ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.213

АССОЦИАТИВНЫЕ ФУНКЦИИ ФРАНКА В ПОСТРОЕНИИ СЕМЕЙСТВ ДИСКРЕТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ СОБЫТИЙ

Н. А. Лукьянова, Д. В. Семенова

Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, г. Красноярск, Россия

Работа является продолжением исследования проблемы рекуррентного построения класса дискретных вероятностных распределений случайного множества на конечном множестве из N событий. В качестве инструмента построения таких распределений предлагается использовать однопараметрическое семейство ассоциативных функций Франка. Исследуются его свойства и характеристики применительно к вероятностному распределению случайных множеств событий. Приводятся условия построения и существования полученных вероятностных распределений случайных множеств событий, а также их вид.

Ключевые слова: *случайное множество событий, дискретное вероятностное распределение, ассоциативная функция Франка.*

DOI 10.17223/20710410/32/1

ASSOCIATIVE FRANK FUNCTIONS IN CONSTRUCTING FAMILIES OF DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS OF RANDOM SETS OF EVENTS

N. A. Lukyanova, D. V. Semenova

School of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

E-mail: nata00sfu@gmail.com, dariasdv@gmail.com

Discrete probability distributions of random subsets on a finite set of events are considered. A one-parameter family of Frank associative functions is applied for generating them. The related properties and characteristics of functions in this family are described. The form and the creation and existence conditions of obtained distributions are also described.

Keywords: *random set of events, discrete probability distribution, associative function of Frank.*

Введение

В последние годы в многомерном анализе данных при моделировании случайных объектов нечисловой природы возрос интерес к изучению частично определённых моделей, в которых объектом статистического интереса является множество, а не точка.

Подобные объекты появились давно в статистике и эконометрике и описываются естественным образом случайными множествами [1, 2]. Основным направлением современной теории случайных множеств является разработка математического аппарата для описания характеристик случайного множества и процедур получения множества с желаемыми свойствами.

Центральным объектом нашего исследования является специфическое случайное множество, а именно — случайное конечное множество событий. Случайные множества событий позволяют выявить общие статистические закономерности распределения событий в различных системах объектов нечисловой природы.

В качестве математического аппарата для описания структуры зависимостей множества событий выступает вероятностное распределение случайного множества событий. Одной из главных проблем исследования случайных множеств событий является задача построения их вероятностных распределений, описывающих все способы взаимодействия элементов между собой в моделируемом множестве. Однако на пути решения этой задачи стоит известная преграда «проклятия размерности», которая заключается в экспоненциальном росте размерности вероятностного распределения случайного множества событий при возрастании числа событий, образующих это множество.

В [3 – 5] предложено организовать процесс построения вероятностных распределений случайных множеств событий на основе рекуррентного соотношения, полученного с помощью аппарата ассоциативных функций [6]. Основная идея построения — выразить вероятности пересечений множества событий функционально через вероятности самих событий, что приводит к уменьшению числа параметров, необходимых для построения вероятностных распределений случайных множеств событий. Данная работа является продолжением исследования проблемы рекуррентного построения класса дискретных вероятностных распределений случайного множества на конечном множестве из N событий. Рассматривается однопараметрическое семейство функций Франка, введённое в 1979 г. [7]. Исследуются его свойства и характеристики применительно к вероятностному распределению случайных множеств событий.

Организация работы следующая. В п. 1 приводятся основные сведения о ключевых объектах исследования — случайных множествах событий и вероятностных распределениях, их характеризующих, и инструменте исследования — аппарате ассоциативных функций; рассматривается рекуррентный метод построения сет-функций и исследуются свойства полученных сет-функций. В п. 2 исследуются ассоциативные функции Франка в рекуррентном построении семейств вероятностных распределений случайных множеств событий. Приводятся теоремы, устанавливающие условия построения, а также вид и условия существования полученных вероятностных распределений случайных множеств событий.

1. Основные понятия и обозначения

1.1. Случайное множество событий

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Пусть $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$ — конечное множество событий, выбранных из алгебры $\mathcal{F}$ этого пространства, $|\mathfrak{X}| < \infty$.

Определение 1. Случайное множество событий K на конечном множестве событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$ определяется как отображение $K : \Omega \to 2^{\mathfrak{X}}$, измеримое относительно пары алгебр $\left(\mathcal{F}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$ в том смысле, что для всякого $X \in 2^{2^{\mathfrak{X}}}$ существует прообраз $K^{-1}(X) \in \mathcal{F}$, такой, что $\mathbf{P}(X) = \mathbf{P}(K^{-1}(X))$.

Замечание 1. Выражение $K(\omega) = \{x \in \mathfrak{X} : \omega \in x\}$ может быть истолковано как «случайное множество наступивших событий», поскольку элементарному исходу эксперимента $\omega \in \Omega$ ставится в соответствие некоторое подмножество событий $X \subseteq \mathfrak{X}$, которое содержит все те события, которые наступили в данном испытании.

Определение 2. Сет-функция $f(X)$, $X \in 2^{\mathfrak{X}}$, заданная на конечном множестве $\mathfrak{X}$, есть отображение $f : 2^{\mathfrak{X}} \to \mathbb{R}$.

Свойства сет-функций и условия их использования в качестве вероятностных распределений случайных множеств событий описаны в работах О. Ю. Воробьёва [8 – 10].

Случайное множество событий K, заданное на конечном множестве событий $\mathfrak{X}$, определяется своим вероятностным распределением. Если мощность рассматриваемого множества событий $|\mathfrak{X}| = N < \infty$, то имеется 2^N видов вероятностных зависимостей между событиями этого множества, т. е. ровно столько, сколько у этого множества подмножеств.

Определение 3. *Вероятностное распределение* случайного множества событий K, заданного на конечном множестве избранных событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$, есть набор 2^N значений вероятностной меры $\mathbf{P}$ на событиях из $2^{\mathfrak{X}}$.

Замечание 2. Вероятностное распределение случайного множества событий K, заданного на конечном множестве избранных событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$, является сет-функцией со значениями в $[0, 1]$.

