Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2 (2008) 197-209

УДК 532.5

Сравнительный анализ двух моделей движения двухслойной жидкости в приближении Экмана

Лидия А.Компаниец*
Татьяна В.Якубайлик†
Кирилл Ю.Гуревич‡
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 660036, Красноярск, Россия
Людмила В.Гаврилова§
Институт градостроительства, управления и региональной экономики,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 82, Красноярск, 660041, Россия
Екатерина А.Кирилюк¶
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 79, Красноярск, 660041, Россия

Получена 11.02.2008, окончательный вариант 11.03.2008, принята к печати 10.04.2008

Рассматриваются две модели экмановского типа для стационарного ветрового движения двухслойной жидкости, при этом верхний и нижний слои однородны, но имеют разные плотности. Для них найдены аналитические решения в двумерном и трехмерном случаях. В случае 2D считается, что дно неровное, а коэффициенты турбулентного обмена в верхнем и нижнем слоях зависят от глубины. В случае 3D считается, что дно ровное и коэффициенты турбулентного обмена постоянны в каждом слое. Найденные решения могут применяться для оценки положения линии раздела двух слоёв и в качестве тестов при отладке программ расчёта течений двухслойной жидкости.

Ключевые слова: аналитическое решение, стационарное ветровое течение, приближение Экмана, двухслойная жидкость.

Данная работа продолжает исследования, изложенные в [1], в которой для одной модели экмановского типа стационарного ветрового движения жидкости [2, 3] было найдено аналитическое решение. При этом на линии раздела между слоями ставилось условие проскальзывания.

Теперь исследована модель двухслойной жидкости [4], в которой между слоями ставится условие равенства скоростей и напряжения трения. Сравнивают аналитические решения для этих двух моделей.

*e-mail: kla@icm.krasn.ru
†e-mail: tanyakub@torins.ru
‡e-mail: kirill@vikr.ru
§e-mail: lvg@front.ru
¶e-mail: solnwe@list.ru

Известно, что модели экмановского типа для однородной жидкости весьма хорошо описывают изменение по глубине водоема скорости ветрового течения под действием силы Кориолиса в точках акватории, достаточно удаленных от берега [4, 5, 6, 7]. Результатов как теоретических, так и практических для двухслойной жидкости гораздо меньше (усредненные по глубине уравнения двухслойной жидкости рассматривались в статье [8], в статье [9] проводились расчеты по модели, где в верхнем слое скорости считались усредненными по глубине, а в нижнем слое зависели от глубины).

Итак, рассмотрим уравнение стационарного движения двухслойной жидкости в 2-D и 3-D случаях.

2-D случай. Предположим, что: а) верхний и нижний слои однородны, но имеют разные плотности; б) коэффициенты вертикального турбулентного обмена зависят от глубины; в) отклонение свободной поверхности от равновесного положения мало и влияние ветра можно рассматривать на невозмущенной поверхности [10]; г) на дне ставятся условия проскальзывания, а для вертикальной составляющей вектора скорости принимается условие $w^{II}\big|_{z=-H} = -u\partial H/\partial x$.

Тогда для двумерного в вертикальной плоскости движения уравнения, описывающие в линейном приближении стационарные течения в верхнем слое водоема, имеют вид

$$g\frac{\partial \zeta^I}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z^I \frac{\partial u^I}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\int\limits_{-h}^{0} u^I dz = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями на поверхности и между слоями

$$\rho^I K_z^I \frac{\partial u^I}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \tau^w(x), \tag{3}$$

$$\rho^I K_z^I \frac{\partial u^I}{\partial z}\bigg|_{z=-h} = K^{1,2}(u^I - u^{II}). \tag{4}$$

В нижнем слое

$$g\left(1-\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial \zeta^{II}}{\partial x} + g\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial \zeta^I}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z^{II}\frac{\partial u^{II}}{\partial z}\right), \tag{5}$$

$$\int\limits_{-H}^{-h} u^{II} dz = 0, \tag{6}$$

а граничные условия между слоями и на дне таковы:

$$\rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial u^{II}}{\partial z}\bigg|_{z=-h} = K^{1,2}(u^I - u^{II}), \tag{7}$$

$$\rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial u^{II}}{\partial z}\bigg|_{z=-H} = k_b u^{II}. \tag{8}$$

На боковых границах для обоих слоев ставится условие равенства нулю полного потока. Индексы «I» относятся к верхнему, а «II» — к нижнему слою жидкости; $u = u(x, z)$, $w = w(x, z)$ — компоненты вектора скорости течения; g — ускорение свободного падения; $\zeta^I = \zeta^I(x)$ и $\zeta^{II} = \zeta^{II}(x)$ — отклонение поверхности жидкости и линии раздела слоев от их равновесных положений $z = 0$ и $z = -h$ соответственно; $\tau^w(x)$ — напряжение трения ветра; ρ^I и ρ^{II} — постоянные плотности воды; $K_z^I(x, z)$ и $K_z^{II}(x, z)$ — заранее известные коэффициенты вертикального турбулентного обмена; $K^{1,2}$ — коэффициент трения между слоями; k_b — коэффициент придонного трения; $H(x)$ — глубина водоема. Ось z направлена вертикально вверх. Условия (4) и (7) задают закон зависимости трения между слоями от разности скоростей выше и ниже линии раздела слоев. Назовем данную модель *моделью 1.*

Если между слоями ставится условие равенства скоростей и напряжения трения [4], то в соотношениях (2) – (8) формулы (4), (7) переходят в

$$\rho^I K_z^I \frac{\partial u^I}{\partial z}\bigg|_{z=-h} = \rho^{II} K_z^{II} \frac{\partial u^{II}}{\partial z}\bigg|_{z=-h}, \quad u^I\big|_{z=-h} = u^{II}\big|_{z=-h}. \tag{9}$$

Видоизмененную систему уравнений назовем *моделью 2.* Легко видеть, что *модель 2* является предельным случаем *модели 1* при $K^{1,2} \to \infty$.

