О.В. Капцов

Алгебро-геометрические структуры аналитических уравнений с частными производными

В работе изучается проблема совместности нелинейных уравнений с частными производными. Вводится алгебра сходящихся степенных рядов, модуль дифференцирований этой алгебры и модуль пфаффовых форм. Системы дифференциальных уравнений задаются степенными рядами на пространстве бесконечных джетов. Развивается техника исследования совместности дифференциальных систем, похожая на метод базисов Гребнера. Доказывается, что совместные системы, при некоторых предположениях, порождают бесконечномерные многообразия в пространстве джетов.

Ключевые слова: совместность дифференциальных уравнений, редукция, бесконечномерное многообразие, базис Гребнера.

1 Введение

Вопрос о совместности системы уравнений возникает одним из первых при ее исследовании. Критерий совместности линейных алгебраических уравнений дает теорема Кронекера-Капелли. В случае полиномиальных уравнений такого простого критерия нет, поэтому для исследования совместности применяется метод исключения, а также используются базисы Гребнера [1, 2]. Гораздо сложнее получить ответ для систем нелинейных уравнений с частными производными. Здесь возникают проблемы локального и глобального характера, также важно каким классам гладкости принадлежат уравнения. Начиная с пионерских работ Рикье, Жане [3, 4] и кончая современными [6, 5, 7, 8, 9], понятия, лежащие в основе совместности – инволютивность, разрешимость, уточняются, а методы исследования меняются. В последнее время акцент исследований сместился в сторону алгоритмизации вычислений. Так в систему компьютерной алгебры Maple [10] имплементированы алгоритмы, которые должны переводить исходную систему уравнений в некоторую "стандартную"форму. В тоже время можно констатировать, что устоявшегося определения инволютивной (пассивной, стандартной) системы уравнений с частными производными нет. В данной работе рассматриваются пассивные системы, введенные в работах [11, 12], и изучаются их свойства.

Работа имеет следующую структуру. Во втором параграфе рассматривается бесконечномерное пространство $\mathbb{K}^T$ отображений из счетного множества T в полное нормированное поле $\mathbb{K}$. Важнейшими примерами таких полей являются поля вещественных и комплексных чисел. В пространстве $\mathbb{K}^T$ вводится топология прямого произведения и декартова система координат. Произвольной точке $a \in \mathbb{K}^T$ сопоставляется локальная алгебра $\mathcal{F}_a$ сходящихся степенных рядов. Каждый ряд из $\mathcal{F}_a$ зависит от конечного числа переменных, однако число этих переменных может быть как угодно большим. С помощью рядов из $\mathcal{F}_a$ вводятся аналитические функции на открытых множествах пространства

$\mathbb{K}^T$ и аналитические отображения данного пространства. Это позволяет определить аналитические многообразия в $\mathbb{K}^T$. В конце параграфа вводится понятие нормализованной системы образующих идеала алгебры $\mathcal{F}_a$. Показано, что нули аналитических функций, соответствующие нормализованной системе, задают многообразие в $\mathbb{K}^T$.

В третьем параграфе изучаются дифференцирования алгебры $\mathcal{F}_a$, пфаффовы (дифференциальные) формы и производные Ли от этих форм. Доказывается, что дифференцирования однозначно определяются действием на образующих алгебры $\mathcal{F}_a$. Вводятся инвариантные идеалы и подмодули. Далее рассматривается пространство (бесконечных) джетов $\mathbb{J} = \mathbb{K}^T$, где $T = \mathbb{N}_n \cup (\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}^n)$, $\mathbb{N}_n = 1, \ldots, n$, $\mathbb{N}$ – множество неотрицательных целых чисел. На пространстве $\mathbb{J}$ вводятся операторы полного дифференцирования, канонические формы, контактные дифференцирования и симметрии систем уравнений с частными производными. Отмечается, что задачи вычисления симметрий и законов сохранения системы уравнений тесно связаны с проблемой проверки принадлежности элемента алгебры данному дифференциальному идеалу.

