О ПОСТРОЕНИИ ФОРМУЛ КАРЛЕМАНА С ПОМОЩЬЮ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ПАРАМЕТР

А.Н. ПОЛКОВНИКОВ AND А.А. ШЛАПУНОВ

Аннотация. Пусть D – открытое связное множество с достаточно гладкой границей ∂D на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Возмущая задачу Коши для системы Коши-Римана $\overline{\partial} u = f$ в D с граничными данными на замкнутом множестве $S \subset \partial D$, мы получаем семейство смешанных задач типа Зарембы для уравнения Лапласа, зависящее от малого параметра $\varepsilon \in (0,1]$ в граничном условии. Несмотря на то, что смешанные задачи содержат некоэрцитивные граничные условия на $\partial D \setminus S$, каждая из них имеет единственное решение в подходящем гильбертовом пространстве $H^+(D)$, непрерывно вложенном в пространство Лебега $L^2(\partial D)$ и пространство Соболева-Слободецкого $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$. Соответствующее семейство решений $\{u_\varepsilon\}$ сходится в $H^+(D)$ к решению задачи Коши (если оно существует). Также мы доказываем, что существование решения задачи Коши в $H^+(D)$ эквивалентно ограниченности семейства $\{u_\varepsilon\}$ в этом пространстве. Таким образом, мы получили условия разрешимости для задачи Коши и эффективный метод построения ее решения в виде формул карлемановского типа.

Введение

Задача Коши для системы Коши-Римана (для голоморфных функций в классической версии) является давней проблемой, находящей свое применение в физике, электродинамике, механике жидкости и газа и т.д. (см. [1], [2], [3], и др.). На самом деле она является типичным примером некорректной задачи для более общего класса эллиптических систем (см., например, [4], [5], [3]) или даже эллиптических дифференциальных комплексов ([6], [7]).

Как отмечалось еще в [8], метод регуляризации наиболее эффективен для изучения данной задачи. Книги [2] и [3] дают достаточно полное описание условий разрешимости задачи, а так же пути ее регуляризации. Недавно был разработан новый подход (см., например, [9], [10], [11]), основанный на простом наблюдении, что решение задачи Коши для эллиптических уравнений можно свести к решению смешанных задач (возможно некоэрцитивных) для эллиптических уравнений с параметром.

Текущий прогресс в теории некоэрцитивных задач типа Зарембы ([12], [13]) позволяет нам упростить метод [10] и получить новый критерий разрешимости задачи, а так же построить ее точные и приближенные решения.

А именно, пусть D – открытое связное множество с достаточно гладкой границей ∂D в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Возмущая задачу Коши для системы

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35B25; Secondary 35J60.

Key words and phrases. оператор Коши-Римана, задача Коши, задача Зарембы, малый параметр, уравнение Лапласа.

Коши-Римана $\overline{\partial} u = f$ в D с граничными данными на замкнутом множестве $S \subset \partial D$, мы получим семейство смешанных задач типа Зарембы для уравнения Лапласа, зависящее от малого параметра $\varepsilon \in (0,1]$ в граничном условии. Несмотря на то, что смешанные задачи содержат некоэрцитивные граничные условия на $\partial D \setminus S$, каждая из них имеет единственное решение в подходящем гильбертовом пространстве $H^+(D)$, непрерывно вложенном в пространство Лебега $L^2(\partial D)$ и в пространство Соболева-Слободецкого $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$. Соответствующее семейство решений $\{u_\varepsilon\}$ сходится в $H^+(D)$ к решению задачи Коши (если оно существует). Также мы доказываем, что существование решения задачи Коши в $H^+(D)$ эквивалентно ограниченности семейства $\{u_\varepsilon\}$ в этом пространстве. Таким образом, мы получили условия разрешимости для задачи Коши и эффективный метод построения ее решения в виде формул карлемановского типа.

По сравнению с [10], мы рассматриваем несколько другие пространства Соболевского типа. Кроме того, вместо слабо сходящейся последовательности $\{u_\varepsilon\}$ в $L^2(D)$ при $\varepsilon \to +0$, мы получаем последовательность, сходящуюся к решению по норме пространства $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$.

1. Задача Коши

Пусть $\mathbb{R}^n$ – это n-мерное евклидово пространство, а $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость с точками $z = x_1 + \sqrt{-1}x_2$. Здесь $\sqrt{-1}$ обозначает мнимую единицу, а $x = (x_1, x_2)$ суть координаты в $\mathbb{R}^2$.

Обозначим через

$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

оператор Коши-Римана.

Пусть

$$\overline{\partial}^* = -\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

обозначает формально сопряженный оператор для $\overline{\partial}$. Известно, что $\overline{\partial}^*\overline{\partial} = -\Delta$, где Δ это стандартный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Пусть теперь D – открытое связное ограниченное множество (ограниченная область) с липшицевой границей ∂D в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Как обычно, под $L^2(D)$ мы понимаем гильбертово пространство измеримых функций в области D с конечной нормой, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{L^2(D)} = \int_D u\,\overline{v}\,dx.$$

Обозначим также через $H^s(D)$ пространство Соболева-Слободецкого функций в области D, $s \in \mathbb{R}_+$.

Для $u \in L^2(D)$ мы всегда будем понимать $\overline{\partial} u$ как распределение над D.

Рассмотрим некорректную задачу Коши для оператора Коши-Римана в области D с граничными данными на открытом непустом множестве $S \subset \partial D$.

Задача 1.1. *Дано распределение f в D и распределение u_0 на S, найти распределение u в D, удовлетворяющее, в подходящем смысле,*

$$\begin{cases} \overline{\partial} u = f & \text{в} \quad D, \\ u = u_0 & \text{на} \quad S. \end{cases}$$

Если распределение u_0 обладает достаточной регулярностью, то мы можем свести задачу 1.1 к случаю, когда граничные условия равны нулю. Например, если граница ∂S множества S кусочно-гладкая и $u_0 \in H^{1/2}(S)$, тогда мы можем найти $\tilde{u}_0 \in H^{1/2}(\partial D)$, совпадающую с u_0 на S, и затем использовать интеграл Пуассона P задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$P : H^{1/2}(\partial D) \to H^1(D),$$

где оператор P является линейным, ограниченным, и

$$\begin{cases} \Delta P u_0 = 0 & D, \\ t(P\tilde{u}_0) = \tilde{u}_0 & \partial D \end{cases}$$

(здесь $t : H^1(D) \to H^{1/2}(\partial D)$ это стандартный оператор следа).

Мы хотим контролировать поведение решений задачи 1.1, с этой целью введем следующие функциональные пространства.