Проинтегрируем уравнения (1) и (5) по z:

$$K_z^I(x, z)\frac{\partial u^I(x, z)}{\partial z} = \Psi^{1,1}(x)z + \Psi^{1,2}(x), \quad K_z^{II}(x, z)\frac{\partial u^{II}(x, z)}{\partial z} = \Psi^{2,1}(x)z + \Psi^{2,2}(x).$$

Тогда

$$u^I(x, z) = \int\limits_{-h}^{z} \frac{\Psi^{1,1}(x)\eta + \Psi^{1,2}(x)}{K_z^I(x, \eta)} d\eta + \Psi^{1,3}(x), \tag{10}$$

$$u^{II}(x, z) = \int\limits_{-H}^{z} \frac{\Psi^{2,1}(x)\eta + \Psi^{2,2}(x)}{K_z^{II}(x, \eta)} d\eta + \Psi^{2,3}(x). \tag{11}$$

В частности, $u^I(x, z)\big|_{z=-h} = \Psi^{1,3}(x)$,

$$u^{II}(x, z)\big|_{z=-h} = \int\limits_{-H}^{-h} \frac{\Psi^{2,1}(x)\eta + \Psi^{2,2}(x)}{K_z^{II}(x, \eta)} d\eta + \Psi^{2,3}(x) =$$

$$= c_1(x)\Psi^{2,1}(x) + c_2(x)\Psi^{2,2}(x) + \Psi^{2,3}(x),$$

где

$$c_1(x) = \int\limits_{-H}^{-h} \frac{\eta}{K_z^{II}(x, \eta)} d\eta, \quad c_2(x) = \int\limits_{-H}^{-h} \frac{1}{K_z^{II}(x, \eta)} d\eta.$$

Подставляя найденные $u^I(x,z)$ и $u^{II}(x,z)$ в равенства (2) – (6) и вводя обозначения

$$a_1(x) = \int\limits_{-h}^{0} dz \int\limits_{-h}^{z} \frac{\eta}{K_z^I(x,\eta)} d\eta, \quad b_1(x) = \int\limits_{-h}^{0} dz \int\limits_{-h}^{z} \frac{1}{K_z^I(x,\eta)} d\eta,$$

$$a_2(x) = \int\limits_{-H}^{-h} dz \int\limits_{-H}^{z} \frac{\eta}{K_z^{II}(x,\eta)} d\eta, \quad b_2(x) = \int\limits_{-H}^{-h} dz \int\limits_{-H}^{z} \frac{1}{K_z^{II}(x,\eta)} d\eta,$$

получим уравнения

$$a_1(x)\Psi^{1,1}(x) + b_1(x)\Psi^{1,2}(x) + h\Psi^{1,3}(x) = 0, \tag{12}$$

$$a_2(x)\Psi^{2,1}(x) + b_2(x)\Psi^{2,2}(x) + (H-h)\Psi^{2,3}(x) = 0. \tag{13}$$

Граничные условия на поверхности, между слоями и на дне запишем в виде

$$\rho^I \Psi^{1,2}(x) = \tau^w(x), \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\rho^I \left(\Psi^{1,1}(x)(-h) + \Psi^{1,2}(x)\right) = \\ &= K^{1,2} \left(\Psi^{1,3}(x) - c_1(x)\Psi^{2,1}(x) - c_2(x)\Psi^{2,2}(x) - \Psi^{2,3}(x)\right), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\rho^{II} \left(\Psi^{2,1}(x)(-h) + \Psi^{2,2}(x)\right) = \\ &= K^{1,2} \left(\Psi^{1,3}(x) - c_1(x)\Psi^{2,1}(x) - c_2(x)\Psi^{2,2}(x) - \Psi^{2,3}(x)\right), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\rho^{II} \left(-\Psi^{2,1}(x)H + \Psi^{2,2}(x)\right) = k_b \Psi^{2,3}(x). \tag{17}$$

Итак, (12) – (17) представляют собой линейную систему шести уравнений относительно шести неизвестных и позволяют найти решение уравнений (1), (2), (5), (6), которое удовлетворяет граничным условиям (3), (4), (7), (8).