Как известно, вероятностное распределение случайного множества событий можно задать шестью эквивалентными способами, которые определяются свойствами соответствующих сет-функций [8, 10]. В данной работе исследуются только два из них:

PI. Вероятностное распределение I рода случайного множества событий K на $\mathfrak{X}$ — это аддитивная сет-функция [8, 10], представляющая набор $\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ из 2^N вероятностей вида

$$p(X) = \mathbf{P}(\{K = X\}) = \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{x \in X} x\right) \bigcap \left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right)\right),$$

где $X^c = \mathfrak{X} \setminus X$, $x^c = \Omega \setminus x$, и удовлетворяющая следующим условиям:

$$0 \leqslant p(X) \leqslant 1, \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \quad \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p(X) = 1.$$

PII. Вероятностное распределение II рода случайного множества событий K на $\mathfrak{X}$ — это супераддитивная сет-функция [8, 10], представляющая набор из 2^N вероятностей вида $\{p_X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$, где

$$p_X = \mathbf{P}(\{X \subseteq K\}) = \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{x \in X} x\right) \bigcap \left(\bigcap_{x \in X^c} \Omega\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right),$$

которые удовлетворяют системе неравенств Фреше:

$$0 \leqslant \max\left\{0, 1 - \sum_{x \in X} (1 - \mathbf{P}(x))\right\} \leqslant p_X \leqslant \min_{x \in X} \mathbf{P}(x) \leqslant 1.$$

Замечание 3. Для сокращения записи будем использовать следующие обозначения: $p_{\{x\}} = p_x$, $p(\{x\}) = p(x)$, $p_{\{x,y\}} = p_{xy}$, $p(\{x, y\}) = p(xy)$ и т. д.

Замечание 4. В теории случайных событий [3–5, 8, 10] обозначение $\varnothing$ используется для $\mathfrak{X}^c = \Omega \setminus \mathfrak{X}$. Событие $\{K = \varnothing\} = \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} x^c$ означает, что не наступило ни одно событие из $\mathfrak{X}$. По определению принимаем $\bigcap\limits_{x\in\varnothing} x = \Omega$ и $\bigcap\limits_{x\in\varnothing} x^c = \Omega$. Таким образом, в вероятностном распределении II рода всегда

$$p_\varnothing = \mathbf{P}(\{K \supseteq \varnothing\}) = \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{x\in\varnothing} x\right) \cap \left(\bigcap_{x\in\mathfrak{X}} \Omega\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in\mathfrak{X}} \Omega\right) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Вероятностные распределения I и II рода связаны взаимно-обратными формулами обращения Мёбиуса [8, 10] для всех $X \in 2^{\mathfrak{X}}$:

$$p_X = \sum_{Y\in 2^{\mathfrak{X}}:X\subseteq Y} p(Y),$$
$$p(X) = \sum_{Y\in 2^{\mathfrak{X}}:X\subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} p_Y. \tag{1}$$

Соотношению вероятностной нормировки удовлетворяет только вероятностное распределение I рода $\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$, поскольку это вероятностный набор от полной группы несовместных событий $\left(\bigcap\limits_{x\in X} x\right) \cap \left(\bigcap\limits_{x\in X^c} x^c\right)$, образующих разбиение пространства элементарных исходов. Таким образом, если задано распределение I рода, то по формулам обращения Мёбиуса мы всегда получим распределение II рода $\left\{\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{x\in X} x\right),\ X \subseteq \mathfrak{X}\right\}$. Обратное не всегда верно, т. е. набор из 2^N чисел $\mathbf{P}(X)$, $X \subseteq \mathfrak{X}$, из $[0, 1]$, удовлетворяющих границам Фреше, не всегда определяет вероятностное распределение случайного множества событий.

Лемма 1. Если аддитивная сет-функция $f : 2^{\mathfrak{X}} \to [0,\ 1]$, заданная на значениях $\{K = X\} = \left(\bigcap\limits_{x\in X} x\right) \bigcap \left(\bigcap\limits_{x\in X^c} x^c\right)$, удовлетворяет условию $\sum\limits_{X\subseteq\mathfrak{X}} f(X) = 1$, то $f(X)$ определяет вероятностное распределение I рода случайного множества K на $\mathfrak{X}$.

Теорема 1. Если супераддитивная сет-функция $f : 2^{\mathfrak{X}} \to [0,\ 1]$, $X \subseteq \mathfrak{X}$, заданная на значениях $\{K \supseteq X\} = \left(\bigcap\limits_{x\in X} x\right)$, удовлетворяет следующим условиям:

— значение сет-функции на $\{K \supseteq \varnothing\}$ равно единице, т. е. $f(\varnothing) = 1$;
— значения сет-функции на событиях $x \in \mathfrak{X}$ совпадают с вероятностью этих событий, т. е. $f(x) = \mathbf{P}(x)$;
— значения сет-функции удовлетворяют системе неравенств Фреше

$$\max\left\{0, 1 - \sum_{x\in X}(1 - \mathbf{P}(x))\right\} \leqslant f(X) \leqslant \min_{x\in X} \mathbf{P}(x), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \ \ |X| \geqslant 2;$$

— сет-функция $p(X)$, полученная по формулам обращения Мёбиуса

$$p(X) = \sum_{Y\in 2^{\mathfrak{X}}:X\subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} f(Y),$$

определяет вероятностное распределение I рода,

то $f(X)$ определяет вероятностное распределение II рода случайного множества событий K на $\mathfrak{X}$.

1.2. Рекуррентное построение вероятностных распределений случайных множеств событий ассоциативными функциями

В современных теориях неопределённости широкое распространение получили классы ассоциативных функций [6]. Приведём определение ассоциативной функции, используемое в работе.