Пусть $\varepsilon \geq 0$, рассмотрим эрмитову форму

$$(u, v)_{+,\varepsilon} = \varepsilon\,(u, v)_{L^2(\partial D)} + (\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{L^2(D)}$$

на пространстве $C^\infty(\overline{D})$ (всех гладких функций в замыкании $\overline{D}$ области D). В силу классической формулы Коши для голоморфных функций, эта форма является скалярным произведением при любом $\varepsilon > 0$. Тогда функционал $\|u\|_{+,\varepsilon} = \sqrt{(u, u)_{+,\varepsilon}}$ является нормой для каждого $\varepsilon > 0$. Очевидно, нормы $\|u\|_{+,\varepsilon}$ и $\|u\|_{+,\delta}$ эквивалентны для любых положительных ε и δ. В частности,

$$\sqrt{\varepsilon}\,\|u\|_{+,1} \leq \|u\|_{+,\varepsilon} \leq \|u\|_{+,1} \text{ для всех } u \in H^+(D) \text{ и } 0 < \varepsilon \leq 1. \tag{1.1}$$

Обозначим через $H^+(D)$ пополнение пространства $C^\infty(\overline{D})$ по норме $\|\cdot\|_{+,\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon > 0$; из рассуждений выше следует, что пространство $H^+(D)$ не зависит от $\varepsilon > 0$. Заметим, что, по построению,

1) пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $L^2(\partial D)$, в частности, каждый элемент $u \in H^+(D)$ имеет корректно определенный след $t(u)$ на ∂D, а соответствующий оператор следа t непрерывно отображает $H^+(D)$ в $L^2(\partial D)$;

2) оператор $\overline{\partial}$ непрерывно отображает $H^+(D)$ в $L^2(D)$.

Дальнейшие свойства пространства $H^+(D)$ были описаны в [12] (см., также, [13]).

Теорема 1.2. *Если D – ограниченная область с липшицевой границей, то пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$. Более того, если $\partial D \in C^2$, то пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^{1/2}(D)$.*

Доказательство. См. [12, теорема 1] (ср. [13, теорема 2.5]). □

Заметим, что вложение точное, т.е. пространство $H^+(D)$ не может быть непрерывно вложено в $H^s(D)$ для любого $s > 1/2$ (см. [12, пример 2] либо [13]).

Эти результаты позволяют нам рассмотреть следующую версию задачи Коши для оператора Коши-Римана.

Задача 1.3. *По заданной функции $f \in L^2(D)$, найти $u \in H^+(D)$, удовлетворяющую*

$$\begin{cases} \overline{\partial} u = f & \textit{в} \quad D, \\ t(u) = 0 & \textit{на} \quad S. \end{cases}$$

Хорошо известно, что задача 1.3 является некорректной и имеет не более одного решения (см., например, [14], [15], [16], [17, теорема 2.8]).

Пусть теперь дано непустое множество $S \subset \partial D$. Обозначим через $C^\infty(\overline{D}, S)$ подмножество $C^\infty(\overline{D})$ всех функций, исчезающих на относительно открытом множестве $U \subset \overline{D}$, содержащем замыкание S в ∂D. В частности, $C^\infty(\overline{D}, \partial D)$ совпадает с пространством гладких функций с компактным носителем $C_0^\infty(D)$.

Обозначим также через $H^+(D, S)$ множество, состоящее из всех $u \in H^+(D)$, удовлетворяющих условию $t(u) = 0$ на S. Очевидно, что пространство $H^+(D, S)$ является замкнутым подпространством $H^+(D)$.

Теперь задача 1.3 сводится к исследованию инъективного ограниченного оператора

$$\overline{\partial} : H^+(D, S) \to L^2(D). \tag{1.2}$$

Опишем основные свойства области определения и образа этого оператора.

Используя неравенство Гординга, мы видим, что для $S = \partial D$ пространство $H^+(D, \partial D)$ совпадает с $H_0^1(D)$, т.е. с замкнутым подпространством пространства Соболева $H^1(D)$, состоящего из всех $u \in H^1(D)$ удовлетворяющих условию $t(u) = 0$ на ∂D.

Лемма 1.4. *Для всех $u \in H^+(D, S)$ мы имеем $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $u \in H^+(D, S) \subset H^+(D)$. Так как оператор Коши-Римана $\overline{\partial}$ эллиптический и $\overline{\partial} u \in L^2(D)$, то мы заключаем, что $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(D)$.

Возьмем область $G \subset D$ такую, что $\overline{G} \cap \overline{D} = S_1 \subset S$ и функцию $\varphi \in C^\infty(\overline{D})$ с компактным носителем в $G \cup S_1$. Тогда

$$\overline{\partial}(\varphi u) = (\overline{\partial} u)\varphi + (\overline{\partial}\varphi) u \in L^2(D)$$

и $t(\varphi u) = 0$ на ∂D.

Обозначим через $H^{-1}(D)$ двойственное пространство к $H^1(D, \partial D)$ относительно спаривания, задаваемого скалярным прозведением пространства $L^2(D)$. Тогда распределение $F = \overline{\partial}^* \overline{\partial}(\varphi u)$ принадлежит $H^{-1}(D)$, так как

$$|(\overline{\partial}(\varphi u), \overline{\partial} v)_{L^2(D)}| = |((\overline{\partial} u)\varphi + (\overline{\partial}\varphi) u, \overline{\partial} v)_{L^2(D)}| \leq c(u, \varphi) \|v\|_{H^1(D)}$$

с некоторой константой $c(u, \varphi)$, не зависящей от $v \in H^1(D, \partial D)$.

В частности,

$$(\overline{\partial}(\varphi u), \overline{\partial} v)_{L^2(D)} = \langle F, v \rangle \text{ для всех } v \in H^1(D, \partial D),$$

где $\langle F, v \rangle$ обозначает действие распределения F на тестовую функцию v. Это означает, что функция φu является единственным решением задачи Дирихле для оператора Лапласа $\Delta = -\overline{\partial}^* \overline{\partial}$ с данными $F \in H^{-1}(D)$ и граничными данными $t(\varphi u) = 0$ на ∂D (см., например, [18]). Следовательно, в силу произвольности области G и функции φ (обладающими описанными выше свойствами), $\varphi u \in H^1(D)$ и $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)$, что и следовало доказать. □

Как мы уже отмечали, $H^+(D, \partial D) = H_0^1(D)$. В частности, $H^+(D, \partial D)$ есть замыкание пространства гладких функций с компактным носителем $C_0^\infty(D)$. Теперь мы хотим подобным же образом описать пространство $H^+(D, S)$.

Теорема 1.5. *Пусть $\partial D \setminus S$ имеет непустую внутренность на ∂D. Если $\partial D \in C^\infty$, то $H^+(D, S)$ есть замыкание $C^\infty(\overline{D}, S)$ в пространстве $H^+(D)$.*

Доказательство. По определению замыкание H пространства $C^\infty(\overline{D}, S)$ в $H^+(D)$ есть замкнутое подпространство $H^+(D, S)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что ортогональное дополнение $H^\perp$ пространства H в $H^+(D, S)$ тривиально.