В *модели 2*

$$a_1(x)\Psi^{1,1}(x) + b_1(x)\Psi^{1,2}(x) + h\Psi^{1,3}(x) = 0, \tag{18}$$

$$a_2(x)\Psi^{2,1}(x) + b_2(x)\Psi^{2,2}(x) + (H-h)\Psi^{2,3}(x) = 0. \tag{19}$$

$$\rho^I \Psi^{1,2}(x) = \tau^w(x), \tag{20}$$

$$\rho^I \left(\Psi^{1,1}(x)(-h) + \Psi^{1,2}(x)\right) = \rho^{II} \left(\Psi^{2,1}(x)(-h) + \Psi^{2,2}(x)\right), \tag{21}$$

$$\Psi^{1,3}(x) = \frac{(H-h)^2}{2} \cdot \frac{1}{K_z^{II}} \Psi^{2,1}(x) + \frac{H-h}{K_z^{II}} \Psi^{2,2}(x) + \Psi^{2,3}(x), \tag{22}$$

$$\rho^{II} \left(-\Psi^{2,1}(x)H + \Psi^{2,2}(x)\right) = k_b \Psi^{2,3}(x). \tag{23}$$

Рассмотрим *модель 1*, $K_z^I = const$, $K_z^{II} = const$. Распределение скорости по глубине в первом и втором слоях задается полиномами

$$u^I(x,z) = \frac{\tau^w(x)}{\rho^I K_z^I} \left(\frac{z^2}{2} c_1^I(x) + z c_2^I(x) + c_3^I(x) \right), \tag{24}$$

$$u^{II}(x,z) = \frac{\tau^w(x)}{\rho^{II}K_z^{II}}\left(\frac{z^2}{2}c_1^{II}(x) + zc_2^{II}(x) + c_3^{II}(x)\right). \tag{25}$$

Тогда $C_1^I = 1$ и имеем систему уравнений с пятью неизвестными, решение которой определит необходимые коэффициенты:

$$-\frac{h^3}{6}c_1^I(x) + \frac{h^2}{2}c_2^I(x) - c_3^I(x)h = 0,$$

$$\frac{-h^3+H^3}{6}c_1^{II}(x) + \frac{h^2-H^2}{2}c_2^{II}(x) + c_3^{II}(x)(-h+H) = 0,$$

$$\left(-H - \frac{k_b}{\rho^{II}K_z^{II}}\frac{H^2}{2}\right)c_1^{II}(x) + \left(1 + \frac{k_b}{\rho^{II}K_z^{II}}H\right)c_2^{II}(x) - \frac{k_b}{\rho^{II}K_z^{II}}c_3^{II}(x) = 0,$$

$$-hc_1^I(x) + hc_1^{II}(x) - c_2^{II}(x) = -1,$$

$$\left(h + \frac{K^{1,2}}{\rho^I K_z^I}\frac{h^2}{2}\right)c_1^I(x) + \frac{K^{1,2}}{\rho^I K_z^I}c_3^I(x) - \frac{K^{1,2}}{\rho^{II}K_z^{II}}\frac{h^2}{2}c_1^{II}(x) + \frac{K^{1,2}}{\rho^{II}K_z^{II}}c_2^{II}(x)h-$$

$$-\frac{K^{1,2}}{\rho^{II}K_z^{II}}c_3^{II}(x) = 1 + \frac{K^{1,2}}{\rho^I K_z^I}h.$$

Для *модели 2* получаем следующую систему уравнений:

$$-\frac{h^3}{6}c_1^I(x) + \frac{h^2}{2}c_2^I(x) - c_3^I(x)h = 0,$$

$$\frac{\tau^w(x)}{\rho^{II}K_z^{II}}\left(\frac{-h^3+H^3}{6}c_1^{II}(x) + \frac{h^2-H^2}{2}c_2^{II}(x) + c_3^{II}(x)(-h+H)\right) = 0,$$

$$\left(-H - \frac{k_b}{\rho^{II}K_z^{II}}\frac{H^2}{2}\right)c_1^{II}(x) + \left(1 + \frac{k_b}{\rho^{II}K_z^{II}}H\right)c_2^{II}(x) - \frac{k_b}{\rho^{II}K_z^{II}}c_3^{II}(x) = 0,$$

$$-hc_1^I(x) + hc_1^{II}(x) - c_2^{II}(x) = -1,$$

$$\frac{1}{\rho^I K_z^I}\left(\frac{h^2}{2}c_1^I(x) - hc_2^I(x) + c_3^I(x)\right) = \frac{1}{\rho^{II}K_z^{II}}\left(\frac{h^2}{2}c_1^{II}(x) - hc_2^{II}(x) + c_3^{II}(x)\right).$$

Примеры расчетов для модельного водоема, сравнение с результатами [2], [3], оценка положения свободной поверхности и линии раздела слоёв для *модели 1* приведены в работе [11]. Рис. 1-2 иллюстрируют сходимость решения *модели 1* к решению, полученному по *модели 2*. Расчеты проводили при следующих параметрах: глубина верхнего слоя $h = 15$ м, глубина водоема $H = 28$ м. Для параметризации ветрового воздействия была взята формула

$$\rho^I K_z^I \frac{\partial u^I}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \tau^w(x) = \theta\rho_a w|w|,$$

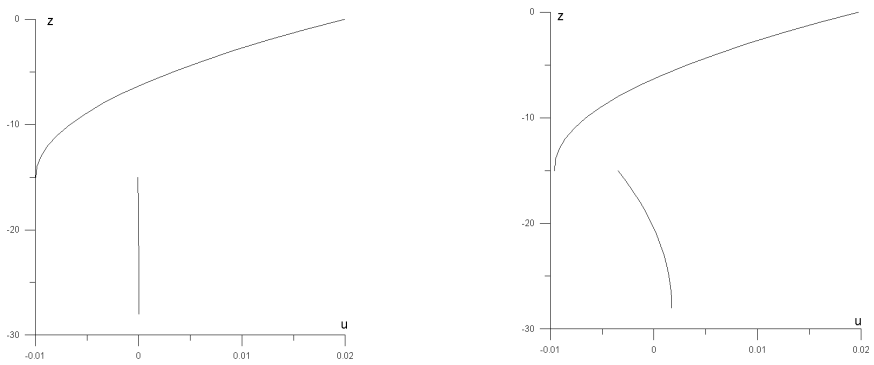

Рис. 1. Распределение скоростей по глубине при (а) $K^{1,2} = 0,0026$ кг/(м^{2}с) и (б) $K^{1,2} = 0,26$ кг/(м^{2}с)

где $\theta = 0,0026$, $\rho_a = 1,225$ кг/м^3 — плотность воздуха, $w = 5$ м/с — скорость ветра.