Определение 4. Ассоциативная функция $\mathrm{AF} : [0,1]^2 \to [0,1]$ определяется как двуместная функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

A1. *Граничные условия:* $\mathrm{AF}(a,0) = \mathrm{AF}(0,a) = 0$, $\mathrm{AF}(a,1) = \mathrm{AF}(1,a) = a$, $a \in [0,1]$.
A2. *Монотонность:* $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0,1](a_1 \leqslant a_2 \& b_1 \leqslant b_2 \Rightarrow \mathrm{AF}(a_1,b_1) \leqslant \mathrm{AF}(a_2,b_2))$.
A3. *Коммутативность:* $\forall a,b \in [0,1]$ $(\mathrm{AF}(a,b) = \mathrm{AF}(b,a))$.
A4. *Ассоциативность:* $\forall a,b,c \in [0,1]$ $(\mathrm{AF}(\mathrm{AF}(a,b),c) = \mathrm{AF}(a,\mathrm{AF}(b,c)))$.
A5. *Условие липшиц-непрерывности:* $\forall a,b,c \in [0,1]$ $(a \leqslant c \Rightarrow \mathrm{AF}(c,b) - \mathrm{AF}(a,b))$.

В [3–5] предложен рекуррентный подход к построению вероятностных распределений случайных множеств событий ассоциативными функциями. Основная идея этого подхода заключается в том, чтобы, исходя из известных вероятностей событий $\mathbf{P}(x) = p_x$, $x \in \mathfrak{X}$, формирование вероятностей пересечений событий $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{x\in X} x\right)$ для $X \subseteq \mathfrak{X}$, $|X| > 1$, осуществлять последовательно согласно рекуррентной формуле

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right) = \mathrm{AF}\left(p_x, \mathbf{P}\left(\bigcap_{y\in X\setminus\{x\}} y\right)\right) = \ldots = \mathrm{AF}\left(p_x, x \in X\right). \tag{2}$$

Формула (2) позволяет функционально построить вероятность пересечения событий $X \subseteq \mathfrak{X}$, используя в качестве входных параметров N вероятностей событий и вид ассоциативной функции. В результате формируются $2^N - N - 1$ вероятностей пересечений событий, удовлетворяющих границам Фреше. Определим сет-функцию $\{f(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ на конечном множестве событий $\mathfrak{X}$, значения которой определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} &f(\varnothing) = 1;\\ &f(x) = p_x = \mathbf{P}(x),\ x \in \mathfrak{X};\\ &f(X) = \mathrm{AF}\left(p_x, x \in X\right),\ X \subseteq \mathfrak{X},\ |X| > 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$ — конечное множество событий, выбранных из алгебры $\mathcal{F}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, и известны вероятности событий $p_x = \mathbf{P}(x)>0$, $x \in \mathfrak{X}$. Тогда для сет-функции $\{f(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$, значения которой определяются по формуле (3), справедливы $2^N - N - 1$ неравенств

$$0 \leqslant \mathrm{AF}\left(p_t, x \in X\right) \leqslant \mathrm{AF}\left(p_x, x \in X\right) \leqslant \mathrm{AF}(p_t, 1) = p_t \leqslant 1,\quad X \subseteq \mathfrak{X},\ |X| > 2,$$

где $p_t = \min\limits_{x\in X} p_x$.

Лемма непосредственно следует из определения ассоциативной функции.

Следствие 1. Значения сет-функции, определяемой по формуле (3), на всех подмножествах $X \subseteq \mathfrak{X}$, $|X| > 2$, удовлетворяют неравенствам

$$\mathrm{AF}\left(p_x, x \in X\right) \leqslant \mathrm{AF}\left(p_x, x \in X \setminus \{t\}\right),\ t \in X.$$

Следствие вытекает из свойства A2 монотонности ассоциативной функции.

Заметим, что построенная сет-функция является вероятностным распределением случайного множества событий при выполнении условий теоремы 1. Следовательно, для каждого семейства ассоциативных функций [6] необходимо определять условия, при которых сет-функция (3) является вероятностным распределением случайного множества событий. Для этого необходимо по формулам обращения Мёбиуса (1) перейти к вероятностному распределению I рода и определить условия, при которых выполняются свойства неотрицательности и нормировки.

2. Ассоциативные функции Франка

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций Франка [7]

$$\mathrm{Frank}(a,b;\alpha) = \mathrm{AF}_\alpha(a,b) = \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha\cdot a}-1)(e^{-\alpha\cdot b}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right)^{-1/\alpha}, \quad \alpha \neq 0, \tag{4}$$

где α представляет собой параметр, определяющий зависимость между переменными a и b, в качестве которых будем рассматривать вероятности событий $\mathbf{P}(x) = p_x = a$ и $\mathbf{P}(y) = p_y = b$.

Далее применим рекуррентный метод [3–5] с функцией Франка (4) для построения вероятностного распределения случайного множества событий. Сначала найдём общий вид сет-функции, а затем определим условия, при которых построенная сет-функция будет вероятностным распределением II рода некоторого случайного множества событий, заданного на конечном множестве $\mathfrak{X}$.

Лемма 3. Для значений сет-функции $\{f(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$, построенной рекуррентным методом (3) с ассоциативной функцией (4), справедлива формула

$$f(X) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{\prod\limits_{x\in X}(e^{-\alpha p_x}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^{|X|-1}}\right), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \ \alpha \neq 0. \tag{5}$$

Доказательство. Будем доказывать формулу (5) для подмножеств X из $\mathfrak{X}$, рассматривая их по возрастанию мощности ($|X| = 0, 1, \ldots N$) и находя значения сет-функции на $X \subseteq \mathfrak{X}$, используя рекуррентный метод (3) с ассоциативной функцией Франка (4).

Пусть $|X| = 0$. Согласно рекуррентному методу, полагаем значение сет-функции на пустом множестве событий равным единице: $f(\varnothing) = 1$.

Пусть $|X| = 1$. Тогда для любого моноплета $X = \{x\}$, состоящего из одного события $x \in \mathfrak{X}$, полагаем значения сет-функции на событиях равными вероятностям этих событий, т. е. $f(X) = \mathbf{P}(x) = p_x$.