С этой целью зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $u \in H^+(D, S)$, удовлетворяющее $(u, v)_{+,\varepsilon} = 0$ для всех $v \in C^\infty(\overline{D}, S)$. В силу того, что $C^\infty(\overline{D}, \partial D) \subset C^\infty(\overline{D}, S)$, мы имеем

$$(\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} = 0 \text{ для всех } v \in C^\infty(\overline{D}, \partial D), \tag{1.3}$$

т.е. $-\overline{\partial}^*(\overline{\partial} u) = 0$ в D в смысле распределений. Так как оператор $\overline{\partial}^*$ эллиптический, то решения для этого уравнения являются гладкими функциями над D; действительно, функция $\overline{\partial} u$ является антиголоморфной в D функцией класса $L^2(D)$ (т.е. $\overline{\overline{\partial} u}$ является голоморфной).

Пусть ρ обозначает порождающую функцию области D:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \rho(z) < 0\}.$$

Так как $\partial D \in C^\infty$, мы можем выбрать $\rho \in C^\infty(U)$ для окрестности U границы ∂D с $|\nabla\rho| \neq 0$ на ∂D такое, что векторное поле $\nu = \frac{\nabla\rho}{|\nabla\rho|}$ является векторным полем единичных нормалей к ∂D. При достаточно малых $\delta > 0$ рассмотрим области

$$D_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \rho(z) < -\delta\}.$$

Ясно, что $D_\delta \Subset D$ и $\rho_\delta = \rho + \delta$ является порождающей функцией области D_δ с $\nabla\rho = \nabla\rho_\delta$, а $\nu_\delta = \frac{\nabla\rho}{|\nabla\rho|}$ есть векторное поле единичных нормалей к ∂D_δ. Тогда голоморфная функция $g = \overline{\overline{\partial} u}$ имеет слабое граничное значение $g_0 \in \mathcal{D}'(\partial D)$ на ∂D в том смысле, что

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{\partial D_\delta} g(\zeta) v(\zeta) ds_\delta(\zeta) = \langle g_0, v \rangle \text{ для всех } v \in C^\infty(\overline{D}),$$

смотрите [15, следствие 2.3] либо [17, теорема 4.4] (здесь $\mathcal{D}'(\partial D)$ - это пространство распределений на ∂D, а $\langle g_0, v\rangle$ обозначает действие распределения g_0 на тестовую функцию v).

Пользуясь свойствами интеграла Пуассона P и тем фактом, что $|\nu_1 + \sqrt{-1}\nu_2| = 1$ на ∂D, мы заключаем, что функция $w = P(v/(\nu_1 + \sqrt{-1}\nu_2))$ принадлежит $C^\infty(\overline{D}, S)$ для каждого $v \in C^\infty(\overline{D}, S)$. Пользуясь формулой интегрирования по частям и (1.3), получаем

$$0 = (\overline{\partial} w, \overline{\partial} u)_{L^2(D)} = (\overline{\partial} w, \overline{g})_{L^2(D)} = \lim_{\delta \to +0} (\overline{\partial} w, \overline{g})_{L^2(D_\delta)} = \tag{1.4}$$

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{\partial D_\delta} g(\zeta) w(\zeta) d\zeta = \lim_{\delta \to +0} \int_{\partial D_\delta} g(\zeta)(\nu_{\delta,1} + \sqrt{-1}\nu_{\delta,2})(\zeta) w(\zeta) ds_\delta(\zeta) =$$

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{\partial D_\delta} g(\zeta) v(\zeta) ds_\delta(\zeta) = \langle g_0, v(\zeta)\rangle \text{ для всех } v \in C^\infty(\overline{D}, S),$$

где $\nu_{\delta,j}$ – это компоненты вектора нормали ν_δ. Так как для любой функции $w \in C^\infty(\overline{D}, S)$ ее сужение $w_{|\partial D}$ на ∂D имеет компактный носитель в $\partial D \setminus S$, мы видим, что g_0 равняется нулю на $\partial D \setminus S$. Следовательно, g исчезает на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений. Теперь, в силу того, что g голоморфна (т.е. является решением эллиптического оператора $\overline{\partial}$), из [17, теорема 2.8] следует, что g равняется тождественно нулю в D.

Таким образом, мы заключаем, что функция $g = \overline{\overline{\partial} u} = 0$ в D, т.е. функция $u \in L^2(D)$ голоморфна в D. По предположению, она исчезает на непустом относительно открытом множестве $S \subset \partial D$. Наконец, так как оператор первого порядка $\overline{\partial}$ эллиптичен, из [17, теорема 2.8] следует, что u равняется тождественно нулю в D. □

Лемма 1.6. *Пусть $\partial D \setminus S$ имеет непустую внутренность на ∂D. Если $\partial D \in C^\infty$, то образ оператора (1.2) плотен в $L^2(D)$.*

Доказательство. Пусть $g \in L^2(D)$ удовлетворяет

$$(g, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} = 0 \text{ для всех } v \in H^+(D, S).$$

Аргументируя аналогично доказательству теоремы 1.5, мы заключаем, что $\overline{\partial}^* g = 0$ в D и $g = 0$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений. Так как g антиголоморфна (т.е. является решением эллиптического оператора $\overline{\partial}^*$) из [17, теорема 2.8] следует, что g равняется тождественно нулю в D. □

Таким образом, мы описали замыкание образа отображения (1.2). Более сложной задачей является описание самого образа отображения (1.2). Следующая лемма делает первый шаг в данном направлении.

Для распределения f, определенного около ∂D, положим $\nu(f) = (\nu_{\delta,1} + \sqrt{-1}\nu_{\delta,2})f$, а для распределения u, определенного около ∂D, положим $\overline{\partial}_\nu u = (\nu_{\delta,1} + \sqrt{-1}\nu_{\delta,2})\overline{\partial} u$. На самом деле, $\overline{\partial}_\nu u$ – это так называемая комплексная нормальная производная функции u.

Лемма 1.7. *Пусть $\partial D \in C^\infty$. Если $f \in L^2(D)$, то функция $u \in H^+(D, S)$ является решением задачи 1.3 в том и только в том случае, когда*

$$(\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} = (f, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} \tag{1.5}$$

для всех $v \in H^+(D, S)$.

Доказательство. Если задача 1.3 разрешима и u одно из ее решений, то (1.5) очевидно выполнено.

