходной характеристикой уровня установившегося значения (колебаний); зона знаний, при попадании в которую переходный процесс считается законченным (и возникает установившийся режим работы).

2 Задание передаточной функции

2.2 Звено второго порядка в знаменателе (колебательное звено)

2.2.1 Передаточная функция с колебательным звеном (звено второго порядка - в знаменателе):

$$W_1 := \frac{K}{T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1}$$

2.2.2 Входное воздействие (ступенчатое) в зависимости от времени:

$$U_m := 1 \quad u(t) := U_m$$

2.2.3 Входное воздействие (ступенчатое) после преобразования по Лапласу (чтобы использовать вместе с передаточной функцией):

$$u_s := u(t) \text{ laplace} \rightarrow \frac{1}{s}$$

2.2.4 Операторное выражение (по Лапласу) переменной состояния $x(s)$ с учётом входного воздействия:

$$x_s := W_1 \cdot u_s \rightarrow \frac{K}{s \cdot (T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1)}$$

2.2.5 Выражение переменной состояния $x(t)$ от времени после обратного преобразования Лапласа:

$$x_t := x_s \text{ invlaplace, s} \rightarrow \frac{K \cdot \left(\xi \cdot e^{-\frac{\xi \cdot t}{T}} \cdot \sinh \left(t \cdot \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{T^2}} \right) - T \cdot \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{T^2}} + T \cdot e^{-\frac{\xi \cdot t}{T}} \cdot \cosh \left(t \cdot \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{T^2}} \right) \cdot \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{T^2}} \right)}{T \cdot \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{T^2}}}$$

2.2.6 Задание параметров передаточной функции для расчёта переходной характеристики:

$$K := 1$$

$$T := 0.08$$

$$\xi := 0.707$$

(здать 0.01 и 0.9)

2.2.7 Подстановка параметров с помощью повторения выражения в символьном виде:

$$x(t) := x_t \rightarrow \frac{K \cdot \left(\xi \cdot e^{-\frac{\xi \cdot t}{T}} \cdot \sinh \left(t \cdot \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{T^2}} \right) - T \cdot \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{T^2}} + T \cdot e^{-\frac{\xi \cdot t}{T}} \cdot \cosh \left(t \cdot \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{T^2}} \right) \cdot \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{T^2}} \right)}{T \cdot \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{T^2}}}$$

2.2.8 Числовое выражение выходной характеристики:

$$x(t) := x(t) \text{ float, 4} \rightarrow -1.0 \cdot \cosh[(8.84i) \cdot t] \cdot e^{-8.837 \cdot t} + (0.9997i) \cdot \sinh[(8.84i) \cdot t] \cdot e^{-8.837 \cdot t} + 1.0$$

2.2.9 Установившееся значение переходной хатактеристики при $t = \infty$:

$$x_{\text{stat}} := x(\infty) \rightarrow 1.0$$

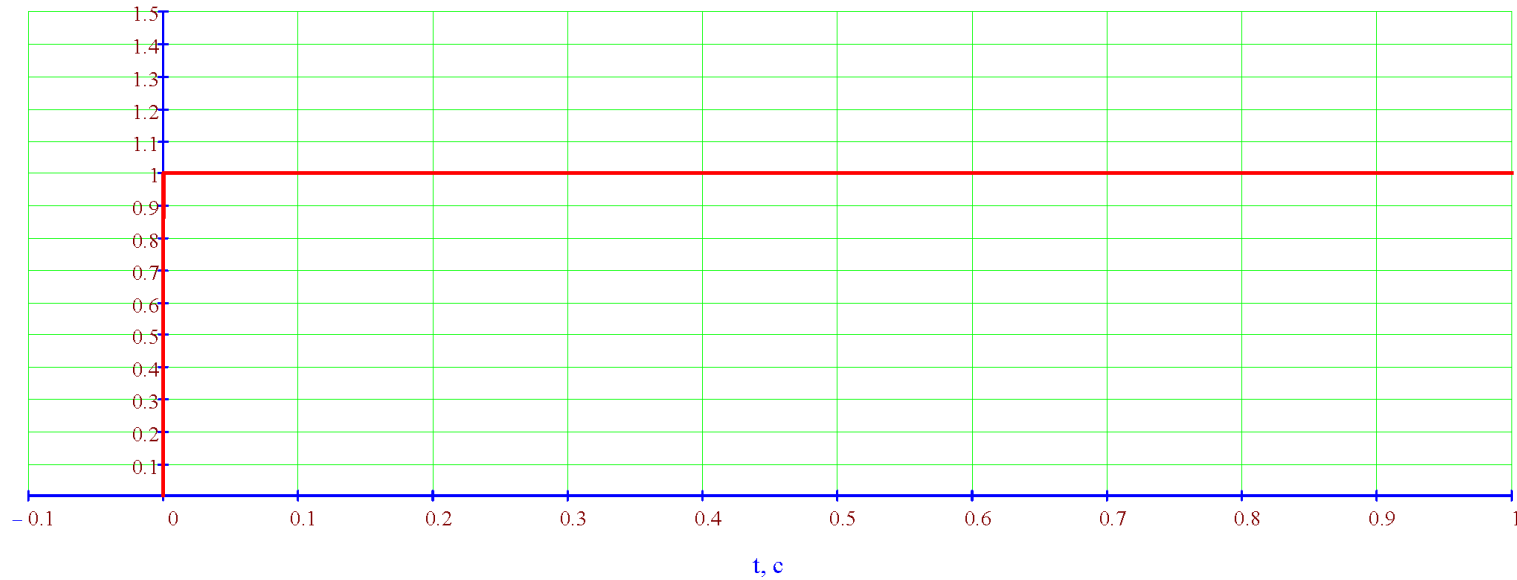
3 Построение графиков

3.1 Общие параметры графиков

- 3.1.1 Начальное значение времени для графика (левая граница оси абсцисс), с: $t_{\text{start}} := -0.1$
- 3.1.2 Конечное значение времени для графика (правая граница оси абсцисс), с: $t_{\text{stop}} := 1$
- 3.1.3 Число выводимых точек: $N := 4000$
- 3.1.4 Цикл расчёта характеристик и построения их графиков: $j := 1 \dots N$
- 3.1.5 Массив значений времени (по оси абсцисс), с: $tt_j := (j - 1) \cdot \frac{t_{\text{stop}} - t_{\text{start}}}{N}$

3.2 График входного воздействия:

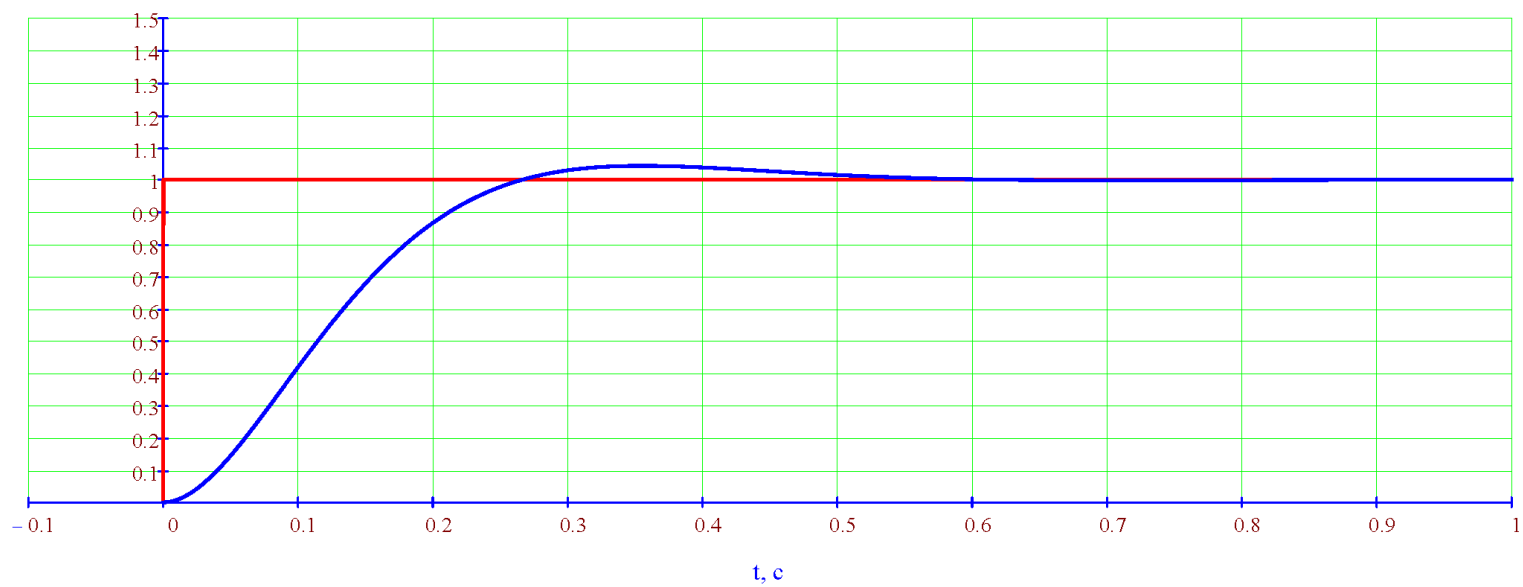
$$u(t) \rightarrow 1 \quad u(t) := \begin{cases} z \leftarrow 0 & \text{if } t = 0 \\ z \leftarrow U_m & \text{if } t > 0 \end{cases} \quad U_j := u(tt_j)$$