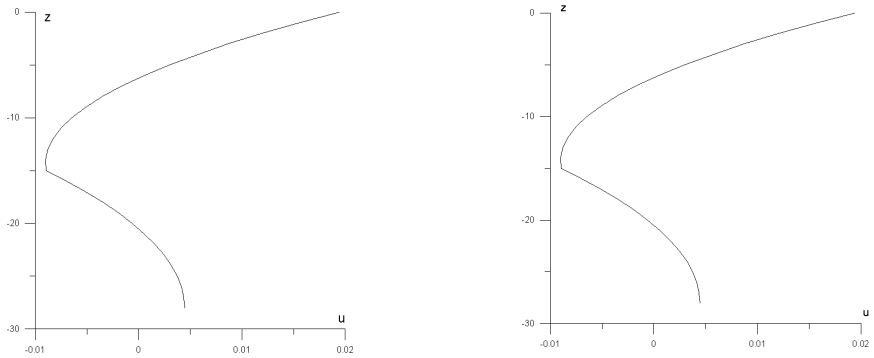

Рис. 2. Распределение скоростей по глубине (а) $K^{1,2} = 260$ кг/(м^{2}с), *модель 1*, (б) *модель 2*

Плотности в нижнем и верхнем слоях жидкости рассчитывали из уравнения состояния пресной воды

$$\rho(T) = \rho_0(1 - 0,68 \cdot 10^{-6}(T-4)^2).$$

Температура верхнего слоя 15 °C, а нижнего — 5 °C, при этом $\rho^I = 999,91772$ кг/м^3, $\rho^{II} = 999,99932$ кг/м^3. Коэффициенты турбулентного обмена $K_z^I = 0,02$ м^2/с, $K_z^{II} = 0,002$ м^2/с, коэффициент придонного трения $k_b = 0$.

Аналитические решения и результаты численных расчетов показывают, что при больших $K^{1,2}$ *модели 1* и *2* дают близкие значения скоростей как в верхнем, так и в нижнем слоях.

3-D случай. Предположим, что $H = const$, $K_z^I = K_z^{II} = const$, на дне ставится условие прилипания. Выпишем уравнения, описывающие стационарные течения в верхнем и нижнем слоях в соответствии с [2, 3, 12, 13, 8]:

$$-lv^I + g\frac{\partial \zeta^I}{\partial x} = K_z^I \frac{\partial^2 u^I}{\partial z^2}, \tag{26}$$

$$lu^I + g\frac{\partial \zeta^I}{\partial y} = K_z^I \frac{\partial^2 v^I}{\partial z^2}, \tag{27}$$

$$-lv^{II} + g\left(1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial \zeta^{II}}{\partial x} + g\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial \zeta^I}{\partial x} = K_z^{II}\frac{\partial^2 u^{II}}{\partial z^2}, \tag{28}$$

$$lu^{II} + g\left(1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial \zeta^{II}}{\partial y} + g\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial \zeta^I}{\partial y} = K_z^{II}\frac{\partial^2 v^{II}}{\partial z^2}. \tag{29}$$

Здесь x, y, z — оси прямоугольной системы координат, причем ось z направлена вертикально вверх; $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ — компоненты вектора скорости течения; l — параметр Кориолиса.

Граничные условия для первого слоя имеют вид

$$\rho^I K_z^I \left.\frac{\partial u^I}{\partial z}\right|_{z=0} = \tau_x^w, \quad \rho^I K_z^I \left.\frac{\partial v^I}{\partial z}\right|_{z=0} = \tau_y^w, \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\rho^I K_z^I \left.\frac{\partial u^I}{\partial z}\right|_{z=-h} = K^{1,2}(u^I - u^{II}), \\ &\rho^I K_z^I \left.\frac{\partial v^I}{\partial z}\right|_{z=-h} = K^{1,2}(v^I - v^{II}). \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь τ_x, τ_y — напряжение ветра на невозмущенной свободной поверхности.