Пусть $|X| = 2$. Рассмотрим произвольный дуплет событий $X = \{x, y\}$, $x, y \in \mathfrak{X}$. Согласно (2) и (4), значение сет-функции равно

$$f(\{x,y\}) = \mathbf{P}(x \cap y) = \mathrm{Frank}(p_x, p_y; \alpha) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha p_x}-1)(e^{-\alpha p_y}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right).$$

Пусть $|X| = 3$. Рассмотрим произвольный триплет событий $X = \{x, y, z\}$, $x, y, z \in$ $\in \mathfrak{X}$. Найдём значение сет-функции на этом триплете, используя (2), (4) и значение сет-функции $f(\{x,y\})$, полученное на предыдущем шаге:

$$\begin{gathered}f(\{x,y,z\}) = \mathbf{P}(x\cap y\cap z) = \mathrm{Frank}(\mathrm{Frank}(p_x,p_y;\alpha),p_z;\alpha) = \\ = \mathrm{Frank}(f(\{x,y\}),p_z;\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(e^{-\alpha\cdot f(\{x,y\})}-1)(e^{-\alpha p_z}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right).\end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим $e^{-\alpha\cdot f(\{x,y\})}$:

$$e^{-\alpha\cdot f(\{x,y\})} = e^{-\alpha\left[-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(e^{-\alpha p_x}-1)(e^{-\alpha p_y}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right)\right]} = 1+\frac{(e^{-\alpha p_x}-1)(e^{-\alpha p_y}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}. \tag{7}$$

Подставим (7) в (6) и получим

$$\begin{gathered}f(\{x,y,z\}) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\left(\left(1+\frac{(e^{-\alpha p_x}-1)(e^{-\alpha p_y}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right)-1\right)(e^{-\alpha p_z}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right) = \\ = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(e^{-\alpha p_x}-1)(e^{-\alpha p_y}-1)(e^{-\alpha p_z}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^2}\right).\end{gathered}$$

Пусть $|X| = 4$. Рассмотрим произвольный четырёхплет событий $X = \{x,y,z,v\}$, $x,y,z,v\in\mathfrak{X}$. Найдём значение сет-функции на этом четырёхплете, используя (2), (4) и значение сет-функции $f(\{x,y,z\})$, полученное на предыдущем шаге для триплета событий:

$$\begin{gathered}f(\{x,y,z,v\}) = \mathbf{P}(x\cap y\cap z\cap v) = \\ = \mathrm{Frank}(\mathrm{Frank}(\mathrm{Frank}(p_x,p_y;\alpha),p_z;\alpha),p_v;\alpha) = \mathrm{Frank}(f(\{x,y,z\}),p_v;\alpha) = \\ = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(e^{-\alpha f(\{x,y,z\})}-1)(e^{-\alpha p_v}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right).\end{gathered}$$

Аналогично (7) можно доказать, что

$$e^{-\alpha f(\{x,y,z\})} = 1+\frac{(e^{-\alpha p_x}-1)(e^{-\alpha p_y}-1)(e^{-\alpha p_z}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}f(\{x,y,z,v\}) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\left[1+\frac{(e^{-\alpha p_x}-1)(e^{-\alpha p_y}-1)(e^{-\alpha p_z}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^2}-1\right](e^{-\alpha p_v}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right) = \\ = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(e^{-\alpha p_x}-1)(e^{-\alpha p_y}-1)(e^{-\alpha p_z}-1)(e^{-\alpha p_v}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^3}\right).\end{gathered}$$

Пусть $|X| = n$, $n\leqslant N$. Для произвольного n-плета событий X значения сет-функции будем находить аналогичным образом, используя рекуррентную формулу (2) и значения сет-функции, найденные на предыдущих $n-1$ шагах:

$$f(X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right) = \mathrm{Frank}\left(f(X\setminus\{t\}),p_t;\alpha\right) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\prod\limits_{x\in X}(e^{-\alpha p_x}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^{n-1}}\right).$$

Лемма доказана. ■

Рассмотрим условия, при которых построенная сет-функция $\{f(X), X\subseteq\mathfrak{X}\}$ является вероятностным распределением случайного множества.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$, $N = |\mathfrak{X}|$, — конечное множество событий, выбранных из алгебры $\mathcal{F}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, и известны вероятности событий $p_x = \mathbf{P}(x) > 0$, $x \in \mathfrak{X}$. Тогда сет-функция $\{f(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$, значения которой определяются рекуррентным методом с ассоциативной функцией Франка (4), является вероятностным распределением II рода случайного множества событий при выполнении следующей системы из $2^N - N - 1$ неравенств:

$$1 \leqslant \prod_{Y \in 2^{\mathfrak{X}}: X \subseteq Y} \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in Y} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|Y|-1}}\right)^{\frac{(-1)^{|Y|-|X|+1}}{\alpha}} \leqslant e, \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \quad \alpha \neq 0.$$

Доказательство. Согласно лемме 3, значения сет-функции $\{f(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$, построенной рекуррентным методом с ассоциативной функцией (4), определяются по формуле (5). Построим новую сет-функцию $\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$, преобразовав сет-функцию $\{f(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ по формулам обращения Мёбиуса (1). Напомним, что сет-функция $f(X)$ задана на множествах событий $\{K \supseteq X\} = \left(\bigcap\limits_{x \in X} x\right)$, а сет-функция $p(X)$ — на множествах событий $\{K = X\} = \left(\bigcap\limits_{x \in X} x\right) \cap \left(\bigcap\limits_{x \in X^c} x^c\right)$ [8, 10].

Для любого $X \subseteq \mathfrak{X}$ по формуле (1) получаем

$$p(X) = \sum_{Y \in 2^{\mathfrak{X}}: X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} \cdot f(Y) = \sum_{Y \in 2^{\mathfrak{X}}: X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} \cdot \ln \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in Y} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|Y|-1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \ln \prod_{Y \in 2^{\mathfrak{X}}: X \subseteq Y} \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in Y} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|Y|-1}}\right)^{\frac{(-1)^{|Y|-|X|+1}}{\alpha}}.$$

Таким образом, получили новую сет-функцию $\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ на множестве событий $\mathfrak{X}$ со значениями, которые определяются по формуле

$$p(X) = \ln \prod_{Y \in 2^{\mathfrak{X}}: X \subseteq Y} \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in Y} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|Y|-1}}\right)^{\frac{(-1)^{|Y|-|X|+1}}{\alpha}}, \quad X \subseteq X. \tag{8}$$

Полученная сет-функция является распределением I рода по лемме 1, если для неё выполняются условия неотрицательности $0 \leqslant p(X) \leqslant 1$, $X \subseteq \mathfrak{X}$ и $\sum\limits_{X \subseteq \mathfrak{X}} p(X) = 1$.