3.3 График выходной переменной:

$$x(t) \rightarrow -1.0 \cdot \cosh[(8.84i) \cdot t] \cdot e^{-8.837 \cdot t} + (0.9997i) \cdot \sinh[(8.84i) \cdot t] \cdot e^{-8.837 \cdot t} + 1.0$$

$$X_j := x(t_j)$$



3.4 Период колебаний

3.4.1 Линия достижения установившегося режима:

$$x_{\text{stat}} = 1$$

3.4.2 Массив ординат точки достижения установившегося режима:

$$T_{\text{period}} := \text{Period}(X, tt, x_{\text{stat}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.267 & 0.622 \end{pmatrix}$$

3.4.3 Время начала положительной полуволны колебания:

$$T_{\text{plus}} := T_{\text{period}}^{(1)} \quad T_{\text{plus}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.267 \end{pmatrix}$$

3.4.4 Время начала отрицательной полуволны колебания:

$$T_{\text{minus}} := T_{\text{period}}^{(2)} \quad T_{\text{minus}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.622 \end{pmatrix}$$

3.4.5 Период колебаний по модели:

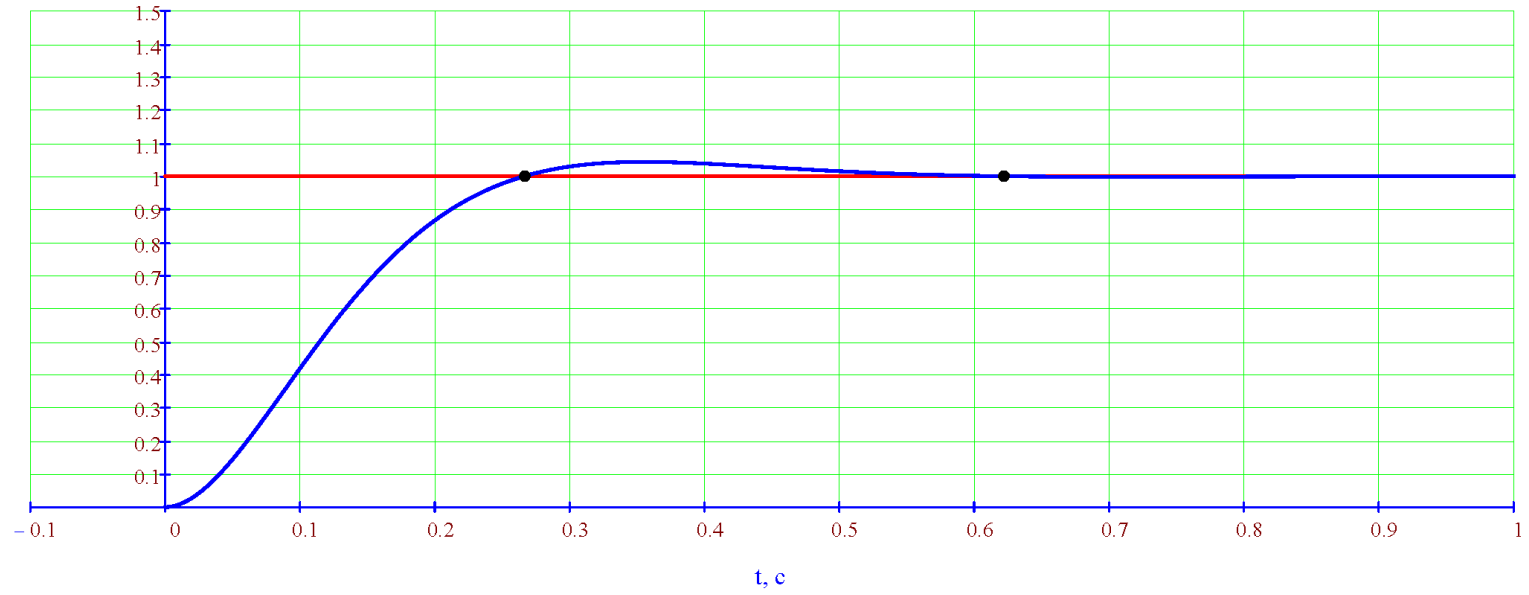
$$T_{\text{per}} := T_{\text{minus}} - T_{\text{plus}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.355 \end{pmatrix}$$

3.4.6 Период колебаний аналитически:

$$T_{\text{теор}} := \frac{\pi \cdot T}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 0.355$$

3.4.6 Цикл для вывода точек пересечения переходной характеристикой уровня установившегося значения:

`k := 2 .. rows(T_per)`



3.5 Время окончания переходного процесса

3.5.1 Зона установившегося режима (половина доли установившегося значения):

$$h_{st} := 0.05 \quad \text{варьировать } h_{st}; \quad 0.01 \quad 0.05 \quad 0.1$$

3.5.2 Верхняя и нижняя границы зоны установившегося режима:

$$x_{st.max} := (1 + h_{st}) \cdot x_{stat} = 1.05 \quad x_{st.min} := (1 - h_{st}) \cdot x_{stat} = 0.95$$

3.5.3 Момент пересечения линии установившегося режима, с:

$$t_{stat.fix} := tStat2(X, tt, x_{st.max}, x_{st.min}) = 0.234$$

3.5.4 Значение переменной состояния в момент достижения установившегося режима:

$$x_{stat.fix} := x(t_{stat.fix}) = 0.95$$

3.5.5 Массив ординат точки достижения установившегося режима:

$$z_{st} := \begin{pmatrix} x_{stat.fix} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5.6 Массив значений абсцисс проекции точки достижения установившегося режима:

$$t_{st} := \begin{pmatrix} t_{stat.fix} \\ t_{stat.fix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.234 \\ 0.234 \end{pmatrix}$$

3.5.2 Верхняя и нижняя границы зоны установившегося режима:

$$x_{st1.max} := x_{stat} = 1 \quad x_{st1.min} := x_{stat} = 1$$

3.5.3 Момент пересечения линии установившегося режима, с:

$$t_{stat1} := tStat2(X, tt, x_{st1.max}, x_{st1.min}) = 1.1$$

3.5.4 Значение переменной состояния в момент достижения установившегося режима:

$$x_{stat1} := x(t_{stat1}) = 1$$

3.5.5 Массив ординат точки достижения установившегося режима:

$$z_{st1} := \begin{pmatrix} x_{stat1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5.6 Массив значений абсцисс проекции точки достижения установившегося режима:

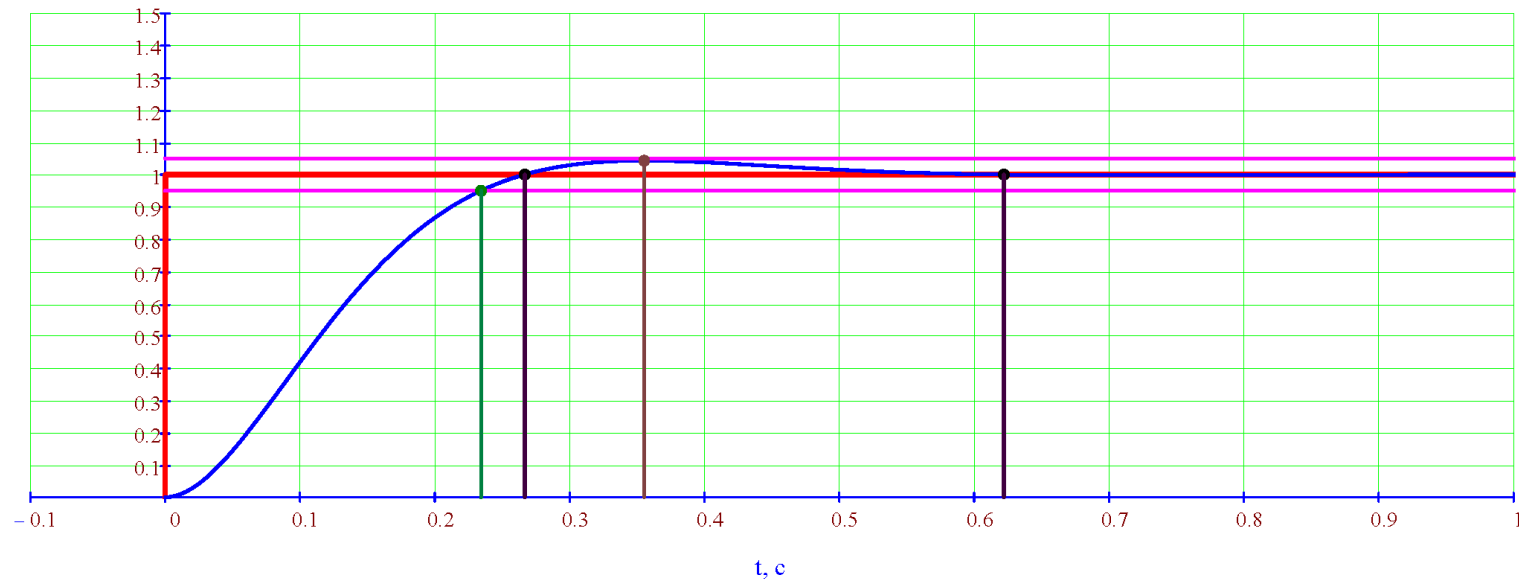
$$t_{st.plus} := \begin{pmatrix} T_{plus_2} \\ T_{plus_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.267 \\ 0.267 \end{pmatrix} \quad t_{st.minus} := \begin{pmatrix} T_{minus_2} \\ T_{minus_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.622 \\ 0.622 \end{pmatrix}$$

$$x_{\max} := \max(X) = 1.043 \quad h := 0 \quad t_{\max} := \text{TmaxFun}(t, X, h) = 0.355 \quad z_{\max.\text{fix}} := \begin{pmatrix} x_{\max} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.043 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_{\max.\text{fix}} := \begin{pmatrix} t_{\max} \\ t_{\max} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.355 \\ 0.355 \end{pmatrix}$$

