УДК 519.8.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВТРОФИРОВАНИЯ ВОДОЕМОВ. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ ЭКОСИСТЕМЫ ВОДОЕМА

Козловская А.Н.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доцент Распопов В.Е.
Сибирский Федеральный Университет

Проблема эвтрофирования водоемов (ухудшения качества воды) привлекает все более широкое и пристальное внимание как научных, так и практических работников, связанных с охраной и использованием водных ресурсов планеты. Решение этой проблемы имеет большое практическое значение. Изучение процессов происходящих в экосистемах с помощью математических методов становится все более актуальным, так как дает возможность прогнозировать состояние экосистем и рассматривать влияние на них внешних факторов, не подвергая риску сами экосистемы. В этом состоит основное преимущество моделирования.

Необходимым условием для построения содержательных математических моделей является наличие подробной естественнонаучной информации об устройстве и механизмах функционирования системы. Основными принципами, используемыми при построении моделей, являются универсальные законы сохранения. Уравнения должны содержать количественные выражения принятых гипотез о специфических экологических процессах (рождаемости, смертности, питании и т.д.).

Природные экосистемы являются сложными комплексными системами. Для изучения этих систем их расчленяют на простые подсистемы посредством абстрагирования от относительно слабых взаимодействий.

Для исследования сложных процессов в объектах, изменяющихся с течением времени, применяются математические модели в виде дифференциальных уравнений (или систем дифференциальных уравнений).

Уравнения моделей составляются на основании физических, химических, биологических законов.

Решения таких систем дифференциальных уравнений являются функциями времени и, следовательно, могут описывать изменения во времени процессов, происходящих внутри моделируемых объектов.

В области математического моделирования экологических систем наиболее длинный пусть пройден для водных экосистем. Соответственно здесь имеются наибольшие достижения. Это связано с достаточно определенной структурой водных живых систем, известными направлениями переноса вещества в пространстве, сравнительно слабым влиянием неизвестных случайных факторов. Во всяком случае, этим водные экосистемы отличаются от наземных.

Исследования любой природной системы в настоящее время невозможно без учета антропогенного воздействия, которому она в той или иной степени подвергается. Анализ последствий такого воздействия сложен, но важен с точки зрения развития и изменения природной системы. Такой анализ рационально проводить с помощью математических моделей – это и дешевле других способов и не требует, как правило, дополнительного вторжения в природную среду.

Основу функционирования экосистемы составляют нижние трофические уровни: планктон, бактерии, простейшие. От этих уровней зависят скорости и объемы потоков вещества или энергии в системе. Модели фитопланктонных и микробиологических сообществ чаще всего основаны на системах дифференциальных уравнений. Изучение и моделирование первичной продукции является предметов многочисленных исследований. Выработана концепция лимитирующих факторов и способы ее математической формализации. Традиционный путь изучения сообществ микроорганизмов заключается в

моделировании непрерывных культур. Скорость размножения может зависеть от концентрации клеток, концентрации субстрата, температуры, pH среды и прочих факторов [2]. В микробиологических системах, как правило, скорость роста лимитируется концентрацией субстратов.

При моделировании динамики фитопланктона важную роль играет учет влияния уровня освещенности на скорость роста организмов.

Для фитопланктона минеральными веществами, способными лимитировать рост, являются соединения на основе азота, фосфора, кремния и углерода. Существуют, однако, данные, что представление о постоянстве клеточного состава не является верным. На непостоянство стехиометрических соотношений углерода, азота и фосфора в составе фитопланктона указывал С.Йоргенсен . Для естественных озерных сообществ пресноводных микроводорослей он приводит диапазон отклонений соотношения «азот-фосфор» в клетке от 4,1 до 291. Процессы поглощения минеральных веществ из среды клетками фитопланктона и его рост – существенно независимые процессы. И, следовательно, модели, игнорирующие этот факт, не отражают, по крайней мере, три явления, наблюдаемы в природе: скорости роста фитопланктона и потребления питательных веществ могут быть различными и, в частности, скорость потребления может сильно превышать скорость роста; высокая скорость роста может иметь место при очень низких концентрациях ресурсов в среде; доля биогенного элемента (азота, фосфора) в клетках фитопланктона может сильно варьироваться на протяжении вегетативного периода.