Выполнение последнего условия гарантирует формула обращения Мёбиуса (1) [8].

Проверим условия неотрицательности значений полученной сет-функции. Будем рассматривать значения по убыванию мощности, т. е. $|X| = N, N-1, \ldots, 0$.

Пусть $|X| = N$, т. е. $X = \mathfrak{X}$. Необходимо доказать, что $0 \leqslant p(\mathfrak{X}) \leqslant 1$. Из (8) имеем

$$p(\mathfrak{X}) = \ln \prod_{Y \in 2^{\mathfrak{X}}: \mathfrak{X} \subseteq Y} \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in Y} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|Y|-1}}\right)^{\frac{(-1)^{|Y|-N+1}}{\alpha}} = \ln \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in \mathfrak{X}} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{N-1}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = f(\mathfrak{X}).$$

Из леммы 2 следует, что $0 \leqslant p(\mathfrak{X}) \leqslant 1$.

Пусть $|X| = N-1$, т. е. $X = \mathfrak{X} \setminus \{t\}$. Из (8) имеем

$$p(\mathfrak{X} \setminus \{t\}) = \ln \prod_{Y \in 2^{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \setminus \{t\} \subseteq Y} \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in Y} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|Y|-1}}\right)^{\frac{(-1)^{|Y|-(N-1)+1}}{\alpha}} =$$

$$= \ln \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in \mathfrak{X} \setminus \{t\}} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{N-2}}\right)^{\frac{-1}{\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in \mathfrak{X}} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{N-1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \ln \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in \mathfrak{X} \setminus \{t\}} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{N-2}}\right)^{\frac{-1}{\alpha}} - \ln \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in \mathfrak{X}} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{N-1}}\right)^{\frac{-1}{\alpha}} = f(\mathfrak{X} \setminus \{t\}) - f(\mathfrak{X}).$$

Из леммы 2 и следствия 1 очевидно выполнение неравенства $0 \leqslant f(\mathfrak{X} \setminus \{t\}) - f(\mathfrak{X}) \leqslant 1$, отсюда $0 \leqslant p(\mathfrak{X} \setminus \{t\}) \leqslant 1$.

Получим оценку для оставшихся $2^N - N - 1$ множеств $X \subseteq \mathfrak{X}$ для (8):

$$0 \leqslant \ln \prod_{Y \in 2^{\mathfrak{X}} : X \subseteq Y} \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in Y} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|Y|-1}}\right)^{\frac{(-1)^{|Y|-|X|+1}}{\alpha}} \leqslant 1. \tag{9}$$

Используя свойства логарифма, переходим к следующей оценке:

$$1 \leqslant \prod_{Y \in 2^{\mathfrak{X}} : X \subseteq Y} \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in Y} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|Y|-1}}\right)^{\frac{(-1)^{|Y|-|X|+1}}{\alpha}} \leqslant e, \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \ \alpha \neq 0. \tag{10}$$

Следовательно, сет-функция, значения которой определяются рекуррентным методом с ассоциативной функцией Франка, является вероятностным распределением II рода случайного множества событий при выполнении системы из $2^N - N - 1$ неравенств (10). ■

Теорема 2 даёт инструмент для построения случайных множеств событий с заранее заданной структурой зависимостей. Из неё следует, что выполнение системы неравенств (10) зависит от выбора значения параметра α. Рассмотрим предельные случаи при $\alpha \to 0^{\pm}$ и $\alpha \to \pm\infty$.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$ — конечное множество событий, выбранных из алгебры $\mathcal{F}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$; случайное множество событий K на конечном множестве событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$ определяется вероятностным распределением II рода $\{p_X, X \subseteq \mathfrak{X}\}$, построенным ассоциативной функцией Франка

$$p_X = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\prod\limits_{x \in X} (e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|X|-1}}\right), \quad x \in X, \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \ \alpha \neq 0.$$

Тогда функция p_X

1) при $\alpha \to 0^{\pm}$ стремится к вероятностному распределению независимо-точечного случайного множества событий, определяемому ассоциативной функцией
$$\mathrm{AF}\,(p_x, x \in X) = \prod_{x\in X} p_x;$$

2) при $\alpha \to +\infty$ стремится к вероятностному распределению случайного множества вложенных событий, определяемому ассоциативной функцией
$$\mathrm{AF}\,(p_x, x \in X) = \min_{x\in X} p_x;$$

3) при $\alpha \to -\infty$ стремится к вероятностному распределению случайного множества событий, определяемому ассоциативной функцией
$$\mathrm{AF}\,(p_x, x \in \mathfrak{X}) = \max\left\{\sum_{x\in X} p_x - |X| + 1, 0\right\}, \quad |X| > 1.$$

Доказательство.

1) Рассмотрим вероятностное распределение случайного множества событий, построенное ассоциативной функцией Франка (4) при $\alpha \to 0^{\pm}$. Для всех $X \subseteq \mathfrak{X}$
$$\lim_{\alpha\to 0^{\pm}} p_X = \lim_{\alpha\to 0^{\pm}} \ln\left(1 + \frac{\prod\limits_{x\in X}(e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|X|-1}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} =$$
$$= \ln \lim_{\alpha\to 0^{\pm}} \left(1 + \frac{\prod\limits_{x\in X}(e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|X|-1}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = \ln \lim_{\alpha\to 0^{\pm}} \left(1 + \frac{\prod\limits_{x\in X}(-\alpha p_x)}{(-\alpha)^{|X|-1}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} =$$
(на этом этапе используем эквивалентность бесконечно малых величин, т. е. для $\alpha \to 0^{\pm}$ имеет место $(e^{-\alpha p_x} - 1) \sim (-\alpha p_x)$, $(e^{-\alpha} - 1) \sim (-\alpha)$)
$$= \ln \lim_{\alpha\to 0^{\pm}} \left(1 + \frac{(-\alpha)^{|X|}\prod\limits_{x\in X} p_x}{(-\alpha)^{|X|-1}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = \ln \lim_{\alpha\to 0^{\pm}} \left(1 + (-\alpha)\prod_{x\in X} p_x)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} =$$
$$= (\text{применяем второй замечательный предел}) = \ln e^{\lim\limits_{\alpha\to 0^{\pm}} \prod\limits_{x\in X} p_x} = \ln e^{\prod\limits_{x\in X} p_x} = \prod_{x\in X} p_x.$$
Следовательно, при $\alpha \to 0^{\pm}$ вероятностное распределение, построенное ассоциативной функцией Франка (4), стремится к вероятностному распределению независимо-точечного случайного множества событий [3–5], определяемому ассоциативной функцией $\mathrm{AF}(a, b) = a \cdot b$.