3.5.7 Цикл для построения проекции точки достижения установившегося режима:

$k := 2..3$ $i := 1..2$



Библиотека процедур

Определение момента окончательного вхождения характеристики
в зону установившегося режима

```
tStat2(x, t, x_max, x_min) :=
  N ← rows(t)
  t_stat ← t_1
  for j ∈ 2..N
    | t_stat ← t_j if x_j ≤ x_min
    | t_stat ← t_j if x_j ≥ x_max
  t_stat
```

Определение времени достижения максимума

```
TmaxFun(t, x, h) :=
  N ← rows(t)
  t_max ← t_1
  x_max ← max(x)
  for j ∈ 1..N
    if x_j ≥ x_max - h
      | t_max ← t_j
      | break
  t_max
```

Определение моментов пересечения характеристикой установившегося значения
для нахождения периода колебаний

```
Period(x, t, x_0) :=
  N ← rows(t)
  t_stat_1 ← t_1
  k ← 1
  i ← 1
  for j ∈ 2..N - 1
    if [(x_j - x_0) > 0] ∧ [(x_{j-1} - x_0) < 0]
      | k ← k + 1
      | t_plus_k ← t_j
    if x_j - x_0 < 0 ∧ x_{j-1} - x_0 > 0
      | i ← i + 1
      | t_minus_i ← t_j
  N_minus ← rows(t_minus)
  N_plus ← rows(t_plus)
  n ← N_minus
  n ← N_plus if N_minus > N_plus
  for j ∈ 1..n
    | T_{j,1} ← t_plus_j
    | T_{j,2} ← t_minus_j
  T
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Модуль формирования математического описания двигателя постоянного тока в MathCAD14

Цель и задачи работы

Цель работы: Изучение понятия "математическое описание" и "математическая модель" на примере двигателя постоянного тока (ДПТ).

Задачи работы - после выполнения работы обучающийся должен:

- 1 Знать общие принципы получения математического описания и математической модели технических объектов.
- 2 Уметь составлять математическое описание и получать из него математическую модель технического объекта.
- 3 Владеть навыками использования программы MathCAD для составления математического описания и получения из него математической модели в форме системы дифференциальных уравнений на примере ДПТ.

Порядок выполнения работы:

- 1 В соответствии с образцом дописать все недостающие фрагменты программы.
- 2 Изучить работу программы и проанализировать получаемые результаты с точки зрения их формы и содержания отдельных составляющих.

1 Теоретическая часть

1.1 Математическое описание и математическая модель в форме дифференциальных уравнений в общем виде

Математическое описание - это **неупорядоченный набор** математических выражений на основе законов природы и математических соотношений.

Математическая модель - это **упорядоченный набор** математических выражений с выделением:

- 1) входных переменных;
- 2) выходных переменных;
- 3) внутренних переменных (переменных состояния);
- 4) параметров (коэффициентов, степеней и т. п.).

Из одного и того же математического описания можно получить разные математические модели - в зависимости от того, что считать входными, выходными, внутренними переменными и параметрами. Математические модели могут быть записаны различным образом. Существуют универсальные формы записи математических моделей, к которым можно привести модели большинства технических объектов, описываемых дифференциальными и алгебраическими уравнениями - в форме переменных состояния.

Общий вид математической модели в форме дифференциальных уравнений (линейных и нелинейных):

Дифференциальные уравнения переменных состояния:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_{x,1}(t; x_1, \dots, x_n; A; u_1, \dots, u_m; B); \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_{x,2}(t; x_1, \dots, x_n; A; u_1, \dots, u_m; B); \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_{x,n}(t; x_1, \dots, x_n; A; u_1, \dots, u_m; B). \end{aligned}$$

Алгебраические уравнения выходных переменных:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_{y,1}(x_1, \dots, x_n; C; u_1, \dots, u_m; D); \\ y_2 &= f_{y,2}(x_1, \dots, x_n; C; u_1, \dots, u_m; D); \\ &\dots \\ y_r &= f_{y,r}(x_1, \dots, x_n; C; u_1, \dots, u_m; D). \end{aligned} \quad \text{п.)}$$

где t - время;
 x - переменные состояния, числом n ;
 u - входные переменные, числом m ;
 y - выходные переменные числом r ;
 A, B, C, D - массивы параметров (постоянных коэффициентов и т.

1.2 Математическая модель двигателя постоянного тока

Двигатель постоянного тока имеет неподвижную часть (индуктор) и подвижную часть (якорь). На якоре имеет обмотка, а индуктор может тоже иметь обмотку или постоянные магниты. Эти электромагниты (или постоянные магниты) создают магнитное поле, с которым взаимодействует ток в якорной обмотке. В результате по закону Ампера создаётся сила, которая и приводит во вращение якорь. Скорость двигателя постоянного тока зависит от напряжения якорной обмотки, т.е. выходной величиной является скорость, а входной - напряжение. В некоторых случаях электропривод предназначен для поворота рабочей машины на некоторый угол - тогда выходной величиной становится угол поворота.

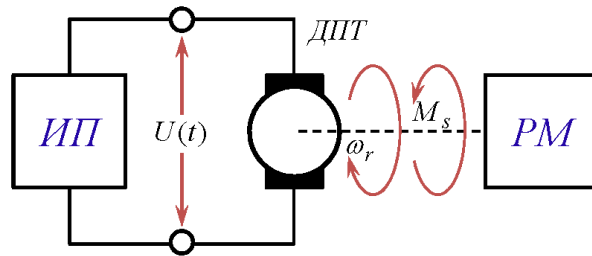


Рисунок 1 - Электропривод с двигателем постоянного тока.

Схема электрическая функциональная

ИП - источник питания, РМ - рабочая машина, ДПТ - двигатель постоянного тока

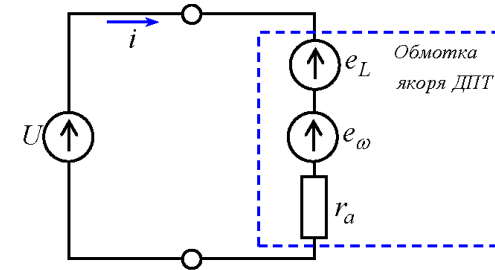


Рисунок 2 - Электропривод с двигателем постоянного тока.

Схема замещения электрическая

Математическая модель ДПТ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{1}{L_a}(-r_a i - c_e \omega_r + U_a); \\ \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{1}{J_\Sigma}(c_M i + M_s); \\ \frac{d\theta_r}{dt} &= \omega_r. \end{aligned} \right\}$$

- i - ток обмотки двигателя;
- ω_r - угловая скорость вала двигателя;
- θ_r - угол поворота вала двигателя;
- L_a - индуктивность обмотки двигателя;
- r_a - сопротивление якорной обмотки двигателя;
- c_e, c_M - параметры двигателя (приводятся в паспортных данных);
- J_Σ - момент инерции всех механических частей, присоединённых к валу двигателя;
- U_a - напряжение питания якорной обмотки от источника питания ИП;
- M_s - момент сопротивления от рабочей машины РМ.

2 Математическое описание двигателя постоянного тока

2.1 Уравнение электрического равновесия (2 закон Кирхгофа):
(сумма напряжений источников питания равна сумме падений напряжения на нагрузке)

$$Q_1 := U_a(t) - e_L - e_\omega = r_a \cdot i(t)$$

2.2 ЭДС вращения (наводится в обмотке якоря, закон электромагнитной индукции Фарадея):

$$Q_2 := e_\omega = c_e \cdot \omega_r(t)$$

2.3 ЭДС индукции (наводится в обмотке якоря, закон электромагнитной индукции Фарадея):

$$Q_3 := e_L = L_a \cdot \frac{d}{dt} i(t)$$

2.4 Уравнение механического равновесия (2 закон Ньютона для вращательного движения):

$$Q_4 := \frac{d}{dt} \omega_r(t) = \frac{1}{J_\Sigma} \cdot (M + M_s(t))$$

2.5 Момент электромагнитный (закон электромеханики):

$$Q_5 := M = c_M \cdot i(t)$$

2.6 Связь между углом поворота и скоростью (математическое соотношение):

$$Q_6 := \frac{d}{dt} \theta_r(t) = \omega_r(t)$$

3 Формирование математического модели в форме системы дифференциальных уравнений

3.1 Уравнение электрического равновесия:

3.1.1 Подстановка математических выражений:

$$q_1 := Q_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{substitute, } Q_2 \\ \text{substitute, } Q_3 \end{array} \right. \rightarrow U_a(t) - L_a \frac{d}{dt} i(t) - c_e \cdot \omega_r(t) = r_a \cdot i(t)$$

3.1.2 Дифференциальное уравнение 1 для производной тока:

$$S_1 := q_1 \text{ solve, } \frac{d}{dt} i(t) \rightarrow -\frac{c_e \cdot \omega_r(t) - U_a(t) + r_a \cdot i(t)}{L_a}$$

3.2 Уравнение механического равновесия:

3.2.1 Подстановка математических выражений:

$$q_4 := Q_4 \left\{ \begin{array}{l} \text{substitute, } Q_5 \\ \text{substitute, } Q_6 \end{array} \right. \rightarrow \frac{d}{dt} \omega_r(t) = \frac{M_s(t) + c_M \cdot i(t)}{J_\Sigma}$$

3.2.2 Дифференциальное уравнение 2 для производной скорости:

$$S_2 := q_4 \text{ solve, } \frac{d}{dt} \omega_r(t) \rightarrow \frac{M_s(t) + c_M \cdot i(t)}{J_\Sigma}$$

3.3 Дифференциальное уравнение 3 для угла поворота:

$$S_3 := Q_6 \text{ solve, } \frac{d}{dt} \theta_r(t) \rightarrow \omega_r(t)$$

3.4 Переменные состояния

$$X := \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \end{pmatrix} \quad S_{dx} := \frac{d}{dt} X \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} i(t) \\ \frac{d}{dt} \omega_r(t) \\ \frac{d}{dt} \theta_r(t) \end{pmatrix}$$

3.5 Уравнения переменных состояния:

$$S_x := S \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{c_e \cdot \omega_r(t) - U_a(t) + r_a \cdot i(t)}{L_a} \\ \frac{M_s(t) + c_M \cdot i(t)}{J_\Sigma} \\ \omega_r(t) \end{pmatrix}$$

3.6 Математическая модель в общем виде в нормальной форме Коши:

$$Q := S_{dx} = S_x \text{ explicit, } S_{dx}, S_x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} i(t) \\ \frac{d}{dt} \omega_r(t) \\ \frac{d}{dt} \theta_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_e \cdot \omega_r(t) - U_a(t) + r_a \cdot i(t)}{L_a} \\ \frac{M_s(t) + c_M \cdot i(t)}{J_\Sigma} \\ \omega_r(t) \end{pmatrix}$$

4 Выводы

Из математического описания 2.1 - 2.6 была получена математическая модель 3.6 в виде системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Эта модель является линейной, так как все её уравнения содержат только линейные функции, в которых все переменные (переменные состояния и входные переменные) умножены на постоянные коэффициенты.

Для выкладок использовались возможности символьного процессора программы MathCAD14.

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Модуль формирования матричной математической модели двигателя постоянного тока в MathCAD14

ORIGIN:= 1

Матричная математическая модель двигателя постоянного тока

Цель и задачи работы

Цель работы: Изучение понятия "матричная математическая модель" на примере двигателя постоянного тока (ДПТ).

Задачи работы - после выполнения работы обучающийся должен:

- 1 Знать общие принципы получения матричных математических моделей линейных технических объектов.
- 2 Уметь преобразовывать математические модели в форме дифференциальных уравнений в матричные математические модели.
- 3 Владеть навыками использования программы MathCAD для преобразования систем линейных дифференциальных уравнений в матричную форму.

Порядок выполнения работы:

- 1 В соответствии с образцом дописать все недостающие фрагменты программы.
- 2 Изучить работу программы и проанализировать получаемые результаты с точки зрения их формы и содержания отдельных составляющих.

Библиотека процедур

Выделение матриц из линейной системы уравнений переменных состояния