Обратно, если (1.5) выполнено для любого элемента $u \in H^+(D, S)$, то $\overline{\partial}^*(\overline{\partial} u - f) = 0$ в D, так как пространство $H^+(D, S)$ содержит все гладкие функции с компактным носителем в D. В частности, функция $\overline{(\overline{\partial} u - f)}$ голоморфна в D. Интегрируя как в (1.4), мы получаем

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{\partial D_\delta} \overline{(\overline{\partial} u - f)(\zeta)} v(\zeta) ds_\delta(\zeta) = \lim_{\delta \to +0} \int_{\partial D_\delta} \overline{(\overline{\partial} u - f)(\zeta)} w(\zeta) d\zeta = \tag{1.6}$$

$$(w, (\overline{\partial}^* (\overline{\partial} u - f)))_{L^2(D)} - (\overline{\partial} w, \overline{\partial} u - f)_{L^2(D)} =$$

$$-(\overline{\partial} w, \overline{\partial} u - f)_{L^2(D)} = 0$$

для всех $v \in C^\infty(\overline{D}, S)$, так как $w \in C^\infty(\overline{D}, S)$. Следовательно, как и в доказательстве теоремы 1.5, мы видим, что $\overline{\partial} u - f = 0$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений.

Наконец, так как $(\overline{\partial} u - f)$ является антиголоморфной (т.е. решением эллиптического оператора $\overline{\partial}^*$), то из [17, теорема 2.8] следует, что $(\overline{\partial} u - f)$ равняется тождественно нулю в D. □

Замечание 1.1. Согласно [15, следствие 2.3], слабые граничные значения голоморфных (антиголоморфных) функций класса $L^2(D)$ в области D принадлежат пространству Соболева $H^{-1/2}(\partial D)$ на компактном множестве ∂D. Это означает, что эти следы имеют конечный порядок особенности на ∂D. Следовательно, все вышеперечисленные результаты действительны для областей с конечным (вероятно достаточно высоким) порядком гладкости границы.

В заключении этого параграфа поясним значение (1.5). Это равенство означает, что решение $u \in H^+(D,S)$ задачи Коши $\overline{\partial} u = f$ на самом деле является решением смешанной задачи типа Зарембы

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \overline{\partial}^* f & \text{в} \quad D; \\ t(u) & = & 0 & \text{на} \quad S, \\ \overline{\partial}_\nu u & = & \nu(f) & \text{на} \quad \partial D \setminus S. \end{array} \right. \tag{1.7}$$

Действительно, из доказательства леммы 1.7 вытекает, что

$$\overline{\partial}^* \overline{\partial} u = -\Delta u = \overline{\partial}^* f \text{ в } D$$

в пространстве распределений и $\nu(\overline{\partial} u - f) = 0$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений. В частности, если вектор $\nu(f)$ корректно определен на $\partial D \setminus S$, то и $\overline{\partial}_\nu u$ так же корректно определен на $\partial D \setminus S$.

Конечно, смешанная задача (1.7), рассмотренная в подходящих пространствах, дает ничто иное, как (1.5). В следующем параграфе мы получим условия разрешимости задачи 1.3.

2. Об одном возмущении задачи Коши

Последнее наблюдение предыдущего параграфа наталкивает нас на мысль о возмущении задачи 1.3 с целью получения смешанной задачи типа Зарембы (1.7).

С учетом леммы 1.7, мы рассмотрим следующую возмущенную задачу Коши:

Задача 2.1. *Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1]$. По заданной функции $f \in L^2(D)$, найти элемент $u_\varepsilon \in H^+(D,S)$, удовлетворяющий*

$$(\overline{\partial} u_\varepsilon, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} + \varepsilon\, (u_\varepsilon, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} = (f, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} \tag{2.1}$$

для всех $v \in H^+(D,S)$.

Заметим, что уравнение (2.1) приводит к возмущению смешанной задачи (1.7). Более точно,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u_\varepsilon & = & \overline{\partial}^* f & \text{в} \quad D; \\ t(u_\varepsilon) & = & 0 & \text{на} \quad S, \\ \overline{\partial}_\nu u_\varepsilon + \varepsilon\, t(u_\varepsilon) & = & \nu(f) & \text{на} \quad \partial D \setminus S. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Так как пространство $H^+(D,S)$ содержит все гладкие функции с компактным носителем в D, (2.1) означает, что $-\Delta u_\varepsilon = \overline{\partial}^* f$ в D в смысле распределений. Граничное условие $t(u_\varepsilon) = 0$ на S следует из определения пространства $H^+(D,S)$. Наконец, равенство $\nu(\overline{\partial} u_\varepsilon) + \varepsilon t(u_\varepsilon) = \nu(f)$ выполнено в том смысле, что $\nu(\overline{\partial} u_\varepsilon - f) + \varepsilon\, t(u_\varepsilon) = 0$ на $\partial D \setminus S$, так как

$$\overline{\partial}^* (\overline{\partial} u_\varepsilon - f) = 0 \in L^2(D)$$

в смысле распределений в D, $\overline{(\overline{\partial} u_\varepsilon - f)}$ голоморфна в D и, интегрируя по частям как в (1.6) с использованием (2.1), мы получаем

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial D_\delta} \overline{(\overline{\partial} u_\varepsilon - f)(\zeta)} v(\zeta) ds_\delta(\zeta) = \lim_{\delta\to+0}\int_{\partial D_\delta} \overline{(\overline{\partial} u_\varepsilon - f)(\zeta)} w(\zeta) d\zeta =$$

$$(\overline{\partial} w, \overline{\partial} u_\varepsilon - f)_{L^2(D)} = -\varepsilon (w, t(u_\varepsilon))_{L^2(\partial D\setminus S)} = -\varepsilon \left(v, \frac{t(u_\varepsilon)}{\nu_1 + \sqrt{-1}\nu_2}\right)_{L^2(\partial D\setminus S)},$$

для всех $v \in C^\infty(\overline{D}, S)$, т.е. $\overline{(\overline{\partial} u_\varepsilon - f)}$ совпадает с $-\varepsilon\, t(\overline{u_\varepsilon})/(\nu_1 + \sqrt{-1}\nu_2)$ на $\partial D\setminus S$ в смысле слабых граничных значений. Следовательно, $\nu(\overline{\partial} u_\varepsilon - f) + \varepsilon t(u_\varepsilon) = 0$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений. Если сужение $\nu(f)$ на $\partial D \setminus S$ имеет смысл, то сужение $\nu(\overline{\partial} u_\varepsilon - f)$ так же корректно определено, так как $t(u_\varepsilon) \in L^2(\partial D)$.

Ясно, что смешанная задача (2.2), рассмотренная в подходящих пространствах, дает ничто иное, как (2.1).

На самом деле (1.7) и (2.2) являются смешанными задачами с граничными условиями робеновского типа. Это аналоги так называемой задачи Зарембы для оператора Лапласа (см. [19]). В общем случае смешанные задачи (1.7) и (2.2) имеют некоэрцитивные граничные условия на $\partial D\setminus S$ (см. [10], [13]). Следовательно, они не могут быть корректными в весовых пространствах Соболева, см. [20]. Принципиальная разница между задачами 1.3 и 2.1 в том, что последняя корректна в $H^+(D, S)$.