Граничные условия для второго слоя:

$$\begin{aligned} &\rho^{II} K_z^{II} \left.\frac{\partial u^{II}}{\partial z}\right|_{z=-h} = \rho^I K_z^I \left.\frac{\partial u^I}{\partial z}\right|_{z=-h} = K^{1,2}(u^I - u^{II}), \\ &\rho^{II} K_z^{II} \left.\frac{\partial v^{II}}{\partial z}\right|_{z=-h} = \rho^I K_z^I \left.\frac{\partial v^I}{\partial z}\right|_{z=-h} = K^{1,2}(v^I - v^{II}), \end{aligned} \tag{32}$$

$$u^{II}\big|_{z=-H} = 0,\ v^{II}\big|_{z=-H} = 0. \tag{33}$$

Для *модели 2* условия (31), (32) превращаются в

$$\rho^I K_z^I \left.\frac{\partial u^I}{\partial z}\right|_{z=-h} = \rho^{II} K_z^{II} \left.\frac{\partial u^{II}}{\partial z}\right|_{z=-h}, \quad u^I\big|_{z=-h} = u^{II}\big|_{z=-h},$$

$$\rho^I K_z^I \left.\frac{\partial v^I}{\partial z}\right|_{z=-h} = \rho^{II} K_z^{II} \left.\frac{\partial v^{II}}{\partial z}\right|_{z=-h}, \quad v^I\big|_{z=-h} = v^{II}\big|_{z=-h}.$$

Уравнения неразрывности для первого и второго слоев , соответственно, следующие:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{0} u^I dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{0} v^I dz = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-H}^{-h} u^{II} dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-H}^{-h} v^{II} dz = 0. \tag{35}$$

Для упрощения вычислений запишем систему уравнений (26)–(29) в комплексной форме.

Введем обозначения:

$$W^I = u^I + iv^I, \;\; W^{II} = u^{II} + iv^{II}, \;\; \tau^W = \tau_x + i\tau_y,$$
$$\frac{\partial \zeta^I}{\partial n} = \frac{\partial \zeta^I}{\partial x} + i\frac{\partial \zeta^I}{\partial y}, \;\; \frac{\partial \zeta^{II}}{\partial n} = \frac{\partial \zeta^{II}}{\partial x} + i\frac{\partial \zeta^{II}}{\partial y}.$$

Тогда общее решение системы уравнений (26)–(29) можно представить таким образом:

$$W^I = D_1 e^{\sqrt{\frac{il}{K^I}z}} + D_2 e^{-\sqrt{\frac{il}{K^I}z}} + \frac{ig}{l}\frac{\partial \zeta^I}{\partial n},$$

$$W^{II} = D_3 e^{\sqrt{\frac{il}{K^{II}}z}} + D_4 e^{-\sqrt{\frac{il}{K^{II}}z}} + \frac{ig}{l}\left(\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial \zeta^I}{\partial n} + \left(1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial \zeta^{II}}{\partial n}\right),$$

а граничные условия (30)–(33) примут вид

$$\begin{aligned}
&\rho^I K_z^I \alpha_1 (D_1 - D_2) = \tau^W, \\
&\rho^I K_z^I \alpha_1 (D_1 e^{-\alpha_1 h} - D_2 e^{\alpha_1 h}) = K^{1,2}\Bigg[D_1 e^{-\alpha_1 h} + D_2 e^{\alpha_1 h} + \frac{ig}{l}\frac{\partial \zeta^I}{\partial n} - \\
&-D_3 e^{-\alpha_2 h} - D_4 e^{\alpha_2 h} - \frac{ig}{l}\left(\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial \zeta^I}{\partial n} + \left(1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial \zeta^{II}}{\partial n}\right)\Bigg], \\
&\rho^{II} K_z^{II} \alpha_2 (D_3 e^{-\alpha_2 h} - D_4 e^{\alpha_2 h}) = \rho^I K_z^I \alpha_1 (D_1 e^{-\alpha_1 h} - D_2 e^{\alpha_1 h}), \\
&D_3 e^{-\alpha_2 H} + D_4 e^{\alpha_2 H} + \frac{ig}{l}\left(\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial \zeta^I}{\partial n} + \left(1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial \zeta^{II}}{\partial n}\right) = 0, \\
&\alpha_1 = \sqrt{\frac{il}{K_z^I}}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{il}{K_z^{II}}}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Обозначим:

$$\beta_1 = \rho^I K_z^I \alpha_1, \quad \beta_2 = \rho^{II} K_z^{II} \alpha_2,$$

$$S_1 = \frac{ig}{l}\frac{\partial \zeta^I}{\partial n}, \quad S_2 = \frac{ig}{l}\left(\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial \zeta^I}{\partial n} + \left(1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial \zeta^{II}}{\partial n}\right).$$

Выпишем решение системы (36), считая, что S_1 и S_2 — параметры:

$$D_1 = \frac{\tau^W}{\beta_1} + D_2, \quad D_2 = \frac{\beta_2 S_2 e^{\alpha_2(H-h)} + \tau^W e^{-\alpha_1 h} + \beta_2 D_4 (e^{\alpha_2(2H-h)} + e^{\alpha_2 h})}{\beta_1 2\,\mathrm{sh}(\alpha_1 h)},$$

$$D_3 = -D_4 e^{2\alpha_2 H} - S_2 e^{\alpha_2 H},$$

$$D_4 = \frac{1}{K^{1,2}(e^{\alpha_2(2H-h)} - e^{\alpha_2 h}) + \dfrac{\beta_2}{\beta_1}(e^{\alpha_2(2H-h)} + e^{\alpha_2 h})(\beta_1 + K^{1,2}\operatorname{ch}(\alpha_1 h))} \times$$

$$\times \left(\tau^W e^{-\alpha_1 h} - K^{1,2}\left[S_1 - S_2 + \frac{\tau^W}{\beta_1} e^{-\alpha_1 h} + S_2 e^{\alpha_2(H-h)} \right] - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\beta_1}\left(\beta_2 S_2\, e^{\alpha_2(H-h)} + \tau^W e^{-\alpha_1 h}\right)\left(\beta_1 + K^{1,2}\operatorname{ch}(\alpha_1 h)\right) \right).$$

Легко заметить, что коэффициенты D_1, D_2, D_3 и D_4 представляют собой линейные функции от S_1, S_2 и τ^W. Способ нахождения величин S_1 и S_2 описан в работе [1].