```
MElimin2S,Nx,Nu) := N ← rows(S(x,u))
for k ∈ 1..Nu
  uk ← 0
for j ∈ 1..Nx
  for k ∈ 1..Nx
    xk ← 0
  xj ← 1
  for k ∈ 1..N
    Ak,j ← S(x,u)k
for k ∈ 1..Nx
  xk ← 0
for j ∈ 1..Nu
  for k ∈ 1..Nu
    uk ← 0
  uj ← 1
  for k ∈ 1..N
    Bk,j ← S(x,u)k
(A)
(B)
```

1 Теоретическая часть

1.1 Математическое описание и математическая модель в форме дифференциальных уравнений в общем виде

Линейная математическая модель может быть представлена в матричной форме.

Общий вид математической модели в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r,1} & c_{r,2} & \dots & c_{r,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \dots & d_{1,m} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \dots & d_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{r,1} & d_{r,2} & \dots & d_{r,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix},$$

где t - время;
 x - переменные состояния, числом n ;
 u - входные переменные, числом m ;
 y - выходные переменные числом r ;
 A, B, C, D - массивы параметров (постоянных коэффициентов и т. п.).

1.2 Матричная линейная математическая модель

Если уравнения линейные, то их можно представить в матричной форме:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \bar{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \bar{u}(t);$$

$$\bar{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \bar{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \bar{u}(t),$$

где t - время; \mathbf{x} - вектор переменных состояния; \mathbf{u} - вектор входных переменных; \mathbf{y} - вектор выходных переменных; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ - матрицы постоянных коэффициентов.

В приведённой форме модель содержит два матричных уравнения (каждое матричное уравнение содержит несколько обычных уравнений): первое матричное уравнение называется уравнением состояния, второе - уравнением выхода.

Уравнение состояния является матричным обыкновенным дифференциальным уравнением, уравнение выхода - матричным алгебраическим уравнением.

Матричное дифференциальное уравнение состояния записано в нормальной форме (форме Коши), когда слева располагаются первые производные переменных состояния, а справа - алгебраические выражения (производные отсутствуют).

Переменные состояния - это те переменные, которые присутствуют в математических выражениях под знаком производных. Т. е. обязательным свойством переменной состояния является наличие её производной, которую можно будет записать в левой части уравнения состояния.

Выходные переменные - это те переменные, поведение которых интересует исследователя. В качестве выходных переменных могут быть приняты некоторые переменные состояния, но в общем случае это могут быть и другие переменные, которые рассчитываются через переменные состояния и входные переменные. Поэтому появляется второе уравнение - уравнение выхода. Математическое описание и математическая модель в форме переменных состояния рассматриваются на примере электрического двигателя постоянного тока.

1.3 Математическая модель двигателя постоянного тока

Двигатель постоянного тока имеет неподвижную часть (индуктор) и подвижную часть (якорь). На якоре имеет обмотка, а индуктор может тоже иметь обмотку или постоянные магниты. Эти электромагниты (или постоянные магниты) создают магнитное поле, с которым взаимодействует ток в якорной обмотке. В результате по закону Ампера создаётся сила, которая и приводит в вращение якорь. Скорость двигателя постоянного тока зависит от напряжения якорной обмотки, т.е. выходной величиной является скорость, а входной - напряжение. В некоторых случаях электропривод предназначен для поворота рабочей машины на некоторый угол - тогда выходной величиной становится угол поворота.

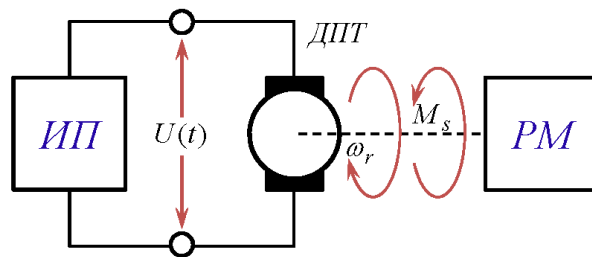


Рисунок 1 - Электропривод с двигателем постоянного тока.

Схема электрическая функциональная

ИП - источник питания, РМ - рабочая машина, ДПТ - двигатель постоянного тока

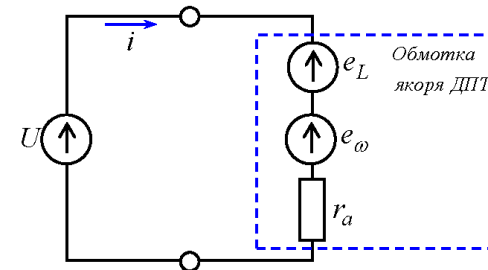


Рисунок 2 - Электропривод с двигателем постоянного тока.

Схема замещения электрическая

Математическая модель ДПТ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{1}{L_a} (-r_a i - c_e \omega_r + U_a); \\ \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{1}{J_\Sigma} (c_M i + M_s); \\ \frac{d\theta_r}{dt} &= \omega_r. \end{aligned} \right\}$$

i - ток обмотки двигателя;

ω_r - угловая скорость вала двигателя;

θ_r - угол поворота вала двигателя;

L_a - индуктивность обмотки двигателя;

r_a - сопротивление якорной обмотки двигателя;

c_e, c_M - параметры двигателя (приводятся в паспортных данных);

J_Σ - момент инерции всех механических частей, присоединённых к валу двигателя;

U_a - напряжение питания якорной обмотки от источника питания ИП;

M_s - момент сопротивления от рабочей машины РМ.

2 Математическая модель двигателя постоянного тока в форме системы дифференциальных уравнений

2.1 Переменные состояния:

$$X := \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \end{pmatrix} \quad S_{dx} := \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} i(t) \\ \frac{d}{dt} \omega_r(t) \\ \frac{d}{dt} \theta_r(t) \end{pmatrix}$$

2.2 Уравнения переменных состояния:

$$S_x := \begin{pmatrix} \frac{c_e \cdot \omega_r(t) - U_a(t) + r_a \cdot i(t)}{L_a} \\ \frac{M_s(t) + c_M \cdot i(t)}{J_\Sigma} \\ \omega_r(t) \end{pmatrix}$$

2.3 Математическая модель в общем виде в нормальной форме Коши:

$$Q := S_{dx} = S_x \text{ explicit}, S_{dx}, S_x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} i(t) \\ \frac{d}{dt} \omega_r(t) \\ \frac{d}{dt} \theta_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_e \cdot \omega_r(t) - U_a(t) + r_a \cdot i(t)}{L_a} \\ \frac{M_s(t) + c_M \cdot i(t)}{J_\Sigma} \\ \omega_r(t) \end{pmatrix}$$

3 Матричное уравнение состояния

3.1 Подготовка выражений для автоматического формирования матриц

3.1.1 Выбор переменных состояния (обозначение - x , только те, что находятся под знаком производной):

$$Xf := \begin{pmatrix} i(t) = x_1 \\ \omega_r(t) = x_2 \\ \theta_r(t) = x_3 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Выбор входных переменных (обозначение - u , могут быть разные):

$$U := \begin{pmatrix} U_a \\ M_s \end{pmatrix}$$

$$Uf := \begin{pmatrix} U_a = u_1 \\ M_s = u_2 \end{pmatrix}$$

3.1.3 Правая часть системы дифференциальных уравнений как функция переменных состояния и входных переменных:

$$S(x, u) := S_x \begin{pmatrix} \text{substitute, Xf}_1 \\ \text{substitute, Xf}_2 \\ \text{substitute, Xf}_3 \\ \text{substitute, Uf}_1 \\ \text{substitute, Uf}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{c_e \cdot x_2 - u_1(t) + r_a \cdot x_1}{L_a} \\ \frac{u_2(t) + c_M \cdot x_1}{J_\Sigma} \\ x_2 \end{pmatrix}$$

3.2 Размерность векторов:

3.2.1 Размерность вектора переменных состояния

$$N_x := \text{rows}(X) \rightarrow 3$$

3.2.2 Размерность вектора входных переменных:

$$N_u := \text{rows}(U) \rightarrow 2$$

3.3 Формирование матриц A и B:

$$Sis := \text{MElimin2}(S, N_x, N_u)$$

3.3.1 Выделение матрицы A:

$$A := Sis_1 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{r_a}{L_a} & \frac{c_e}{L_a} & 0 \\ \frac{c_M}{J_\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Выделение матрицы B:

$$B := Sis_2 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_\Sigma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Матричное уравнение выхода

4.1 В качестве выходных переменных выбираются переменные состояния и момент двигателя:

$$Y := \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \\ M(t) \end{pmatrix} \quad Xf := \begin{pmatrix} i(t) = x_1 \\ \omega_r(t) = x_2 \\ \theta_r(t) = x_3 \end{pmatrix}$$

4.2 В качестве входных переменных выбираются напряжение и момент сопротивления:

$$U := \begin{pmatrix} U_a(t) \\ M_s(t) \end{pmatrix} \quad Uf := \begin{pmatrix} U_a(t) = u_1 \\ M_s(t) = u_2 \end{pmatrix}$$

4.3 Уравнения выхода: ток, скорость, угол поворота, момент двигателя через ток:

$$S_y := \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \\ c_M \cdot i(t) \end{pmatrix}$$

4.4 Правая часть системы дифференциальных уравнений как функция переменных состояния и входных переменных:

$$S(x, u) := S_y \begin{matrix} \text{substitute, Xf}_1 \\ \text{substitute, Xf}_2 \\ \text{substitute, Xf}_3 \\ \text{substitute, Uf}_1 \\ \text{substitute, Uf}_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ c_M \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

4.5 Размерность векторов:

4.5.1 Размерность вектора переменных состояния:

$$N_x := \text{rows}(X) \rightarrow 3$$

4.5.2 Размерность вектора входных переменных:

$$N_u := \text{rows}(U) \rightarrow 2$$

4.6 Формирование матриц A и B:

$$\text{Matr} := \text{MElimin2}(S, N_x, N_u)$$

4.6.1 Выделение матрицы C:

$$C := \text{Matr}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c_M & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.6.2 Выделение матрицы D:

$$D := \text{Matr}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Примечание 4.1: появились новые выходные переменные, отличные от переменных

Примечание 4.2: на выходные переменные влияет только напряжение питания,

состояния, поэтому появились соответствующие коэффициенты.

поэтому появился коэффициент (в предыдущем варианте везде были нули).

5 Результат

5.1 Матричное уравнение состояния (раздел 3):

$$\frac{d}{dt} \cdot X = A \cdot X + B \cdot U \text{ explicit, } X, U, A, B \rightarrow \frac{d}{dt} \cdot \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r_a}{L_a} & -\frac{c_e}{L_a} & 0 \\ c_M & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_\Sigma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_a(t) \\ M_s(t) \end{pmatrix}$$

5.2 Матричное уравнение выхода (раздел 4):

$$Y = C \cdot X + D \cdot U \text{ explicit, } Y, X, U, C, D \rightarrow \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \\ M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c_M & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_a(t) \\ M_s(t) \end{pmatrix}$$

6 Выводы

Из математического описания была получена математическая модель в виде системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши.

Эта модель является линейной, так как все её уравнения содержат только линейные функции, в которых все переменные (переменные состояния и входные переменные) умножены на постоянные коэффициенты.

Из этой модели в виде системы дифференциальных уравнений получена модель в матричном виде.

Для выкладок использовались возможности символьного процессора программы MathCAD14, в том числе - процедура выделения матриц из линейной системы дифференциальных уравнений.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Модуль формирования передаточной функции двигателя постоянного тока в MathCAD14

Передаточные функции двигателя постоянного тока

Цель и задачи работы

Цель работы: Изучение понятия "передачная функций" и общей методики её получения из системы дифференциальных уравнений на примере двигателя постоянного тока (ДПТ).

Задачи работы:

- 1 Знать общие принципы получения передаточных функций технических объектов.
- 2 Освоить умение получать передаточные функции технических объектов на примере двигателя постоянного тока
- 3 Сформировать навыки использования программы MathCAD для получения передаточных функций технических объектов.

Порядок выполнения работы:

- 1 В соответствии с образцом дописать все недостающие фрагменты программы.
- 2 Изучить работу программы и проанализировать получаемые результаты при изменении частных передаточных функций.

1 Теоретическая часть

1.1 Общее представление о передаточных функциях

Передачная функция является специфической формой представления дифференциальных уравнений, получаемую в результате применения к ним преобразования Лапласа. В результате дифференциальные уравнения заменяются на алгебраические уравнений, а переменная "время" заменяется на переменную "оператор Лапласа". Говорят, что получают "уравнения в операторной форме".

Операции с алгебраическими уравнениями существенно проще, чем с дифференциальными уравнениями.

Поэтому, чтобы решать разнообразные задачи с математической моделью объекта (записанной в форме дифференциальных уравнений во временной области), её преобразуют по Лапласу, получают передаточные функции, выполняют все необходимые операции, а затем с помощью обратного преобразования Лапласа переходят снова к выражениям во временной области.

Таким образом, уравнения в операторной форме (в частности, передаточные функции) необходимы для упрощения промежуточных преобразований.

Исходная математическая модель в матричной форме:

Дифференциальные уравнения переменных состояния

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \bar{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \bar{u}(t)$$

Алгебраические уравнения выходных переменных:

$$\bar{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \bar{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \bar{u}(t)$$

где t - время,
 x - переменные состояния, числом n ;
 u - входные переменные, числом m ;
 y - выходные переменные числом r ;
 A, B, C, D - массивы параметров (постоянных коэффициентов и т. п.).

1.2 Переход от уравнений в переменных состояния к передаточным функциям

1.2.1 Исходные матричные уравнения (зависимость переменных от времени):

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}}(t)$$
$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{u}}(t)$$

где t - время, \mathbf{x} - вектор переменных состояния, \mathbf{u} - вектор входных переменных; \mathbf{y} - вектор выходных переменных; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} - матрицы постоянных коэффициентов.

1.2.2 Преобразование по Лапласу - переменная t заменяется на оператор Лапласа s , знак производной - умножением на оператор Лапласа s :

$$s \cdot \bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}}(s)$$
$$\bar{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{u}}(s)$$

1.2.3 Последовательное преобразование уравнения состояния с целью получить зависимость вектора переменных состояния $\bar{\mathbf{x}}(s)$ от вектора входных переменных $\bar{\mathbf{u}}(s)$ (\mathbf{E} - единичная матрица):

$$s \cdot \bar{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}}(s)$$
$$[s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}] \cdot \bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}}(s)$$
$$\bar{\mathbf{x}}(s) = [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}}(s)$$
$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{W}_x(s) \cdot \bar{\mathbf{u}}(s)$$

1.2.4 Матричная передаточная функция для переменных состояния:

$$\mathbf{W}_x(s) = [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}$$

1.2.5 Последовательное преобразование уравнения выхода с целью получить зависимость вектора выходных переменных $\bar{\mathbf{y}}(s)$ от вектора входных переменных $\bar{\mathbf{u}}(s)$ (\mathbf{E} - единичная матрица):

$$\bar{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C} \cdot [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{u}}(s)$$
$$\bar{\mathbf{y}}(s) = [\mathbf{C} \cdot [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \cdot \bar{\mathbf{u}}(s)$$
$$\bar{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{W}_y(s) \cdot \bar{\mathbf{u}}(s)$$

1.2.6 Матричная передаточная функция для выходных переменных:

$$\mathbf{W}_y(s) = \mathbf{C} \cdot [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

2 Исходные выражения для математической модели двигателя постоянного тока в матричной форме (зависимость от времени)

2.1 Вектор переменных состояния:	$x(t) := \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \end{pmatrix}$	2.2 Имена переменных состояния:	$\text{nom}_x := \begin{pmatrix} \text{"ток"} \\ \text{"скорость"} \\ \text{"угол поворота"} \end{pmatrix}$	
2.3 Вектор входных переменных:	$u(t) := \begin{pmatrix} U(t) \\ M_s(t) \end{pmatrix}$	2.4 Имена входных переменных:	$\text{nom}_u := \begin{pmatrix} \text{"напряжение"} \\ \text{"момент"} \end{pmatrix}$	