Лемма 2.2. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in L^2(D)$ существует единственное решение $u_\varepsilon(f) \in H^+(D, S)$ задачи 2.1. Более того, оно удовлетворяет*

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+,\varepsilon} \leq \|f\|_{L^2(D)}.$$

Доказательство. Действительно, как мы видели выше, пространство $H^+(D, S)$, наделенное скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{+,\varepsilon}$, является гильбертовым. Из неравенства Шварца следует, что

$$\left|(f, \overline{\partial} v)_{L^2(D)}\right| \leq \|f\|_{L^2(D)} \|\overline{\partial} v\|_{L^2(D)} \leq \|f\|_{L^2(D)} \|v\|_{+,\varepsilon}$$

для всех $v \in H^+(D, S)$. Следовательно, отображение

$$v \mapsto (f, \overline{\partial} v)_{L^2(D)}$$

определяет непрерывный линейный функционал $\mathcal{F}_f$ на $H^+(D, S)$, чья норма мажорируется следующим образом: $\|\mathcal{F}_f\| \leq \|f\|_{L^2(D)}$.

В силу теоремы Рисса мы заключаем, что существует единственный элемент $u_\varepsilon(f) \in H^+(D, S)$, удовлетворяющий

$$\mathcal{F}_f(v) = (u_\varepsilon(f), v)_{+,\varepsilon}$$

для любого $v \in H^+(D, S)$. Ясно, что $u_\varepsilon(f)$ является решением задачи 2.1. Наконец, по теореме Рисса мы имеем

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+,\varepsilon} \leq \|f\|_{L^2(D)},$$

что и требовалось доказать. □

Уравнения (2.2) показывают, что лемма 2.2 дает информацию о разрешимости смешанной задачи для оператора Лапласа Δ с очень специальными данными на D, S и $\partial D \setminus S$. Выясним, какие теоремы разрешимости могут быть получены для произвольных данных. С этой целью, обозначим через $H^-(D, S)$

двойственное к $H^+(D,S)$ пространство относительно спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$, индуцированному скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{L^2(D)}$ (см., например, [12], [13]). На самом деле это гильбертово пространство, изоморфное нормированному пространству, построенному как пополнение $H^+(D,S)$ по любой из норм

$$\|g\|_{-,\varepsilon} = \sup_{\substack{v\in H^+(D,S)\\ v\neq 0}} \frac{|(g,v)_{L^2(D)}|}{\|v\|_{+,\varepsilon}},\ \varepsilon>0.$$

Задача 2.3. *Зафиксируем $\varepsilon\in(0,1]$. Для заданного $g\in H^-(D,S)$ найти элемент $w_\varepsilon(g)\in H^+(D,S)$, удовлетворяющий*

$$(\overline{\partial} w_\varepsilon(g), \overline{\partial} v)_{L^2(D)} + \varepsilon\,(w_\varepsilon(g), v)_{L^2(\partial D\setminus S)} = \langle g, v\rangle \tag{2.3}$$

для любого $v\in H^+(D,S)$.

Лемма 2.4. *Для любых $\varepsilon>0$ и $g\in H^-(D,S)$ существует единственное решение $w_\varepsilon\in H^+(D,S)$ задачи 2.3. Более того, оно удовлетворяет*

$$\|w_\varepsilon(g)\|_{+,\varepsilon} \le \|g\|_{H^-(D,S)}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2.2 (см. [12, Lemma 3], [13]). □

На самом деле лемма 2.4 эквивалентна следующему: задача 2.3 индуцирует непрерывно обратимый линейный оператор $L_\varepsilon : H^+(D,S)\to H^-(D,S)$ с $\|L_\varepsilon\| = \|L_\varepsilon^{-1}\| = 1$.

Но даже в этом случае мы не можем гарантировать того, что $w_\varepsilon\in H^s(D)$ при любом $s>1/2$ без введения дополнительных ограничений на g. Эта ситуация является типичной для смешанных задач, см. [21], [20].

Однако, теорема 1.2, вместе с теоремами вложения Реллиха-Кондрашова и теоремой Гильберта-Шмидта, дают нам следующее преимущество: спектральную теорему, относящуюся к задаче 2.3.

Введем следующее скалярное произведение

$$(g,\tilde g)_{-,\varepsilon} = \langle g, L_\varepsilon^{-1}\tilde g\rangle$$

в пространстве $H^-(D,S)$; данное скалярное произведение определяет норму, которая равна $\|\cdot\|_{-,\varepsilon}$.

Лемма 2.5. *Для любого $\varepsilon\in(0,1]$ существуют положительные числа $\{\lambda_k^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb N}$ и функции $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb N}\subset H^+(D,S)$ такие, что*

$$(\overline{\partial} b_k^{(\varepsilon)}, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} + \varepsilon\,(b_k^{(\varepsilon)}, v)_{L^2(\partial D\setminus S)} = \lambda_k^{(\varepsilon)} (b_k^{(\varepsilon)}, v)_{L^2(D)} \tag{2.4}$$

для любого $v\in H^+(D,S)$. Система $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb N}$ является ортонормированным базисом в $H^+(D,S)$ (по норме $(\cdot,\cdot)_{+,\varepsilon}$), также это ортогональный базис в $L^2(D)$ и $H^-(D,S)$ (по норме $(\cdot,\cdot)_{-,\varepsilon}$). Более точно, $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb N}$ является системой собственных векторов компактных самосопряженных операторов

$$L_\varepsilon^{-1}\iota'\iota : H^+(D,S)\to H^+(D,S),\ \iota'\iota L_\varepsilon^{-1} : H^-(D,S)\to H^-(D,S),$$
$$\iota L_\varepsilon^{-1}\iota' : L^2(D)\to L^2(D),$$

соответствующих (положительным) собственным значениям $\{(\lambda_k^{(\varepsilon)})^{-1}\}_{k\in\mathbb N}$, где

$$\iota : H^+(D,S)\to L^2(D),\ \iota' : L^2(D)\to H^-(D,S)$$

суть операторы естественного вложения.

Доказательство. См. [12, лемма 4], [13]. □

По построению, каждая функция $b_k^{(\varepsilon)}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$-(\Delta - \varepsilon + \lambda_k^{(\varepsilon)}) b_k^{(\varepsilon)} = 0 \text{ в } D;$$

в частности, каждая функция $b_k^{(\varepsilon)}$ является вещественнозначной в D.