Одним из факторов, влияющих на формирование структуры экологических сообществ, является конкуренция. Конкуренция в самом широком смысле – это взаимодействие организмов, стремящихся получить один и тот же ресурс. Конкурентное взаимодействие может касаться пространства, пищи или биогенных элементов, света, зависимости от хищников и т.д. Межвидовая конкуренция за питание может привести либо к установлению равновесия между двумя видами, либо к замене популяции одного вида на популяцию другого, либо к тому, что один вид вытеснит другой в иное место или же заставит его перейти на использование иной пищи. При конкуренции близкородственных или сходных в иных отношениях видов наблюдается тенденция к их экологическому разделению (близкородственные, ведущие сходный образ жизни и обладающие сходной морфологией, организмы обитают в разных местах или используют разные ресурсы или разное время активности при занятии одного местообитания). Эта тенденция получила известность как принцип конкурентного исключения Гаузе .

На Базовой кафедре вычислительных и информационных технологий Сибирского федерального университета разработана точечная модель экосистемы водоема. Эта модель учитывает следующие процессы происходящие в водоеме:

- Рост организмов,
- Смертность,
- Дыхание (выделение),
- Переходы по пищевой цепи,
- Оседание веществ,
- Изменения биогенных веществ.

Эта модель представляет собой систему из 10 обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих изменения концентраций зеленых водорослей (CA0), сине-зеленых (CA1) и диатомовых (CA2) водорослей, зоопланктона (CZ), бактериопланктона (CB), детрита (CD), растворенных в воде фосфора(PS), азота (NS), органики (POB) и кислорода (O2).

Данная модель была модифицирована. Мы добавили в нее функцию изменения концентрации кремния в воде.

$$
\begin{cases}
\frac{dCA0}{dt} = (mA0 - RA0 - MA0) \cdot CA0 + \alpha_0 \cdot CA1 \cdot CA0 + f_1(t,x), \\
\frac{dCA1}{dt} = (mA1 - RA1 - MA1) \cdot CA1 - \alpha_1 \cdot CA1 \cdot CA0 + f_2(t,x), \\
\frac{dCA2}{dt} = (mA2 - RA2 - SA2 \cdot F_{Si}(T) - MA2 \cdot F_{Si}(T)) \cdot CA2 - \frac{mZ \cdot CZ}{Y1} + f_3(t,x), \\
\frac{dCZ}{dt} = (mZ - RZ - MZ) \cdot CZ + f_4(t,x), \\
\frac{dCB}{dt} = (mB - RB - MB) \cdot CB - \frac{mZ \cdot CZ}{Y2} + f_5(t,x), \\
\frac{dCD}{dt} = MA0 \cdot CA0 + MA1 \cdot CA1 + MA2 \cdot CA2 + MZ \cdot CZ + MB \cdot CB - \\
\quad -SA3 \cdot CD - \frac{mB \cdot CB}{Y3} - \frac{mZ \cdot CZ}{Y4} + f_6(t,x), \\
\frac{dPS}{dt} = -(mA0 - RA0) \cdot PP0 \cdot CA0 - (mA1 - RA1) \cdot PP1 \cdot CA1 - \\
\quad -(mA2 - RA2) \cdot PP2 \cdot CA2 + RZ \cdot CZ \cdot PP3 + RB \cdot CB \cdot PP4 + f_7(t,x), \\
\frac{dNS}{dt} = RA0 \cdot PN0 \cdot CA0 + RA1 \cdot PN1 \cdot CA1 - (mA2 - RA2) \cdot PN2 \cdot CA2 + \\
\quad +RZ \cdot CZ \cdot PN3 + RB \cdot CB \cdot PN4 + f_8(t,x), \\
\frac{dPOB}{dt} = -\frac{mB \cdot CB}{Y5} + h_0 \cdot RA0 * CA0 + h_1 \cdot RA1 \cdot CA1 + h_2 \cdot RA2 \cdot CA2 + \\
\quad +h_3 \cdot RZ \cdot CZ + h_4 \cdot RB \cdot CB + f_9(t,x), \\
\frac{dO2}{dt} = K1 \cdot (O20 - O2) + K_{acc} \cdot (mA0 \cdot CA0 + mA1 \cdot CA1 + mA2 \cdot CA2) - \\
\quad -alf \cdot (RA0 \cdot CA0 + RA1 \cdot CA1 + RA2 \cdot CA2 + RZ \cdot CZ + RB \cdot CB) - \\
\quad -B1 \cdot mZ \cdot CZ + f_{10}(t,x)
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

Эту функцию мы ввели, так как нами было установлено, что в жизни диатомовых водорослей кремний играет особую роль, он им необходим для построения панциря. Усваивается кремний диатомовыми водорослями в виде кремниевой кислоты и органических соединений кремния. Потребность в кремнии у диатомей различная и зависит от местообитания и физиологического состояния клеток. В период обильного размножения, диатомей испытывают наибольшую потребность в кремнии: недостаточное содержание его в воде вызывает замедление темпов деления и приводит к уменьшению толщины панциря. Диатомовые водоросли доминируют над остальными, и являются кормовыми, поэтому они представляют для нас наибольший интерес.