2.5 Вектор выходных переменных:	$y(t) := \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \\ M(s) \end{pmatrix}$	2.6 Имена выходных переменных:	$\text{nom}_y := \begin{pmatrix} \text{"ток"} \\ \text{"скорость"} \\ \text{"угол поворота"} \\ \text{"момент двигателя"} \end{pmatrix}$	
2.7 Матрицы:	$A := \begin{pmatrix} -\frac{r}{L} & \frac{c_e}{L} & 0 \\ \frac{c_M}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$B := \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_M & 0 & 0 \\ 0 & -c_e & 0 \end{pmatrix}$	$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

i - ток обмотки двигателя; ω_r - угловая скорость вала двигателя; θ_r - угол поворота вала двигателя; L_a - индуктивность обмотки двигателя; r_a - сопротивление якорной обмотки двигателя; c_e , c_M - параметры двигателя (приводятся в паспортных данных); J_Σ - момент инерции всех механических частей, присоединённых к валу двигателя; U_a - напряжение питания якорной обмотки от источника питания ИП; M_s - момент сопротивления от рабочей машины РМ.

3 Математическая модель двигателя постоянного тока в матричной форме (зависимость от времени)

3.1 Матричное уравнение состояния:	$\frac{d}{dt} \cdot x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \text{ explicit, } x, u, A, B \rightarrow \frac{d}{dt} \cdot \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r}{L} & \frac{c_e}{L} & 0 \\ \frac{c_M}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U(t) \\ M_s(t) \end{pmatrix}$
3.2 Уравнение выхода:	$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \text{ explicit, } y, x, u, C, D \rightarrow \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \\ M(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_M & 0 & 0 \\ 0 & -c_e & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega_r(t) \\ \theta_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U(t) \\ M_s(t) \end{pmatrix}$

4 Применение преобразования Лапласа к переменным и уравнениям (введение оператора Лапласа s)

4.1 Вектор переменных состояния:

$$x := x(t) \text{ substitute, } t = s \rightarrow \begin{pmatrix} i(s) \\ \omega_r(s) \\ \theta_r(s) \end{pmatrix}$$

4.2 Вектор переменных входа:

$$u := u(t) \text{ substitute, } t = s \rightarrow \begin{pmatrix} U(s) \\ M_s(s) \end{pmatrix}$$

4.3 Вектор переменных выхода:

$$y := y(t) \text{ substitute, } t = s \rightarrow \begin{pmatrix} i(s) \\ \omega_r(s) \\ \theta_r(s) \\ M(s) \end{pmatrix}$$

4.4 Уравнение состояния:

$$s \cdot x = A \cdot x + B \cdot u \text{ explicit, } x, u, A, B \rightarrow s \cdot \begin{pmatrix} i(s) \\ \omega_r(s) \\ \theta_r(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r}{L} & -\frac{c_e}{L} & 0 \\ \frac{c_M}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i(s) \\ \omega_r(s) \\ \theta_r(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U(s) \\ M_s(s) \end{pmatrix}$$

4.5 Уравнение выхода:

$$y = C \cdot x + D \cdot u \text{ explicit, } y, x, u, C, D \rightarrow \begin{pmatrix} i(s) \\ \omega_r(s) \\ \theta_r(s) \\ M(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_M & 0 & 0 \\ 0 & -c_e & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i(s) \\ \omega_r(s) \\ \theta_r(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U(s) \\ M_s(s) \end{pmatrix}$$

4.6 Единичная матрица:

$$E := \text{identity}(\text{rows}(A)) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Матричная передаточная функция для переменных состояния

5.1 Матричная передаточная функция (зависимость всех переменных состояния от всех входных переменных):

$$\mathbf{W}_x(s) = [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \quad \mathbf{W}_x := (s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{J \cdot s}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & -\frac{J \cdot c_e}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \\ \frac{c_M}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & \frac{J \cdot r + J \cdot L \cdot s}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \\ \frac{c_M}{s \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} & \frac{J \cdot r + J \cdot L \cdot s}{J_a \cdot s \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \end{bmatrix}$$

5.2 Выбор сочетания переменной состояния и входной переменной:

выход (от 1 до 3):

$j := 3$

$\text{nom}_{x_j} \rightarrow$ "угол поворота"

вход (от 1 до 2):

$k := 1$

$\text{nom}_{u_k} \rightarrow$ "напряжение"

5.3 Частная передаточная функция:

$$\frac{x_j}{u_k} = W_{x_j, k} \rightarrow \frac{\theta_r(s)}{U(s)} = \frac{c_M}{s \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)}$$

5.4 Операторное выражение:

$$x_j = W_{x_j, 1} \cdot U(s) + W_{x_j, 2} \cdot M_s(s) \rightarrow \theta_r(s) = \frac{c_M \cdot U(s)}{s \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} + \frac{M_s(s) \cdot (J \cdot r + J \cdot L \cdot s)}{J_a \cdot s \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)}$$

6 Матричная передаточная функция для выходных переменных

6.1 Матричная передаточная функция (зависимость всех выходных переменных от всех входных переменных):

$$\mathbf{W}_y(s) = \mathbf{C} \cdot [s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad \mathbf{W}_y := \mathbf{C} \cdot (s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{J \cdot s}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & -\frac{J \cdot c_e}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \\ \frac{c_M}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & \frac{J \cdot r + J \cdot L \cdot s}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \\ \frac{J \cdot c_M \cdot s}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & -\frac{J \cdot c_M \cdot c_e}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \\ 1 - \frac{c_M \cdot c_e}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & -\frac{c_e \cdot (J \cdot r + J \cdot L \cdot s)}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \end{bmatrix}$$

6.2 Выбор сочетания переменной состояния и входной переменной:

выход (от 1 до 4):

$j := 2$

$\text{nom}_{y_j} = \text{"скорость"}$

вход (от 1 до 2):

$k := 1$

$\text{nom}_{u_k} = \text{"напряжение"}$

6.3 Частная передаточная функция:

$$\frac{y_j}{u_k} = W_{y_j, k} \rightarrow \frac{\omega_r(s)}{U(s)} = \frac{c_M}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e}$$

6.4 Операторное выражение:

$$y_j = W_{y_j, 1} \cdot U(s) + W_{y_j, 2} \cdot M_s(s) \rightarrow \omega_r(s) = \frac{c_M \cdot U(s)}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} + \frac{M_s(s) \cdot (J \cdot r + J \cdot L \cdot s)}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)}$$

Выводы

Математическая модель двигателя постоянного тока преобразована по Лапласу путём замены переменной t на оператор Лапласа s . В результате получена модель "в операторной форме".

По известным выражениям из этой модели получены передаточные функции для переменных состояния и выходных переменных.

Каждая передаточная функция имеет один вход и один выход. В данном случае получены матрицы передаточных функций - с несколькими входами и несколькими выходами.

Матрица передаточных функций называется матричной передаточной функцией.

Элементами этих матриц являются обычные (частные) передаточные функции с одним входом и одним выходом.

В обоих случаях входами являются входные переменные.

Выходные переменные - разные:

1) для передаточной функции переменных состояния выходами являются переменные состояния.

2) для передаточной функции выходных переменных выходами являются выходные переменные.

Чтобы выделить такие обычные (частные) передаточные функции следует задать номер строки (это будет номер выхода) и номер столбца (это будет номер входа).

У всех частных передаточных функций в обеих матрицах числители - одинаковые. Числители называются характеристическими полиномами, так как они в значительной степени характеризуют поведение объекта (в данном случае двигателя постоянного тока).