Кроме того, мы можем получить формулу для решения задачи 2.3. С этой целью, положим

$$\mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z,\zeta) = \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k^{(\varepsilon)}(z)\overline{b_k^{(\varepsilon)}(\zeta)}}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|_{L^2(D)}}.$$

Следствие 2.6. *Для каждого $g \in H^-(D,S)$ решение $w_\varepsilon(g) \in H^+(D,S)$ задачи 2.3 задается формулой*

$$w_\varepsilon(g)(z) = \lim_{N\to\infty} \langle g, \mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z,\cdot)\rangle, \ z \in D.$$

Доказательство. Из леммы 2.5 следует, что для всех $u \in H^+(D,S)$ и $g \in H^-(D,S)$ мы имеем

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, b_k^{(\varepsilon)})_{+,\varepsilon} b_k^{(\varepsilon)}, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(g, \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)})_{-,\varepsilon}}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|^2_{-,\varepsilon}} \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}.$$

С другой стороны, лемма 2.5 означает, что

$$L_\varepsilon b_k^{(\varepsilon)} = \lambda_k^{(\varepsilon)} \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)} \text{ and } L_\varepsilon u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, b_k^{(\varepsilon)})_{+,\varepsilon} \lambda_k^{(\varepsilon)} \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}.$$

Теперь, используя ортогональность системы $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, мы видим, что

$$(w_\varepsilon(g), b_k^{(\varepsilon)})_{+,\varepsilon} = \frac{(g, \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)})_{-,\varepsilon}}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|^2_{-,\varepsilon}}.$$

Наконец, по определению,

$$(g, \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)})_{-,\varepsilon} = \langle g, L_\varepsilon^{-1}\iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}\rangle = (\lambda_k^{(\varepsilon)})^{-1}\langle g, b_k^{(\varepsilon)}\rangle,$$
$$\|b_k^{(\varepsilon)}\|^2_{-,\varepsilon} = (\iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}, \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)})_{-,\varepsilon} = \langle \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}, L_\varepsilon^{-1}\iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}\rangle =$$
$$(\lambda_k^{(\varepsilon)})^{-1}\langle \iota'\iota b_k^{(\varepsilon)}, b_k^{(\varepsilon)}\rangle = \lambda_k^{(\varepsilon)} \|b_k^{(\varepsilon)}\|^2_{L^2(D)}$$

и, следовательно,

$$(w_\varepsilon(g), b_k^{(\varepsilon)})_{+,\varepsilon} = \frac{\langle g, b_k^{(\varepsilon)}\rangle}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|^2_{L^2(D)}}.$$

Поэтому

$$w_\varepsilon(g)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (w_\varepsilon(g), b_k^{(\varepsilon)})_{+,\varepsilon} b_k^{(\varepsilon)}(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{\langle g, b_k^{(\varepsilon)}\rangle}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|^2_{L^2(D)}} b_k^{(\varepsilon)}(z),$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 2.7. *Для каждого $f \in L^2(D)$ решение $u_\varepsilon \in H^+(D,S)$ задачи 2.1 задается формулой*

$$u_\varepsilon(f)(z) = \lim_{N\to+\infty} (f, \overline{\partial}\mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z,\cdot))_{L^2(D)}, \ z \in D.$$

Доказательство. Вытекает из следствия 2.6, с учетом следующей связи между данными задач 2.1 и 2.3:

$$\langle g, v \rangle = (f, \overline{\partial} v)_{L^2(D)},$$

(см. доказательство леммы 2.4). □

Обсудим теперь очень важный вопрос о том, как найти собственные вектора задачи Зарембы, а, следовательно, и решение задачи 1.3.

Пусть $\mathcal{D}$ - это единичный диск в $\mathbb{C}$. Построение системы $\{b_k^{(\varepsilon)}\}$ для $D = \mathcal{D}$ можно выполнить с использованием системы функций Бесселя

$$\mathcal{J}_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}} \frac{z^{2k+p}}{k!\,(k+p)!}, \quad \mathcal{J}_{-p}(z) = (-1)^p \mathcal{J}_p(z),\, z \in \mathbb{C},\, p \in \mathbb{Z}_+.$$

А именно, хорошо известно, что любая собственная функция задачи 2.3 в диске $\mathcal{D}$, отвечающая собственному значению $\lambda_k^{(\varepsilon)}$, имеет следующую форму

$$b_k^{(\varepsilon)}(z) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (z/|z|)^q\, \mathcal{J}_q(|z| \sqrt{\lambda_k^{(\varepsilon)}})\, d_q^{(\varepsilon)}(S), \tag{2.5}$$

с некоторыми коэффициентами $\{d_q^{(\varepsilon)}(S)\}_{q \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. Если $S = \emptyset$ или $S = \partial D$, тогда сумма состоит только из одного ненулевого слагаемого; если $S \neq \partial \mathcal{D}$ и $S \neq \emptyset$, тогда число ненулевых коэффициентов $d_q^{(\varepsilon)}(S)$ суммы не может быть конечным (см., например, [22, дополнение. II, с. 1, §2]. Собственное значение $\lambda_k^{(\varepsilon)}$ и коэффициенты $\{d_q^{(\varepsilon)}(S)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ могут быть найдены из отношения $b_k^{(\varepsilon)} = 0$ на S и $(\overline{\partial}_\nu + \varepsilon)\, b_k^{(\varepsilon)} = 0$ на $\partial D \setminus S$.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Неравенства (1.1) и лемма 2.2 дают нам следующую грубую оценку для семейства $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$:

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|u_\varepsilon(f)\|_{+,\varepsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, \|f\|_{L^2(D)},\, \varepsilon \in (0,1].$$

Таким образом, это семейство может быть неограниченным при $\varepsilon \to +0$. Выясним, как поведение семейства $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon > 0}$ влияет на разрешимость задачи 1.3.

Теорема 3.1. *Семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует $u \in H^+(D,S)$, удовлетворяющее (1.5).*

Доказательство. Сначала мы докажем следующую лемму.

Лемма 3.2. *Пусть существует такое множество $A \subset (0,1]$, что*

1) *нуль является предельной точкой A;*
2) *семейство $\{\|u_\delta(f)\|_{+,1}\}_{\delta \in A}$ ограничено.*

Тогда существует $u \in H^+(D,S)$, удовлетворяющее (1.5).

Доказательство. Предположим, что нуль является предельной точкой множества A и семейство $\{\|u_\delta(f)\|_{+,1}\}_{\delta \in A}$ ограничено. Согласно (2.1), мы имеем

$$(\overline{\partial} u_\delta(f), \overline{\partial} v)_{L^2(D)} + \delta\, (u_\delta(f), v)_{L^2(D)} = (f, \overline{\partial} v)_{L^2(D)}$$

для всех $v \in H^+(D,S)$. Переходя к пределу при $A \ni \delta \to +0$ в последнем равенстве и пользуясь тем фактом, что $\{u_\delta(f)\}_{\delta \in A}$ ограничено, мы получаем

$$\lim_{\delta \to +0} (\overline{\partial} u_\delta(f), \overline{\partial} v)_{L^2(D)} = (f, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} \tag{3.1}$$

для всех $v \in H^+(D,S)$.