В начале четвертого параграфа доказывается, что если дифференциальные системы порождают один и тот же дифференциальный идеал, то они задают одинаковые ростки нулей. Затем определяются такие понятия как редукция ряда относительно дифференциальной системы, условия совместности, пассивные системы. Показано, что если система $S \subset \mathcal{F}_a$ – пассивна, то ряд $f \in \mathcal{F}_a$ принадлежит дифференциальному идеалу, порожденному системой S, тогда и только тогда, когда f редуцируется к нулю относительно S. Основным результатом работы является теорема, в которой утверждается, что если дифференциальная система удовлетворяет некоторым условиям слабой разрешимости и совместности, то она пассивна в некоторой точке $a \in \mathbb{J}$ и задает аналитическое многообразие в окрестности этой точки. В качестве примера рассмотрено уравнение Дюбрей-Жакотен, описывающее плоские стационарные течения неоднородной жидкости. Найдено точное не инвариантное решение, зависящее от двух параметров.

2 Алгебра сходящихся степенных рядов и аналитические функции

Пусть $\mathbb{K}$ – поле, полное относительного некоторой нормы. Зафиксируем обозначения: $\mathbb{N}$ – множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{N}_m = \{1, \ldots, m\}$, $\mathbb{R}_+$ – множество положительных действительных чисел, T – счетное множество, $\mathbb{K}^T$ – пространство отображений из T в $\mathbb{K}$.

Определение. Отображения $y_t : \mathbb{K}^T \longrightarrow \mathbb{K}$, заданные формулой

$$y_t(z) = z(t), \qquad t \in T \tag{2.1}$$

назовем *декартовыми координатными функциями* на $\mathbb{K}^T$, а значения $z(t)$ – координатами точки $z \in \mathbb{K}^T$.

Значение $z(t)$ удобно обозначать z_t, по аналогии с конечномерным случаем.

Введем на пространстве $\mathbb{K}^T$ топологию прямого произведения, выбирая за фундаментальную систему окрестностей точки $a \in \mathbb{K}^T$ множества

$$U(a_\tau, \rho) = \{z \in \mathbb{K}^T : |z_{t_i} - a_{t_i}| < \rho_i,\ i \in \mathbb{N}_n\}, \tag{2.2}$$

здесь $t_i \in T$, $\rho_i \in \mathbb{R}_+$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $a_\tau = \{a_{t_1}, \ldots, a_{t_n}\}$ – множество из n координат точки a; $z_{t_1}, \ldots, z_{t_n}$ – n координат точки z. Множество (2.2) будем называть *брусом.*

Пусть $\{X_t\}_{t \in T}$ – множество символов, $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $a_\tau = \{a_{t_1}, \ldots, a_{t_1}\} \subset \mathbb{K}$. Обозначим через $A(a_\tau, \rho)$ множество степенных рядов вида

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha (X_{t_1} - a_{t_1})^{\alpha_1} \cdots (X_{t_n} - a_{t_n})^{\alpha_n}, \tag{2.3}$$

где $c_\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, для которых конечна величина

$$||f||_\rho = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |c_\alpha| \rho_1^{\alpha_1} \cdots \rho_n^{\alpha_n}. \tag{2.4}$$

Как следует из [13], $A(a_\tau, \rho)$ – банахова алгебра, с нормой (2.4).

Введем отношение $\prec$ на $\mathbb{R}^n_+$. Пусть $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $\rho^* = (\rho^*_1, \ldots, \rho^*_n)$, будем считать $\rho \prec \rho^*$, если разность $\rho^*_i - \rho_i$ – положительна для всех $i \in \mathbb{N}_n$.