ПРИЛОЖЕНИЕ И

Модуль разложения передаточной функции на типовые динамические звенья в MathCAD14

Типовые динамические звенья передаточных функций двигателя постоянного тока

Цель и задачи работы

Цель работы: Изучение понятия "типовое динамическое звено" передаточной функции и общей методики их получения из передаточной функции на примере двигателя постоянного тока (ДПТ).

Задачи работы:

- 1 Знать общие принципы получения типовых динамических звеньев передаточных функций технических объектов.
- 2 Освоить умение разлагать на типовые динамические звенья передаточные функции технических объектов на примере двигателя постоянного тока.
- 3 Сформировать навыки использования программы MathCAD для разложения передаточных функций технических объектов на типовые динамические звенья.

Порядок выполнения работы:

- 1 В соответствии с образцом дописать все недостающие фрагменты программы.
- 2 Изучить работу программы и проанализировать получаемые результаты при изменении частных передаточных функций.

1 Теоретическая часть

1.1 Общее представление о типовых динамических звеньях

Передаточная функция является специфической формой представления дифференциальных уравнений, получаемую в результате применения к ним **преобразования Лапласа**.

Передаточные функции имеют полиномы в числителе и знаменателе. Для каждого полинома можно определить корни. Они бывают следующих типов:

- 1) вещественные корни;
- 2) пары комплексных корней;
- 3) пары мнимых корней;
- 4) нулевые корни (полином не содержит свободную составляющую);
- 5) отсутствие корней (когда полином представлен только коэффициентом усиления).

Каждому типу полиномов можно сопоставить свой полином от 0 до 2 степени. Это будет разложение полинома на частные полиномы.

Каждый полином можно представить в специальной форме - форме типового динамического звена.

Звено первого порядка: $T \cdot s + 1$

Звено второго порядка: $T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1$

Звено нулевого порядка: s

Звено усильтельное: k

$$TZ1(v) := \begin{array}{l} K \leftarrow v_1 \\ T \leftarrow \frac{v_2}{v_1} \\ z \leftarrow \begin{pmatrix} K \\ T \end{pmatrix} \\ z \end{array}$$

$$TZ2(v) := \begin{array}{l} K \leftarrow v_1 \\ T \leftarrow \sqrt{\frac{v_3}{v_1}} \\ \xi \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{v_2}{\sqrt{v_3 \cdot v_1}} \\ z \leftarrow \begin{pmatrix} K \\ T \\ \xi \end{pmatrix} \\ z \end{array}$$

2 Исходные выражения для математической модели двигателя постоянного тока в матричной форме

2.1 Вектор переменных состояния:

$$x := \begin{pmatrix} i(s) \\ \omega_r(s) \\ \theta_r(s) \end{pmatrix}$$

2.3 Вектор входных переменных:

$$u := \begin{pmatrix} U(s) \\ M_s(s) \end{pmatrix}$$

2.5 Вектор выходных переменных:

$$y := \begin{pmatrix} i(s) \\ \omega_r(s) \\ \theta_r(s) \\ M(s) \end{pmatrix}$$

2.2 Имена переменных состояния:

$$\text{ном}_x := \begin{pmatrix} \text{"ток"} \\ \text{"скорость"} \\ \text{"угол поворота"} \end{pmatrix}$$

2.4 Имена входных переменных:

$$\text{ном}_u := \begin{pmatrix} \text{"напряжение"} \\ \text{"момент"} \end{pmatrix}$$

2.6 Имена выходных переменных:

$$\text{ном}_y := \begin{pmatrix} \text{"ток"} \\ \text{"скорость"} \\ \text{"угол поворота"} \\ \text{"момент двигателя"} \end{pmatrix}$$

3 Матричные передаточные функции

3.1 Матричная передаточная функция (зависимость всех переменных состояния от всех входных переменных):

$$W_x := \begin{bmatrix} \frac{J \cdot s}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & \frac{J \cdot c_e}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \\ \frac{c_M}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & \frac{J \cdot r + J \cdot L \cdot s}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \\ \frac{c_M}{s \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} & \frac{J \cdot r + J \cdot L \cdot s}{J_a \cdot s \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \end{bmatrix}$$

3.2 Матричная передаточная функция (зависимость всех выходных переменных от всех входных переменных):

$$W_y := \begin{bmatrix} \frac{J \cdot s}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & \frac{J \cdot c_e}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \\ \frac{c_M}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & \frac{J \cdot r + J \cdot L \cdot s}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \\ \frac{J \cdot c_M \cdot s}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & \frac{J \cdot c_M \cdot c_e}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \\ 1 - \frac{c_M \cdot c_e}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e} & \frac{c_e \cdot (J \cdot r + J \cdot L \cdot s)}{J_a \cdot (J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e)} \end{bmatrix}$$

i - ток обмотки двигателя; ω_r - угловая скорость вала двигателя; θ_r - угол поворота вала двигателя; J_a - индуктивность обмотки двигателя; r_a - сопротивление якорной обмотки двигателя; c_e , c_M - параметры двигателя (приведены в паспортных данных); J_Σ - момент инерции всех механических частей, присоединённых к валу двигателя; U_a - напряжение питания якорной обмотки от источника питания *ИП*; M_s - момент сопротивления от рабочей машины *РМ*.

4 Нахождение корней полинома знаменателя для последующего разложения на типовые динамические звенья

4.1 Выбор передаточной функции ДПТ для скорости и напряжения питания: 1 - для переменных состояния
2 - для переменных состояния

$$n := 2 \quad W := \begin{cases} W_x & \text{if } n = 1 \\ W_y & \text{if } n = 2 \end{cases}$$

4.2 Частная передаточная функция ДПТ:

$$j := 2 \quad k := 1$$

$$W_{DPT} := W_{j,k} \rightarrow \frac{c_M}{J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e}$$

4.3 Полином числителя ДПТ:

$$G := \text{numer}(W_{DPT}) \rightarrow c_M$$

4.4 Полином знаменателя ДПТ:

$$H_{DPT} := \text{denom}(W_{DPT}) \rightarrow J \cdot L \cdot s^2 + J \cdot r \cdot s + c_M \cdot c_e$$

4.5 Коэффициенты полинома знаменателя ДПТ:

$$k_h := H_{DPT} \text{ coeffs, } s \rightarrow \begin{pmatrix} c_M \cdot c_e \\ J \cdot r \\ J \cdot L \end{pmatrix}$$

4.6 Нормирование полинома знаменателя ДПТ:

$$k_H := \frac{k_h}{k_{h1}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{J \cdot r}{c_M \cdot c_e} \\ \frac{J \cdot L}{c_M \cdot c_e} \end{pmatrix}$$

4.7 Нормирование полинома числителя ДПТ:

$$g_1 := \frac{G}{k_{h1}} \rightarrow \frac{1}{c_e}$$

4.8 Передаточная функция в общем виде:

$$W_Z := \frac{g_1}{h_3 \cdot s^2 + h_2 \cdot s + h_1}$$

4.9 Полином знаменателя в общем виде:

$$H_Z := \text{denom}(W_Z) \rightarrow c_e \cdot (h_3 \cdot s^2 + h_2 \cdot s + h_1)$$

4.10 Корни полинома знаменателя (полосы) в общем виде:

$$s_h := H_Z \left| \begin{array}{l} \text{solve, s} \\ \text{substitute, } h_1 = 1 \end{array} \right. \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{(h_2)^2 - 4 \cdot h_3 - h_2}}{2 \cdot h_3} \\ \frac{h_2 + \sqrt{(h_2)^2 - 4 \cdot h_3}}{2 \cdot h_3} \end{array} \right]$$

4.11 Коэффициенты полинома знаменателя через параметры ДПТ:

$$h := kH \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{J \cdot r}{c_M \cdot c_e} \\ \frac{J \cdot L}{c_M \cdot c_e} \end{pmatrix}$$

4.12 Корни полинома знаменателя в общем виде для последующей подстановки параметров ДПТ:

$$s_h := s_h \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{(h_2)^2 - 4 \cdot h_3 - h_2}}{2 \cdot h_3} \\ \frac{h_2 + \sqrt{(h_2)^2 - 4 \cdot h_3}}{2 \cdot h_3} \end{array} \right]$$

4.13 Корни полинома знаменателя через параметры ДПТ:

$$s_{DPT} := s_h \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume, } c_e > 0 \\ \text{assume, } c_M > 0 \end{array} \right. \rightarrow \left(\begin{array}{c} \frac{\sqrt{J^2 \cdot r^2 - 4 \cdot J \cdot L \cdot c_M \cdot c_e - J \cdot r}}{2 \cdot J \cdot L} \\ \frac{\sqrt{J^2 \cdot r^2 - 4 \cdot J \cdot L \cdot c_M \cdot c_e + J \cdot r}}{2 \cdot J \cdot L} \end{array} \right)$$