Если использовать постановку задачи, описанную в работе [4] (*модель 2*), то

$$W_1 = D_1 e^{\alpha_1 z} + D_2 e^{-\alpha_1 z} + S_1, \qquad W_2 = D_3 e^{\alpha_2 z} + D_4 e^{-\alpha_2 z} + S_2,$$

$$D_1 = e^{\alpha_1 h}(-\beta_2 e^{2\alpha_2 h}\beta_1 S_2 - \beta_2 e^{2\alpha_2 H}\beta_1 S_2 + \beta_2 e^{2\alpha_2 h}\beta_1 S_1 + \beta_2 e^{2\alpha_2 H}\beta_1 S_1 +$$
$$+2\beta_1 S_2 \beta_2 e^{(\alpha_2 h + \alpha_2 H)} - \tau^W \beta_1 e^{(\alpha_1 h + 2\alpha_2 H)} - \tau^W \beta_2 e^{(\alpha_1 h + 2\alpha_2 H)} +$$
$$+\tau^W \beta_1 e^{(\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)} - \tau^W \beta_2 e^{(\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)})/((-\beta_2 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 H)} -$$
$$-\beta_2 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)} - \beta_1 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 H)} + \beta_1 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)} - \beta_2 e^{2\alpha_2 H} - \beta_2 e^{2\alpha_2 h} +$$
$$+\beta_1 e^{2\alpha_2 H} - \beta_1 e^{2\alpha_2 h})\beta_1),$$
$$D_2 = (-\beta_2\beta_1 S_2 e^{(\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)} - \beta_2\beta_1 S_2 e^{(\alpha_1 h + 2\alpha_2 H)} +$$
$$+\beta_2\beta_1 S_1 e^{(\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)} + \beta_2\beta_1 S_1 e^{(\alpha_1 h + 2\alpha_2 H)} + 2\beta_1 S_2 \beta_2 e^{(\alpha_2 h + \alpha_2 H + \alpha_1 h)} -$$
$$-\tau^W \beta_1 e^{2\alpha_2 H} + \tau^W \beta_2 e^{2\alpha_2 H} + e^{2\alpha_2 h}\tau^W \beta_2 + e^{2\alpha_2 h}\tau^W \beta_1)/$$

$$/((-\beta_2 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 H)} - \beta_2 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)} - \beta_1 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 H)} + \beta_1 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)} -$$
$$-\beta_2 e^{2\alpha_2 H} - \beta_2 e^{2\alpha_2 h} + \beta_1 e^{2\alpha_2 H} - \beta_1 e^{2\alpha_2 h})\beta_1),$$

$$D_3 = -e^{\alpha_2 H}(\beta_1 S_1 e^{(\alpha_2 H + 2\alpha_1 h + \alpha_2 h)} - \beta_1 S_2 e^{(\alpha_2 H + 2\alpha_1 h + \alpha_2 h)} +$$
$$+2\tau^W e^{(\alpha_2 h + \alpha_2 H + \alpha_1 h)} - \beta_1 S_1 e^{(\alpha_2 h + \alpha_2 H)} + \beta_1 S_2 e^{(\alpha_2 h + \alpha_2 H)} +$$
$$+\beta_1 S_2 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)} - S_2 \beta_2 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)} - S_2 \beta_1 e^{2\alpha_2 h} -$$
$$-S_2 \beta_2 e^{2\alpha_2 h})/(-\beta_2 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 H)} - \beta_2 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)} - \beta_1 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 H)} +$$
$$+\beta_1 e^{(2\alpha_1 h + 2\alpha_2 h)} - \beta_2 e^{2\alpha_2 H} - \beta_2 e^{2\alpha_2 h} + \beta_1 e^{2\alpha_2 H} - \beta_1 e^{2\alpha_2 h}),$$
$$D_4 = (\beta_1 S_1 e^{(2\alpha_1 h + \alpha_2 h)} - \beta_1 S_2 e^{(2\alpha_1 h + \alpha_2 h)} + \beta_1 S_2 e^{(\alpha_2 H + 2\alpha_1 h)} +$$
$$+\beta_2 S_2 e^{(\alpha_2 H + 2\alpha_1 h)} + 2\tau^W e^{(\alpha_1 h + \alpha_2 h)} - \beta_1 S_2 e^{\alpha_2 H} - \beta_1 S_1 e^{\alpha_2 h} + e^{\alpha_2 H}\beta_2 S_2 +$$

$$+\beta_1 S_2 e^{\alpha_2 h})/(-\beta_2 e^{(2\alpha_1 h+2\alpha_2 H)} - \beta_2 e^{(2\alpha_1 h+2\alpha_2 h)} - \beta_1 e^{(2\alpha_1 h+2\alpha_2 H)} +$$

$$+\beta_1 e^{(2\alpha_1 h+2\alpha_2 h)} - \beta_2 e^{2\alpha_2 H} - \beta_2 e^{2\alpha_2 h} + \beta_1 e^{2\alpha_2 H} - \beta_1 e^{2\alpha_2 h}).$$

Отметим интересный факт: если $K_z^I = K_z^{II}$, $\rho^I = \rho^{II}$, то дрейфовая (определяемая напряжением ветра) составляющая течения для *модели 2* совпадает с аналогичной составляющей течения однородной жидкости в бассейне глубиной H с условием прилипания на дне [8].