Хорошо известно, что любое ограниченное множество в гильбертовом пространстве слабо компактно. Следовательно, существует подпоследовательность $\{u_{\delta_j}(f)\} \subset H^+(D,S)$, слабо сходящаяся в этом пространстве к элементу $u \in H^+(D,S)$. Здесь $\{\delta_j\}$ стремится к 0 при $j \to \infty$.

Покажем теперь, что $\{u_{\delta_j}(f)\}$ сходится слабо к u в $H^s(D)$ при $s < 1/2$ и $j \to \infty$.

Из теоремы 1.2 следует, что вложение $i_s : H^+(D,S) \to H^s(D)$ непрерывно для любого $s < 1/2$. Следовательно, сопряженный оператор $i_s^\star : H^s(D) \to H^+(D,S)$ также ограничен, а

$$\lim_{j \to \infty} (i_s u_{\delta_j}(f), v)_{H^s(D)} = \lim_{j \to \infty} (u_{\delta_j}(f), i_s^\star v)_{H^+(D,S)} = (u, i_s^\star v)_{H^+(D,S)}$$

для всех $v \in H^s(D)$. Это в точности означает, что $\{u_{\delta_j}(f)\}$ сходится слабо в $H^s(D)$.

Обозначим через $\overline{\partial}^\star : L^2(D) \to H^+(D,S)$ сопряженный к ограниченному линейному оператору $\overline{\partial} : H^+(D,S) \to L^2(D)$. Простые вычисления показывают

$$\lim_{A \ni \delta \to +0} (\overline{\partial} u_\delta(f), \overline{\partial} v)_{L^2(D)} = \lim_{A \ni \delta \to +0} (u_\delta(f), \overline{\partial}^\star \overline{\partial} v)_{H^+(D,S)} = \tag{3.2}$$

$$(u(f), \overline{\partial}^\star \overline{\partial} v)_{H^+(D,S)} = (\overline{\partial} u(f), \overline{\partial} v)_{L^2(D)}$$

для всех $v \in H^+(D,S)$. Комбинируя (3.1) и (3.2) мы видим, что (1.5) выполняется для функции $u \in H^+(D,S)$. □

Мы получим более сильное утверждение, чем теорема 3.1, если докажем следующую лемму.

Лемма 3.3. *Если существует функция $u \in H^+(D,S)$, удовлетворяющая (1.5), то семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ ограничено и*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|\overline{\partial}(u_\varepsilon(f) - u)\|_{L^2(D)} = 0.$$

Более того, $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ сходится слабо к $u \in H^+(D,S)$ при $\varepsilon \to +0$ и сходится к решению u в $H^s(D)$ для всех $s < 1/2$.

Доказательство. Пусть существует $u \in H^+(D,S)$, удовлетворяющее (1.5). Обозначим $R_\varepsilon = u_\varepsilon(f) - u$, тогда из (1.5) и (2.1) следует, что

$$(\overline{\partial} R_\varepsilon, \overline{\partial} v)_{L^2(D)} + \varepsilon\, (R_\varepsilon, v)_{L^2(\partial D)} = -\varepsilon\, (u, v)_{L^2(\partial D)} \tag{3.3}$$

для всех $v \in H^+(D,S)$. Так как

$$|-\varepsilon\, (u,v)_{L^2(\partial D)}| \le \varepsilon \|u\|_{L^2(\partial D)} \|v\|_{L^2(\partial D)} \le \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\partial D)} \|v\|_{+\varepsilon},$$

то отображение $v \mapsto -\varepsilon\, (u,v)_{L^2(\partial D)}$ определяет непрерывный линейный функционал $g_\varepsilon(u)$ в пространстве $H^+(D,S)$ и

$$\|g_\varepsilon(u)\| \le \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\partial D)}.$$

Таким образом, (3.3) означает, что $R_\varepsilon = w_\varepsilon(g_\varepsilon(u))$ есть решение задачи 2.3 с данными $g = g_\varepsilon(u)$.

Согласно (1.1) и лемме 2.4, мы имеем

$$\|R_\varepsilon\|_{+,1} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\|R_\varepsilon\|_{+,\varepsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\sqrt{\varepsilon}\,\|u\|_{L^2(\partial D)} = \|u\|_{L^2(\partial D)}.$$

Следовательно, семейство $\{\|R_\varepsilon\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$, а также семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$, ограничены. Из (3.3) следует

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\|\overline{\partial}(u_\varepsilon(f)-u)\|^2_{L^2(D)} = \lim_{\varepsilon\to+0}\|\overline{\partial}R_\varepsilon\|^2_{L^2(D)} =$$

$$-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\left(\|R_\varepsilon\|^2_{L^2(\partial D)} + (u,R_\varepsilon)_{L^2(\partial D)}\right) = 0.$$

Наконец, покажем, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится слабо к u в $H^+(D,S)$ при $\varepsilon\to+0$. Доказательство будем строить от противного. Действительно, если $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ не сходится слабо к u в $H^+(D,S)$, то существуют $v\in H^+(D,S)$, $\gamma>0$ и последовательность $\{\varepsilon_j\}$, стремящаяся к $+0$ при $j\to\infty$, такие, что

$$|(u_{\varepsilon_j}-u,v)_{+,1}| \geq \gamma \tag{3.4}$$

для любого $j\in\mathbb{N}$. Но последовательность $\{u_{\varepsilon_j}\}$ ограничена в гильбертовом пространстве $H^+(D,S)$, а значит существует подпоследовательность, сходящаяся слабо в $H^+(D,S)$. Чтобы не усложнять обозначениями, мы снова обозначим ее как $\{u_{\varepsilon_j}\}$. Как мы уже видели в доказательстве леммы 3.2, слабый предел $\{u_{\varepsilon_j}\}$ есть u. Это противоречит (3.4), а следовательно, первая часть леммы доказана.

Наконец, согласно теореме 1.2, пространство $H^+(D,S)$ непрерывно вложено в пространство Соболева-Слободецкого $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta>0$. Хорошо известно, что компактные операторы в гильбертовом пространстве переводят слабо сходящуюся последовательность в сходящуюся. Таким образом, из теоремы Реллиха-Кондрашова о компактных вложениях для пространств Соболева следует, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится к u в $H^s(D)$ для любого $s<1/2$ при $\varepsilon\to+0$. □

Доказательство теоремы 3.1 немедленно следует из лемм 3.2 и 3.3. □

Следствие 3.4. *Семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ ограничено тогда и только тогда, когда задача 1.3 разрешима. Более того, в этом случае*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\|\overline{\partial}u_\varepsilon(f)-f\|_{L^2(D)} = 0$$

и $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится слабо в $H^+(D,S)$, при $\varepsilon\to+0$, к решению $u\in H^+(D,S)$ задачи 1.3. Кроме того, оно сходится к u в пространстве $H^s(D)$ для любого $s<1/2$ а также и в $H^1_{\mathrm{loc}}(D\cup S)$.