5 Определение типа типового динамического звена в зависимости от типа корней полинома

5.1 Корни вещественные

5.1.1 Вид типовых динамических звеньев при вещественных корнях полинома:

$$W_{\text{Тип}} = \frac{k}{s \cdot (T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}$$

5.1.2 Постоянные времени:

$$T_1 := \frac{-1}{s_{\text{DPT}_1}} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume, } c_e > 0 \\ \text{assume, } c_M > 0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{\sqrt{J^2 \cdot r^2 - 4 \cdot J \cdot L \cdot c_M \cdot c_e} + J \cdot r}{2 \cdot c_M \cdot c_e}$$

$$T_2 := \frac{-1}{s_{\text{DPT}_2}} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume, } c_e > 0 \\ \text{assume, } c_M > 0 \end{array} \right. \rightarrow -\frac{\sqrt{J^2 \cdot r^2 - 4 \cdot J \cdot L \cdot c_M \cdot c_e} - J \cdot r}{2 \cdot c_M \cdot c_e}$$

5.1.3 Коэффициент усиления:

$$k := \frac{\xi_1}{s_{\text{DPT}_1} \cdot s_{\text{DPT}_2}} \text{ simplify} \rightarrow \frac{J \cdot L}{c_M \cdot c_e^2}$$

5.2 Корни комплексно-сопряжённые

5.2.1 Вид типовых динамических звеньев при вещественных корнях полинома:

$$W_{\text{Тип}} = \frac{k}{(T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1)}$$

5.2.2 Определение параметров звена второго порядка:

$$\text{Тип} := \text{TZ2}(h)$$

5.2.3 Коэффициент усиления:

$$k := \text{Тип}_1 \rightarrow 1$$

5.2.4 Постоянная времени:

$$T := \text{Тип}_2 \rightarrow \sqrt{\frac{J \cdot L}{c_M \cdot c_e}}$$

5.2.5 Коэффициент затухания:

$$\xi := \text{Тип}_3 \rightarrow \frac{J \cdot r}{2 \cdot c_M \cdot c_e \cdot \sqrt{\frac{J \cdot L}{c_M \cdot c_e}}}$$

5 Числовые значения параметров типовых динамических звеньев

5.1 Номинальные (паспортные) параметры двигателя постоянного тока

5.1.1 Номинальное напряжение, В:

$$U_{\text{nom}} := 29$$

5.1.2 Номинальный ток обмотки, А:

$$I_{\text{nom}} := 0.075$$

5.1.3 Номинальная угловая скорость, рад/с:

$$\omega_{r,\text{nom}} := 942$$

5.1.4 Номинальный момент двигателя, Н.м:

$$M_{\text{nom}} := 0.0005$$

5.1.5 Сопротивление обмотки якоря, Ом:

$$r := 81$$

5.1.6 Индуктивность якорной обмотки L, Гн:

$$L := 0.045$$

5.1.7 Момент инерции J, кг.м:

$$J := 0.0037 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-2}$$

5.1.8 Расчётные параметры ДПП:

$$c_e := \frac{U_{\text{nom}} - r \cdot I_{\text{nom}}}{\omega_{r,\text{nom}}} = 0.024$$

$$c_M := \frac{M_{\text{nom}}}{I_{\text{nom}}} = 6.667 \times 10^{-3}$$

5.2 Числовые значения параметров типовых динамических звеньев

5.2.1 Корни полинома знаменателя:

$$s_{\text{hx}} := s_h \rightarrow \left[\begin{array}{c} c_M \cdot c_e \cdot \left(\frac{J^2 \cdot r^2}{c_M^2 \cdot c_e^2} - \frac{4 \cdot J \cdot L}{c_M \cdot c_e} - \frac{J \cdot r}{c_M \cdot c_e} \right) \\ \hline 2 \cdot J \cdot L \\ c_M \cdot c_e \cdot \left(\frac{J^2 \cdot r^2}{c_M^2 \cdot c_e^2} - \frac{4 \cdot J \cdot L}{c_M \cdot c_e} + \frac{J \cdot r}{c_M \cdot c_e} \right) \\ \hline 2 \cdot J \cdot L \end{array} \right] \quad s_{\text{hx}} = \begin{pmatrix} -900 + 2.989i \times 10^3 \\ -900 - 2.989i \times 10^3 \end{pmatrix}$$

5.2.2 Проверка типа звеньев:

$$\text{TypN} := \begin{cases} 1 & \text{if } \text{Im}(s_{\text{hx}_1}) = 0 \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

5.2.3 Параметры двух звеньев первого порядка:

$$P1 := \begin{pmatrix} k \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{J^2 \cdot r^2 - 4 \cdot J \cdot L \cdot c_M \cdot c_e} + J \cdot r}{2 \cdot c_M \cdot c_e} \\ \frac{\sqrt{J^2 \cdot r^2 - 4 \cdot J \cdot L \cdot c_M \cdot c_e} - J \cdot r}{2 \cdot c_M \cdot c_e} \end{pmatrix}$$

5.2.4 Параметры звена второго порядка:

$$P2 := \begin{pmatrix} k \\ T \\ \xi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{\frac{J \cdot L}{c_M \cdot c_e}}}{J \cdot r} \\ \frac{2 \cdot c_M \cdot c_e \cdot \sqrt{\frac{J \cdot L}{c_M \cdot c_e}}}{J \cdot r} \end{pmatrix}$$

5.2.5 Расчёт параметров типовых динамических звеньев в зависимости от их типа:

$$\text{TypZvena} := \begin{cases} \text{"звено первого порядка"} & \text{if TypN} = 1 \\ \text{"звено второго порядка"} & \text{if TypN} = 2 \end{cases}$$

$$\text{TypZvena} = \text{"звено второго порядка"}$$

$$P := \begin{cases} P1 & \text{if TypN} = 1 \\ P2 & \text{if TypN} = 2 \end{cases} \quad P \text{ float,4} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0003203 \\ 0.2883 \end{pmatrix}$$

Выводы

Математическая модель двигателя постоянного тока преобразована по Лапласу путём замены переменной t на оператор Лапласа s . В результате получена модель "в операторной форме" и получены передаточные функции для переменных состояния и выходных переменных.

Каждая передаточная функция имеет один вход и один выход. В данном случае получены матрицы передаточных функций - с несколькими входами и несколькими выходами.

Матрицы передаточных функций называются матричными передаточными функциями.

Элементами этих матриц являются обычные передаточные функции с одним входом и одним выходом.

Передаточные функции можно разложить на типовые динамические звенья путём вычисления корней полиномов.

При наличии чисто вещественных корней получают звенья первого порядка.

При наличии комплексно-сопряжённых корней получают звенья второго порядка.

Программа сама проверяет, какие корни у полинома, и выбирает соответствующие формулы для расчётов.

ПРИЛОЖЕНИЕ К

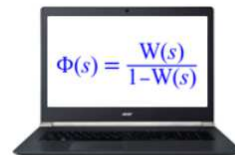
Сведения об использовании материалов диссертации

Курс: Теория управления

Режим редактирования

Общее

С. А. Бронев
Н. А. Никулин
П. В. Авласко
С. Ю. Пичковская
Н. С. Храброва



Теория управления

Институт космических и информационных технологий

Направление подготовки бакалавров:

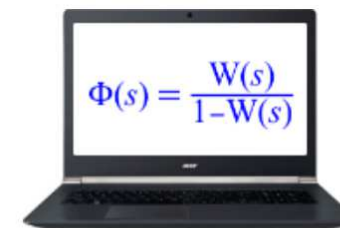
09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Годы набора: **2015, 2016, 2017**



Официальные документы по дисциплине

Теория управления



Личные файлы

- Заставки
- Логотипы

Управление личными файлами...

Навигация

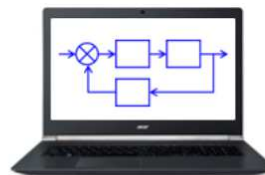
Рисунок К.1 — Титульный лист электронного образовательного курса по учебной дисциплине «Теория управления»

Курс: Автоматизированное проектирование встраиваемых систем

Режим редактирования

Общее

*С. А. Бронов
Н. А. Никулин
П. В. Авласко
С. Ю. Пичковская
Н. С. Храброва*



Автоматизированное проектирование встраиваемых систем

Институт космических и информационных технологий

Направление подготовки бакалавров:
09.03.01 Информатика и вычислительная техника
Годы набора: **2015, 2016, 2017**



Описание курса

Авторы: **Бронов С.А.**, **Никулин Н.А.**, **Авласко П.В.**, **Пичковская С.Ю.**, **Храброва Н.С.**

Институт космических и информационных технологий
Научно-учебная лаборатория систем автоматизированного проектирования
кафедры вычислительной техники

Направление подготовки бакалавриата: **09.03.01 Информатика и вычислительная техника**

Годы набора:

Рисунок К.2 — Титульный лист электронного образовательного курса по учебной дисциплине «Автоматизированное проектирование встраиваемых систем»

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий
институт

Вычислительная техника
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой


_____ О.В.Непомнящий

«19» 06 _____ 2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Комплекс программ для автоматизированного проектирования
динамических объектов

Тема

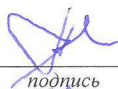
09.04.01 «Информатика и вычислительная техника»

код и наименование направления

09.04.01.02 «Информационное и программное обеспечение САПР»

код и наименование магистерской программы

Научный руководитель


подпись

18.06.18
дата

доц., канд. техн. наук
должность, ученая степень

Д.В.Волков

Выпускник


подпись

18.06.18
дата

Н.С.Храброва

Рецензент


подпись

18.06.18
дата

доц., канд. техн. наук
должность, ученая степень

А.В.Чубарь

Нормоконтролер


подпись

18.06.18
дата

доц., канд. техн. наук
должность, ученая степень

В.И.Иванов

Красноярск 2018