Анализа геострофической (т. е. определяемой наклоном свободной поверхности) составляющей течения в литературе практически нет, так как для ее определения необходимо решать сложную краевую задачу. В частном случае напряжения ветра, задаваемого формулой $\tau_x/\rho^I = -\alpha y, \quad \tau_y/\rho^I = \alpha x$, это удается сделать, что позволяет проанализировать течение в целом.

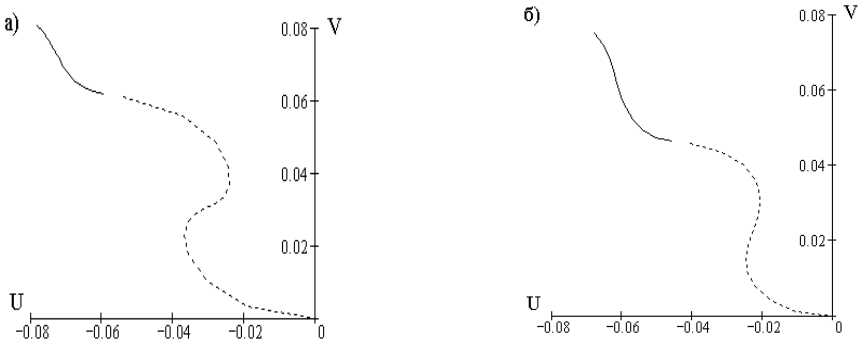

Рис. 3. Спирали Экмана, сплошная линия соответствует верхнему слою, пунктирная — нижнему слою; $K^{1,2} = 2$ кг/(м^{2}с), *модель 1*

Для двухслойной жидкости проводилась серия тестовых расчетов с целью определения влияния на решение изменения плотности воды в верхнем и нижнем слоях.

Расчеты проводили при следующих значениях параметров: $h = 10$ м, $H = 24$ м, $l = 0,00015$, $\tau^W = 0,003 \cdot (-y + ix))$, для вычисления ρ^I и ρ^{II} брали различные значения температуры и солености воды в верхнем и нижнем слоях. Некоторые варианты расчетов в случае, когда плотность воды вычисляется по формуле Буссинеска

$$\rho(T,\, S) = 1025,41 \cdot \left(0,97529 + -0,00317 \cdot \frac{T}{17,5} + 0,02737 \cdot \frac{S}{35}\right),$$

приведены на рис. 3-4. На рис. 3,а отображены результаты расчетов для $K_z^I = 0,003$ м^2/с, $\rho^I = 1009,187$ кг/м^3 (при температуре воды в верхнем слое 20°C и солености 16 ‰) и

$K_z^{II} = 0,0005$ м^2/с, $\rho^{II} = 1013,949$ кг/м^3 (при температуре воды в нижнем слое 3°C и солености 18 ‰), на рис. 3,б приведены результаты расчетов для $K_z^I = 0,002$ м^2/с, $\rho^I = 1011,601829$ кг/м^3 (при температуре воды в верхнем слое 7°C и солености 16 ‰) и $K_z^{II} = 0,001$ м^2/с, $\rho^{II} = 1013,762807$ кг/м^3 (при температуре воды в нижнем слое 4°C и солености 18 ‰); $K^{1,2} = 2$ кг/(м^{2}с). На рис. 4 представлены результаты аналогичных расчетов в случае $K^{1,2} = 20$ кг/(м^{2}с).

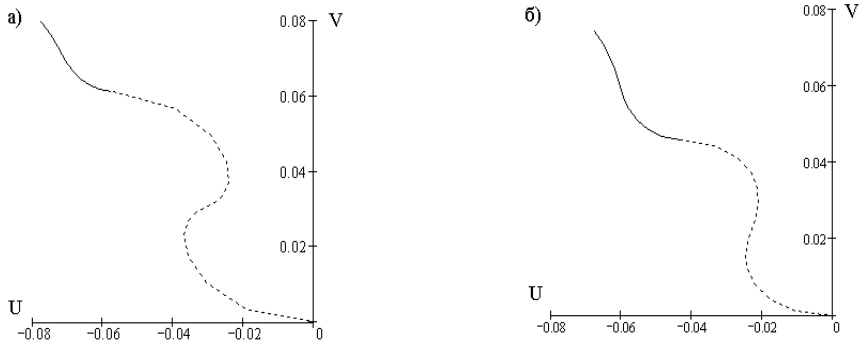

Рис. 4. Спирали Экмана, сплошная линия соответствует верхнему слою, пунктирная — нижнему слою; $K^{1,2} = 20$ кг/(м^{2}с), *модель 1*