При моделировании используются следующие функции:

- Удельные скорости роста зеленых (mA0), сине-зеленых (mA1), диатомовых (mA2) водорослей, зоопланктона (mZ) и бактериопланктона (mB)

$$
\begin{aligned}
&mA0 = mA0max \cdot S0(T) \cdot L1(E) \cdot \frac{PS}{KP0 + PS}, \\
&mA1 = mA1max \cdot S1(T) \cdot L1(E) \cdot \frac{PS}{KP1 + PS}, \\
&mA2 = mA2max \cdot F_{Si}(T) \cdot S2(T) \cdot L2(E) \cdot \frac{NS}{KN2+NS} \cdot \frac{PS}{KP2+PS}, \\
&mZ = mZmax \cdot S3(T) \cdot \frac{O2}{ZO2 + O2} \cdot \frac{A1 \cdot CD + A2 \cdot CB + A3 \cdot CA2}{CON + A1 \cdot CD + A2 \cdot CB + A3 \cdot CA2},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

$$mB = mBmax \cdot S4(T) \cdot \frac{O2}{KO2 + O2} \cdot \left(\frac{CD}{KMD + CD} + \frac{POB}{KOB + POB}\right),$$

- Температурные зависимости для скоростей роста зеленых (S0), сине-зеленых (S1), диатомовых (S2) водорослей, зоопланктона (S3) и бактериопланктона (S4)

$$Si(T) = exp\left[-\left(\frac{T - Si\_T}{Si\_D}\right)^2\right], \qquad i = \overline{0,4}\ , \tag{1.3}$$

- Функции, моделирующие зависимость роста сине-зеленых (L1) и диатомовых (L2) водорослей от освещенности

$$L1(E) = \frac{cL1}{cL2 + cL3 \cdot \exp\,(cL4 \cdot E)}\ ,$$

$$L2(E) = \frac{E}{KE + E}\ , \tag{1.4}$$

- Функция насыщения концентрации растворенного кислорода

$$O20(T) = 14.61996 - 0.4042 \cdot T(t) + 0.00842 \cdot T^2(t) - 0.00009 \cdot T^3(t) \tag{1.5}$$

- Функция диффузии кислорода

$$K1 = cK1 \cdot \exp(T - cK2) \cdot \ln(cK3), \tag{1.6}$$

- Функция освещенности

$$E = maxE \cdot \sin\left(\frac{t \cdot \pi}{366}\right) + 3\,. \tag{1.7}$$

- Функция изменения концентрации кремния (1.8)

$$F_{si}(T) = \beta_1 \cdot exp\left[-\left(\frac{T - S2\_T}{S2\_D}\right)^2\right] + \beta_2,$$

Для полученной модели поставлена задача Коши, которая решена методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Расчеты показали, что данная модель, позволяет выделить два (летний и осенний), так и один пик цветения фитопланктона, что соответствует экспериментальным данным.

Так же была решена обратная задача, когда неизвестен один из параметров правой части.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + v(t,x)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = k^2\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \vec{F}(t,x,\vec{u})\ , \qquad 0 \le t \le T,\ \ 0 \le x \le X, \tag{2.1}$$

Рассмотрим следующую задачу: найти вектор-функцию $\vec{U} = (CA0, CA1, CA2, CZ, CB, CD, PS, NS, POB, O2)$ и коэффициент Михаэлиса KP1(t), удовлетворяющие задаче (3.1) и условию переопределения:

$$CA1(t,\xi) = \beta(t),\ 0 \le t \le T,$$

где $\beta(t)$ – заданная функция, ξ – фиксированная точка на отрезке [0,X].

Задачу решаем численно. Для этого строим равномерную прямоугольную сетку и строим разностную схему аналогично прямой задачи. Для нахождения коэффициента Михаэлиса примем, что в точке ξ соответствует узел с индексом p. Тогда коэффициент Михаэлиса рассчитываем по формуле:

$$KP1^{n+1} = \frac{mA1max \cdot S1^n \cdot L1^n \cdot PS_p^n \cdot \beta^n}{\left((\beta')^n + v_p^n \cdot \frac{CA1_{p+1}^n - CA1_{p-1}^n}{2h} - (k^2)^n \cdot \frac{CA1_{p+1}^n - 2 \cdot CA1_p^n + CA1_{p-1}^n}{h^2} + RA1 \cdot \beta^n + MA1 \cdot \beta^n + \alpha_1 \cdot CA0_p^n\right.} - PS_p^n$$

Расчеты велись при $\xi = \frac{x}{2}$.