Утверждение 2.1. *Пусть* $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset \tau' = \{t_1, \ldots, t_m\} \subset T$ *($n < m$),* $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \prec \rho^* = (\rho^*_1, \ldots, \rho^*_n)$ и $\rho' = (\rho_1, \ldots, \rho_n, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m_+$. Тогда алгебра $A(a_\tau, \rho^*)$ вкладывается в алгебру $A(a_\tau, \rho)$, а $A(a_\tau, \rho)$ вкладывается в $A(a_{\tau'}, \rho')$, и для всех $i \in \mathbb{N}_n$ справедливы включения

$$\frac{\partial}{\partial X_{t_i}} A(a_\tau, \rho^*) \subset A(a_\tau, \rho). \tag{2.5}$$

Доказательство. Вложения очевидны, а формула (2.5) следует из аналогичной формулы в [13].

Определение. Степенной ряд f вида (2.3) называется сходящимся (в окрестности точки $a \in \mathbb{K}^T$), если $f \in A(a_\tau, \rho)$ для некоторого $\rho \in \mathbb{R}^n_+$ и $a_\tau = \{a_{t_1}, \ldots, a_{t_n}\} \subset \mathbb{K}$, где $a_{t_1}, \ldots, a_{t_n}$ – n координат точки $a \in \mathbb{K}^T$.

Для каждой точки $a \in \mathbb{K}^T$ рассмотрим объединение (не дизъюнктное) алгебр

$$\mathcal{F}_a = \bigcup_{\rho \in \mathbb{R}^n_+, n \in N_0, a_\tau \subset \mathbb{K}} A(a_\tau, \rho),$$

здесь $a_\tau = \{a_{t_1}, \ldots, a_{t_n}\}$ – n координат точки a, $N_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Множество $\mathcal{F}_a$ является $\mathbb{K}$-алгеброй сходящихся степенных рядов.

С помощью сходящихся степенных рядов из $\mathcal{F}_a$ введем аналитические функции на открытых множествах пространства $\mathbb{K}^T$. Каждый ряд $f \in A(a_\tau, \rho)$ вида (2.3) порождает функцию $\tilde{f}$ следующим образом. Пусть $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $a_\tau = \{a_{t_1}, \ldots, a_{t_n}\} \subset \mathbb{K}$. Согласно определения алгебры $A(a_\tau, \rho)$, ряд f сходится в полицилиндре

$$\Pi(a_\tau, \rho) = \{(z_{t_1}, \ldots, z_{t_n}) \in \mathbb{K}^n : |z_{t_i} - a_{t_i}| < \rho_i,\ i \in \mathbb{N}_n\}. \tag{2.6}$$

Этому полицилиндру однозначно соответствует брус $U(a_\tau,\rho)$ вида (2.2). Тогда тогда для любой точки $z\in U(a_\tau,\rho)$ функция $\tilde f$ задается формулой

$$\tilde f(z)=f(z_\tau)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha(z_{t_1}-a_{t_1})^{\alpha_1}\cdots(z_{t_n}-a_{t_n})^{\alpha_n}, \tag{2.7}$$

где $z_\tau=(z_{t_1},\ldots,z_{t_n})\in\Pi(a_\tau,\rho)$. Таким образом, функция $\tilde f$ зависит от конечного числа переменных. Построенная функция $\tilde f$ будет называться локально-аналитической. Это позволяет по аналогии с конечномерным случаем [14] ввести аналитические функции в открытых множествах.

Определение. Пусть U – открытое множество в $\mathbb{K}^T$. Функция $h:U\longrightarrow\mathbb{K}$ называется *аналитической* в U, если для каждой точки $z\in U$ существует брус $U(a_\tau,\rho)$ и локально-аналитическая функция $\tilde f$ в этом брусе такая, что $h(z)=\tilde f(z)$ для всех $z\in U(a_\tau,\rho)$.

Замечание. Всюду в дальнейшем, если $E\subset\mathcal{F}_a$, то

$$\widetilde E=\{\tilde f : f\in E\} \tag{2.8}$$

обозначает множество локально-аналитических функций $\tilde f$, соответствующих рядам $f\in\mathcal{F}_a$. Можно показать, следуя [15], что локально-аналитическая функция в брусе $U(a_\tau,\rho)$ является аналитической в $U(a_\tau,\rho)$.