2) Рассмотрим вероятностное распределение случайного множества событий, построенное ассоциативной функцией Франка (4), когда $\alpha \to +\infty$. Сначала выделим $p_t = \min\limits_{x\in X} p_X$:
$$-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{\prod\limits_{x\in X}(e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|X|-1}}\right) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha p_t} - 1)\cdot \prod\limits_{x\in X\setminus\{t\}}(e^{-\alpha p_x} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{|X|-1}}\right) \leqslant$$

(теперь используем свойство монотонности A2, так как все $p_x \leqslant p_\varnothing = 1$, получаем)

$$\leqslant -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(e^{-\alpha p_t}-1)\cdot\prod\limits_{x\in X\setminus\{t\}}(e^{-\alpha p_\varnothing}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^{|X|-1}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(e^{-\alpha p_t}-1)(e^{-\alpha}-1)^{|X|-1}}{(e^{-\alpha}-1)^{|X|-1}}\right)=p_t=\min_{x\in X}p_X.$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to+\infty}-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\prod\limits_{x\in X}(e^{-\alpha p_x}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^{|X|-1}}\right)\leqslant\min_{x\in X}p_X.$$

Итак, для $\alpha\to+\infty$ вероятностное распределение, построенное ассоциативной функцией Франка (4), стремится к вероятностному распределению по ассоциативной функции $\mathrm{AF}(a,b)=\min\{a,b\}$, которая определяет случайное множество вложенных событий с вероятностным распределением II рода [3, 4].

3) Рассмотрим вероятностное распределение случайного множества событий, построенное ассоциативной функцией Франка (4), когда $\alpha\to-\infty$.

Для $\mathbf{P}(x\cap y)=\mathrm{Frank}(p_x,p_y;\alpha)$, где $X=\{x,y\}$, $X\subseteq\mathfrak{X}$, получаем

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\mathrm{Frank}(p_x,p_y;\alpha)=\lim_{\alpha\to-\infty}-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(e^{-\alpha p_x}-1)(e^{-\alpha p_y}-1)}{e^{-\alpha}-1}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to-\infty}-\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{e^{-\alpha}+e^{-\alpha(p_x+p_y)}-e^{-\alpha p_x}-e^{-\alpha p_y}}{e^{-\alpha}-1}\right)=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-\alpha(p_x+p_y-1)}\right)}{-\alpha}=$$

$$=\text{(по правилу Лопиталя)}\ =\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{\dfrac{e^{-\alpha(p_x+p_y-1)}}{1+e^{-\alpha(p_x+p_y-1)}}(-(p_x+p_y-1))}{-1}=$$

$$=(p_x+p_y-1)\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{e^{-\alpha(p_x+p_y-1)}}{1+e^{-\alpha(p_x+p_y-1)}}=\begin{cases}p_x+p_y-1, & \text{если}\quad p_x+p_y>1,\\ 0 & \text{иначе .}\end{cases}$$

Для $\mathbf{P}(x\cap y\cap z)=\mathrm{Frank}(\mathrm{Frank}(p_x,p_y,\alpha),p_z;\alpha)$, $X=\{x,y,z\}$, $X\subseteq\mathfrak{X}$, имеем

$$\lim_{\alpha\to-\infty}-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(e^{-\alpha p_x}-1)(e^{-\alpha p_y}-1)(e^{-\alpha p_z}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^2}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to-\infty}-\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{(e^{-\alpha}-1)^2+(e^{-\alpha p_x}-1)(e^{-\alpha p_y}-1)(e^{-\alpha p_z}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^2}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-\alpha(p_x+p_y+p_z-2)}\right)}{-\alpha}=$$

$$=\left(\sum_{t\in X}p_t-2\right)\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{e^{-\alpha(p_x+p_y+p_z-2)}}{1+e^{-\alpha(p_x+p_y+p_z-2)}}=\begin{cases}\sum\limits_{t\in X}p_t-2, & \text{если}\quad \sum\limits_{t\in X}p_t>2,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

...

Для n-плетов, $n < N$, $|X| = n$, получим

$$\lim_{\alpha\to-\infty} -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\prod\limits_{t\in X}(e^{-\alpha p_t}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^{n-1}}\right) = \lim_{\alpha\to-\infty} -\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{(e^{-\alpha}-1)^{n-1}+\prod\limits_{t\in X}(e^{-\alpha p_t}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^{n-1}}\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-\alpha\left(\sum\limits_{t\in X}p_t-n+1\right)}\right)}{-\alpha} = \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{\left(\ln\left(1+e^{-\alpha\left(\sum\limits_{t\in X}p_t-n+1\right)}\right)\right)'_\alpha}{-\alpha'_\alpha} =$$

$$= \left(\sum_{t\in X}p_t-n+1\right)\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{e^{-\alpha\left(\sum\limits_{t\in X}p_t-n+1\right)}}{1+e^{-\alpha\left(\sum\limits_{t\in X}p_t-n+1\right)}} = \begin{cases}\sum\limits_{t\in X}p_t-|X|+1, & \text{если } \sum\limits_{t\in X}p_t > |X|-1,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Итак, для $\alpha \to -\infty$ вероятностное распределение, построенное ассоциативной функцией Франка (4), стремится к вероятностному распределению по ассоциативной функции $\mathrm{AF}(a,b) = \max\{a+b-1, 0\}$. В [3, 4] показано, что вероятностное распределение случайного множества событий с использованием этой функции возможно только при выполнении определённых ограничений на входные вероятности событий. При этом возникают только три вида результирующих случайных множеств событий с соответствующими вероятностными распределениями:

1) случайное множество непересекающихся событий, если выполнено условие
$$\sum_{x\in\mathfrak{X}}p_x \leqslant 1, \quad p_X = 0, \quad |X| > 1;$$
2) случайное множество событий, принимающее значения с ненулевой вероятностью лишь на подмножествах мощности $|\mathfrak{X}|-1$ и $|\mathfrak{X}|$, если $|\mathfrak{X}|-1 < \sum\limits_{x\in\mathfrak{X}}p_x \leqslant |\mathfrak{X}|$;
3) случайное множество событий, принимающее значения с ненулевой вероятностью лишь на подмножествах мощности $|\mathfrak{X}|-1$, если $\sum\limits_{x\in\mathfrak{X}}p_x = |\mathfrak{X}|-1$.

Теорема доказана. ■

Для множества $\mathfrak{X}$, состоящего из N событий, существует набор из $2^N - N - 1$ арных ковариаций [10], которые определяются вероятностным распределением II рода случайного множества событий на $\mathfrak{X}$. $|X|$-арная ковариация произвольного множества событий $X \subset \mathcal{F}$, $|X| > 1$, с учётом (2) примет следующий вид:

$$\mathrm{Kov}_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X}x\right)-\prod_{x\in X}p_x = \mathrm{AF}\left(p_x, \mathbf{P}\left(\bigcap_{y\in X\setminus\{x\}}y\right)\right)-\prod_{x\in X}p_x = \mathrm{AF}\left(p_x, x\in X\right)-\prod_{x\in X}p_x.$$

Теорема 4. Для вероятностного распределения случайного множества событий, построенного ассоциативной функцией Франка, все арные ковариации Kov_X, $X \subseteq \mathfrak{X}$, $|X| > 1$, имеют вид

$$\mathrm{Kov}_X = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(\left(1+\frac{\prod\limits_{x\in X}(e^{-\alpha p_x}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^{|X|-1}}\right)e^{\alpha\cdot\prod\limits_{x\in X}p_x}\right), \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

Знак ковариации определяется знаком параметра $\alpha \in (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$.

Доказательство. Обозначим $E_X = 1 + \dfrac{\prod\limits_{x\in X}(e^{-\alpha p_x}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^{|X|-1}}$. Тогда

$$\mathrm{Kov}_X = p_X - \prod_{x\in X} p_x = -\tfrac{1}{\alpha}\ln(E_X) - \prod_{x\in X} p_x = -\frac{1}{\alpha}\ln(E_X) - \ln e^{\prod\limits_{x\in X} p_x} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\ln(E_X) - \ln\left(\left(e^{\prod\limits_{x\in X} p_x}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = -\frac{1}{\alpha}\ln(E_X) - \frac{1}{\alpha}\ln e^{\alpha\cdot\prod\limits_{x\in X} p_x} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\ln\left(E_X\cdot e^{\alpha\cdot\prod\limits_{x\in X} p_x}\right) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(\left(1+\frac{\prod\limits_{x\in X}(e^{-\alpha p_x}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^{|X|-1}}\right)e^{\alpha\cdot\prod\limits_{x\in X} p_x}\right).$$

Теорема доказана. ■

Заключение

Одной из важных, сложных и значимых задач для науки в целом и для отдельных сфер вероятностных приложений, таких, как экономика и статистика, является разработка методов определения, изучения и статистической оценки структуры зависимостей сложных распределений множеств событий большой размерности. Распределение случайного множества событий — это удобный математический аппарат для описания всех способов взаимодействия элементов между собой. Следует отметить, что вероятностное распределение случайного множества событий определяется набором 2^N параметров. Однако на практике из статистики нам доступны, как правило, лишь вероятности самих событий (N параметров). В работе рассматривается новый подход моделирования вероятностных распределений случайного множества событий, который позволяет уменьшить размерность задачи с 2^N до N параметров. Исследовано однопараметрическое семейство функций Франка в построении вероятностных распределений случайных множеств событий. Доказаны следующие теоремы:

— об условиях, при которых сет-функция, построенная ассоциативной функцией Франка, является вероятностным распределением II рода; о виде вероятностного распределения случайного множества событий I рода;

— о виде арных ковариаций.

Семейство всех подмножеств любого достаточно большого множества событий огромно, что приводит к невозможности определения нетривиального вероятностного распределения. В связи с этим необходим инструмент, который позволял бы аналитику «сортировать» вероятностные распределения случайного множества событий, учитывая их конкретные свойства. Использование однопараметрического семейства функций Франка позволяет получать набор распределений, описывающих случайные множества событий, структура зависимостей которых регулируется параметром α. Предложенный метод не претендует на универсальность, однако он позволяет получать в виде вероятностных распределений случайного множества событий и их характеристик входные данные для ряда моделей статистических систем, которые обладают сложной структурой зависимостей и взаимосвязей [10]. С помощью предложенного подхода можно решать задачу по восстановлению пропущенных множественных данных и прогнозирования числовых величин на основе нечисловой информации.