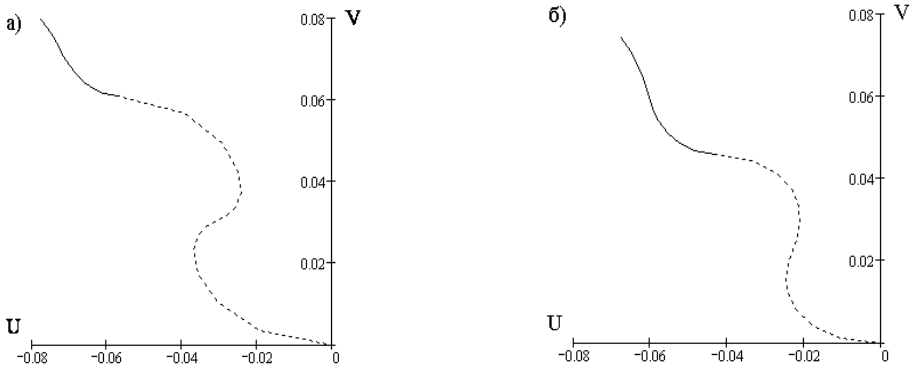

Рис. 5. Спирали Экмана, сплошная линия соответствует верхнему слою, пунктирная — нижнему слою, *модель 2*

Аналогичные расчеты проводились и для *модели 2*, результаты приведены на рис. 5 (рис. 5,а соответствует $K_z^I = 0,003$ м^2/с, $\rho^I = 1009,187$ кг/м^3, $K_z^{II} = 0,0005$ м^2/с, $\rho^{II} = 1013,949$ кг/м^3, рис. 5,б — $K_z^I = 0,002$ м^2/с, $\rho^I = 1011,601829$ кг/м^3, $K_z^{II} = 0,001$ м^2/с, $\rho^{II} = 1013,762807$ кг/м^3).

Найденное модельное трехмерное течение позволяет оценить уменьшение скорости жидкости при понижении температуры верхнего и нижнего слоев, а также сложную структуру течения, в которой учтена геострофическая составляющая. Полученное решение также может применяться при тестировании программ расчета трехмерного течения двухслойной жидкости.

Список литературы

[1] Т.В.Гапеева, К.Ю.Гуревич, Л.А.Компаниец, Аналитическое решение одной модели движения двухслойной жидкости (3-d случай), *Вестник КрасГУ. Физико-математические науки*, Красноярск, (2006), №4, 43–49.

[2] З.Н.Добровольская, Г.П.Епихов, П.П.Корявов, Н.Н.Моисеев, Математические модели для расчета динамики и качества сложных водных систем, *Водные ресурсы*, (1981), №3, 33–51.

[3] З.Н.Добровольская, А.И.Симонов, Математическое моделирование течений в стратифицированном водоеме, *Моделирование и экспериментальные исследования гидрологических процессов в озерах*, Л., Наука, Ленинградское отделение, 1986, 6–10.

[4] П. П. Корявов, Многослойная модель экмановского типа для расчета ветровых течений, Сообщения по прикладной математике, М., Вычислительный центр АН СССР, 1991, 26 с.

[5] Г.И.Марчук, В.П Кочергин, В.И.Климук, В.А.Сухоруков, Динамика однородного слоя океана, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976, 17 с.

[6] V.W.Ekman, On the influence of the Earth rotation on ocean currents, *Arkiv Mat., Astron., Fysik.*, **2**(1905), №11, 1–52.

[7] P.Welander, Wind action on a shallow sea: some generalisations of Ekman's theory, *Tellus*, **9**(1957), 45–52.

[8] P.Welander, Wind-driven circulation in one- and two-layer oceans of variable depth, *Tellus XX*, **1**(1968), 1–16.

[9] А.Л.Чикин, Построение и численное 3-D модели гидродинамики Азовского моря, *Вычислительные технологии*, **6**(2001), 686–691.

[10] В.Ю.Ляпидевский, В.М.Тешуков, Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости, Новосибирск, СО РАН, 2000, 420 с.

[11] Л.А.Компаниец, Т.В.Якубайлик, Аналитическое решение одной модели ветрового движения двухслойной жидкости, *Вычислительные технологии*, **9**(2004), 372–383.

[12] Г.В.Еремеева, Ю.Г.Филиппов, Г.Я.Шкудова, Некоторые особенности циркуляции в районах отмелых и приглубых шельфов глубоких морей, *Гидродинамические методы моделирования процессов на морях СССР*, М., Гидрометеоиздат, (1987), 47–55.

[13] K.Hutter, G.Bauer, Y.Wang, P.Güting, Forced motion response in enclosed lakes, *Physical Processes in Lakes and Oceans, Coastal and Estuarine Studies*, **54**(1998), 137–166.

Comparative Analysis of Two Models of the Two-Layer Fluid Motion by means of Ekman's Approximation

Lidiya A.Kompaniets
Tat'yana V.Yakubailik
Kirill Yu.Gurevich
Lyudmila V.Gavrilova
Ekaterina A.Kirilyuk

Two Ekman's type models for stationary wind-driven motion of two-layer fluid are proposed. Upper and lower layers are homogeneous with different densities. The analytic solutions in the two-dimensional and three-dimensional cases are found for this models. For the 2-D case it is assumed that the bottom of the water basin is not flat and the vertical turbulent exchange coefficients in upper and lower layers depend on the depth. For the 3-D case the vertical turbulent exchange coefficients are constant in each layer and the bottom of the water basin is flat. The obtained solutions could be useful for the evaluation of the boundary location between layers and as a test in the analysis of computational algorithms which are applied for solving problem of the wind current in a two-layer liquid.

Keywords: analytical solution, stationary wind-driven motion, Ekman's approximation, two-layer liquid