Доказательство. Почти все эти утверждения следуют из теоремы 3.1 и лемм 3.3 и 1.7. Нам остается только показать, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится к u в топологии $H^1_{\mathrm{loc}}(D\cup S)$, если $u\in H^+(D,S)$ является решением задачи 1.3. Действительно, мы замечаем, что $\{u_\varepsilon(f)-u\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ ограничена в $H^+(D)$ в силу леммы 3.3, и

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\|\overline{\partial}(u_\varepsilon(f)-u)\|_{L^2(D)} & = & 0,\\ t(u_\varepsilon(f)-u) & = & 0\end{array}$$

на S для любого $\varepsilon\in(0,1]$. Тогда, применяя [23, теорему 7.2.6], мы заключаем, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится к u в $H^1_{\mathrm{loc}}(D\cup S)$. □

Наконец, выпишем формулу карлемановского типа для решений задачи Коши 1.3.

Следствие 3.5. *Для любой функции $u \in H^+(D,S)$ мы имеем:*

$$(u,v)_{+,1} = \lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{N\to+\infty}((\overline{\partial}u, \overline{\partial}\mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z,\cdot))_{L^2(D)}, v(z))_{L^2(D)},$$

для всех $v \in H^+(D,S)$.

Работа была поддержана грантом правительства РФ для научных исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете, контракт №14.Y26.31.0006, а так же грантом президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-9149.2016.1.

Список литературы

[1] T. Carleman, *Les fonctions quasianalytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
[2] Л.А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения.* Новосибирск:Наука, 1990, 248 с.
[3] N. Tarkhanov, *The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations*, Akademie-Verlag, Berlin, 1995.
[4] М.М. Лаврентьев, *О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка.* Докл. АН СССР, Т. 112(2), 1957, 195–197.
[5] М.М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики.* Новосибирск: Наука, 1962.
[6] D.P. Fedchenko, A.A. Shlapunov, *On the Cauchy problem for the Dolbeault complex in spaces of distributions.* Complex Variables and Elliptic Equations, V. 58, N. 11 (2013), 1591-1614.
[7] D.P. Fedchenko, A.A. Shlapunov, *On the Cauchy problem for the elliptic complexes in spaces of distributions.* Complex Variables and Elliptic Equations, V. 59, N. 5, 2014, 651-679.
[8] А. Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач.* М.: Наука, 1979.
[9] S. Simanca *Mixed elliptic boundary value problems.* Comm. in PDE **12** (1987), 123–200.
[10] A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov, *Mixed problems with a parameter.* Russ. J. Math. Phys., 12 (2005), N 1, P. 97-124.
[11] B.-W. Schulze, A. Shlapunov, and N. Tarkhanov, *Green integrals on manifolds with cracks.* Annals of Global Analysis and Geometry **24** (2003), 131–160.
[12] A.N. Polkovnikov, A.A. Shlapunov, *On spectral properties of a non-coercive mixed problem associated with the $\overline{\partial}$-operator.* Journal of Siberian Federal University, Math. and Phys., 2013, N. 6 (2), 247-261.
[13] A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov, *On completeness of root functions of Sturm-Liouville problems with discontinuous boundary operators.* Journal of Differential Equations, 255 (2013), 3305-3337.
[14] Л.А. Айзенберг, А.М. Кытманов, *О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы.* Мат. сборник, Т. 182(4), 1991, с. 490–507.
[15] Н.Н. Тарханов, А.А. Шлапунов, *О задаче Коши для голоморфных функций класса Лебега L^2 в области.* Сиб. матем. журнал, Т. 33 є. 5, 1992, с. 914–922.
[16] A.A. Shlapunov, *On the Cauchy problem for the Cauchy-Riemann operator in Sobolev spaces.* Contemporary Math, 445 (2008), p. 333–347.
[17] A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov, *Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols.* Proc. London. Math. Soc., 71 (1995), N. 1, p. 1-54.
[18] В.П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1976.

[19] S. Zaremba, *Sur un problème mixte à l'équation de Laplace*, Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie (1910), 314–344.

[20] G. Harutjunjan, B.-W. Schulze, *Mixed Problems and Edge Calculus: symbolic structure.* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino - Vol. 64, 2 (2006).

[21] Г. И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1973.

[22] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения метематической физики*, М.: Наука, 1972.

[23] N. Tarkhanov, *Analysis of Solutions of Elliptic Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL, 1997.

[24] Г.М. Хенкин, *Метод интегральных представлений в комплексном анализе.* Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, ВИНИТИ, Москва, Т. 7, 1985, 23–124.,

[25] А.М. Кытманов, *Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения.* Новосибирск: Наука, 1992;

[26] A.A. Shlapunov, *Spectral decomposition of Green's integrals and existence of $W^{s,2}$ -solutions of matrix factorizations of the Laplace operator in a ball.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **96** (1996), 237–256.

Аннотация. Let D be an open connected set with sufficiently smooth boundary ∂D on the complex plane $\mathbb{C}$. Perturbing the Cauchy problem for the Cauchy-Riemann system $\overline{\partial} u = f$ in D with boundary data on a closed set $S \subset \partial D$ we obtain a family of Zaremba type problems for the Laplace equation depending on a small parameter $\varepsilon \in (0,1]$ in boundary conditions. Although the mixed problems are subject to a non-coercive boundary condition on $\partial D \setminus S$ in general, each of them is uniquely solvable in an appropriate Hilbert space $H^+(D)$, continuously embedded to the Lebesgue $L^2(\partial D)$ and to the Sobolev-Slobodetskii space $H^{1/2-\delta}(D)$ for any $\delta > 0$. The corresponding family $\{u_\varepsilon\}$ of solutions approximates the solution of the Cauchy problem in $H^+(D)$ whenever the solution exists. We also prove that the existence of a solution to the Cauchy problem in $H^+(D)$ is equivalent to the boundedness of the family $\{u_\varepsilon\}$ in this space. We thus derive a solvability condition for the Cauchy problem and an effective method of constructing its solution via Carleman type formula.

(Александр Николаевич Полковников) Сибирский федеральный университет, проспект Свободный 79, 660041 Красноярск, Россия

E-mail address: `paskaattt@yandex.ru`

(Александр Анатольевич Шлапунов) Сибирский федеральный университет, проспект Свободный 79, 660041 Красноярск, Россия

E-mail address: `ashlapunov@sfu-kras.ru`