Случайные множества с распределениями, построенными ассоциативной функцией Франка, использовались в событийном анализе медицинских данных. На основе холтеровского мониторирования по данным за 2014–2015 г. Федерального государственного бюджетного учреждения «Федеральный Сибирский научно-клинический центр

Федерального медико-биологического агентства России» г. Красноярска было проанализировано множество событийных факторов «Патологии» = {наджелудочковые экстрасистолы; наджелудочковая тахикардия; желудочковые экстрасистолы; желудочковая тахикардия; AV-блокады; CA-блокады; внутрижелудочковые блокады; ишемия миокарда} и множество целевых событий «Целевые рекомендации» = {мероприятия по изменению образа жизни; медикаментозная терапия; кардиостимулятор; др. виды оперативного лечения}, характеризующее вмешательство врача для обеспечения повышения качества охраны здоровья пациента. По пациентам, для которых проводилось холтеровское исследование, сформировали группы по признакам: возраст, пол, район проживания. Данные группы определили множество «Пациенты». Главная цель обработки статистических данных состояла в обнаружении скрытых в них закономерностей. Эти закономерности или знания позволяют выявить и понять сущность зависимостей и, опираясь на имеющиеся данные, принимать управленческие решения. Для определения зависимости между двумя случайными множествами событий в [11] было предложено использовать сет-регрессию, которая устанавливает вид средней функциональной зависимости между этими двумя случайными множествами событий. Решение задачи сет-регрессии требует знания совместного распределения случайных множеств событий K и L, значения которых для данного примера содержатся в конечных множествах «Патологии» и «Целевые рекомендации». Совместное распределение формировалось с помощью ассоциативной функции Франка на основе полученных из обучающей выборки вероятностей самих событий. Сравнительный анализ экспериментальных и моделируемых данных позволил подобрать параметр α, обеспечивающий оптимальную близость рассматриваемых распределений. При анализе использовался предложенный в [12] алгоритм применения ассоциативных функций для оценки вероятности целевого события. Выходными данными в решаемой задаче являлась функция сет-регрессии множества L на K в виде условного сет-квантиля порядка h для каждой группы пациентов. Сет-регрессионный анализ данных можно использовать для прогнозирования кризисных состояний и управления риском наступления внезапной сердечной смерти. Программную реализацию задачи сет-регрессии предполагается использовать в качестве одного из модулей в экспертной системе для поддержки принятия решения специалистом в области управления здравоохранением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nguyen H. T.* An Introduction to Random Sets. Chapman and Hall/CRC, 2006. 240 p.
2. *Molchanov I.* The Theory of Random Sets. N. Y.: Springer, 2011. 488 p.
3. *Семенова Д. В., Лукьянова Н. А.* Рекуррентное построение дискретных вероятностных распределений случайных множеств событий // Прикладная дискретная математика. 2014. №4. С. 47–58.
4. *Lukyanova N. A. and Semenova D. V.* The study of discrete probabilistic distributions of random sets of events using associative function // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2014. Т. 7. №4. P. 500–514.
5. *Semenova D. V.and Lukyanova N. A.* Formation of probabilistic distributions of RSE by associative functions // ITMM 2014. CCIS. Springer International Publishing Switzerland, 2014. V. 487. P. 377–386.
6. *Alsina S., Frank M., and Schveizer B.* Associative Functions: Triangular Norms and Copulas. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006. 237 p.
7. *Frank M. J.* On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$ // Aequationes Math. 1979. No. 19. P. 194–226.

8. *Воробьев О. Ю., Воробьев А. О.* Суммирование сет-аддитивных функций и формула обращения Мёбиуса // Доклады РАН. 2009. Т. 336. № 4. С. 417–420.
9. *Воробьев О. Ю.* Сет-суммирование. Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1993. 137 с.
10. *Воробьев О. Ю.* Эвентология. Красноярск: СФУ, 2007. 433 с.
11. *Воробьёв О. Ю., Фомин А. Ю.* Регрессионный сет-анализ случайных событий. Красноярск: Краснояр. ун-т, 2004. 116 с.
12. *Лукъянова Н. А., Семенова Д. В.* Применение ассоциативных функций для оценки вероятности целевого события // Материалы Респуб. науч.-практич. конф. «Статистика и её применение» (Ташкент, 16–17 октября 2015 г.). Ташкент: Изд-во НУУз, 2015. С. 91–98.

REFERENCES

1. *Nguyen H. T.* An Introduction to Random Sets. Chapman and Hall/CRC, 2006. 240 p.
2. *Molchanov I.* The Theory of Random Sets. N. Y., Springer, 2011. 488 p.
3. *Semenova D. V., Lukyanova N. A.* Rekurrentnoe postroenie diskretnykh veroyatnostnykh raspredeleniy sluchaynykh mnozhestv sobytiy [Recurrent formation of discrete probabilistic distributions of random sets of events]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2014, no. 4, pp. 47–58. (in Russian)
4. *Lukyanova N. A. and Semenova D. V.* The study of discrete probabilistic distributions of random sets of events using associative function. J. SFU, Mathematics and Physics, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 500–514.
5. *Semenova D. V.and Lukyanova N. A.* Formation of probabilistic distributions of RSE by associative functions. ITMM 2014, CCIS, Springer International Publishing Switzerland, 2014, vol. 487, pp. 377–386.
6. *Alsina S., Frank M., and Schveizer B.* Associative functions: Triangular Norms and Copulas. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006. 237 p.
7. *Frank M. J.* On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. Aequationes Math., 1979, no. 19, pp. 194–226.
8. *Vorob'ev O. Yu. and Vorob'ev A. O.* Summirovanie set-additivnykh funktsiy i formula obrashcheniya Mëbiusa [Summation of set-additive functions and Möbius inversion formula]. Doklady Akademii Nauk, 2009, vol. 336, no. 4, pp. 417–420. (in Russian)
9. *Vorob'ev O. Yu.* Set-summirovanie [Set-summation]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1993. (in Russian)
10. *Vorob'ev O. Yu.* Eventologiya [Eventology]. Krasnoyarsk, SFU Publ., 2007. (in Russian)
11. *Vorob'ev O. Yu. and Fomin A. Yu.* Regressionnyy set-analiz sluchaynykh sobytiy [Regression analysis of random events]. Krasnoyarsk, KSU Publ., 2004. (in Russian)
12. *Lukyanova N. A. and Semenova D. V.* Primenenie assotsiativnykh funktsiy dlya otsenki veroyatnosti tselevogo sobytiya [The use of associative functions to estimate the target event probability]. Proc. konf. «Statistika i ee primenenie» (Tashkent, 16–17 October, 2015). Tashkent, NUUz Publ., 2015, pp. 91–98. (in Russian)