Определение. Пусть U – открытое множество в $\mathbb{K}^T$. Отображение $\phi : U\longrightarrow\mathbb{K}^T$ с компонентами ϕ_t, $t\in T$, называются *аналитическим* в U, если каждая функция ϕ_t – аналитическая в U. Отображение ϕ называются *бианалитическим*, если у него существует обратное аналитическое отображение ϕ^{-1}.

Определение. Множество

$$C_S=\{z\in\mathbb{K}^T : z(t)=0,\ \forall t\in S\subset T\}$$

называется *координатным подпространством* в $\mathbb{K}^T$.

Нижеследующее определение многообразия является прямым обобщением конечномерной конструкции.

Определение. Множество $M\subset\mathbb{K}^T$ называется *многообразием в* $\mathbb{K}^T$, если для любой точки $z\in M$ существуют открытые множества U,U' в $\mathbb{K}^T$, где $z\in U$, и бианалитическое отображение $\phi:U\longrightarrow U'$ такое, что

$$\phi(U\cap M)=U'\cap C_S,$$

здесь C_S – некоторое координатное подпространство в $\mathbb{K}^T$. При этом $\bar\phi=\phi|_{M\cap U}$, ограничение отображения ϕ на $U\cap M$, называется *локальной системой координат* на $U\cap M$, а множество переменных (декартовых координатных функций на C_S), от которых зависит обратное отображение $\bar\phi^{-1}$, называется *набором параметров* многообразия.

Аналитические функции и многообразия в координатных подпространствах вводятся аналогичным образом.

Обозначим через $iv(f)$ множество символов, от которых зависит ряд $f\in\mathcal{F}_a$. Если $E\subset\mathcal{F}_a$, то

$$iv(E)=\{iv(f) : f\in E\}. \tag{2.9}$$

Определение. Пусть $\mathcal{R}$ – подалгебра алгебры $\mathcal{F}_a$, I – идеал в $\mathcal{R}$. Система образующих $\mathcal{B}$ идеала I называется *нормализованной*, если

1) любой $f \in \mathcal{B}$ имеет вид $f = X_s + g$, причем элементы X_s образуют подмножество $L \subset \{X_t\}_{t\in T}$;

2) если $f_1 = X_t + g_1, f_2 = X_t + g_2 \in \mathcal{B}$, то $g_1 = g_2$.

В этом случае L называется множеством *главных переменных* системы $\mathcal{B}$.

Предположим, что $T' \subset T$. Тогда множество

$$C(T') = \{z \in \mathbb{K}^T : z(t) = 0 \quad \forall t \in T \setminus T'\} \tag{2.10}$$

является координатным подпространством в $\mathbb{K}^T$. Топология в $C(T')$ индуцирована топологией в $\mathbb{K}^T$. Аналитические функции в открытых множествах подпространства $C(T')$ определяются с помощью степенных рядов и формулы (2.7). Множество рядов

$$\mathcal{F}_a(T') = \{f \in \mathcal{F}_a : iv(f) \subseteq \{X_t\}_{t\in T'}\} \tag{2.11}$$

образует подалгебру алгебры $\mathcal{F}_a$.

Утверждение 2.2. *Пусть $T' \subseteq T$, $\mathcal{B}$ – нормализованная система образующих идеала подалгебры $\mathcal{F}_a(T')$ (2.11), $\tilde{\mathcal{B}}$ – соответствующее множество аналитических функций в некотором открытом множестве V координатного подпространства (2.10), L – множество главных переменных системы $\mathcal{B}$, $S = \{s \in T' : X_s \in L\}$, $T'' = T' \setminus S$. Тогда множество*

$$Z(\tilde{\mathcal{B}}) = \{z \in V : \tilde{f}(z) = 0, \forall f \in \tilde{\mathcal{B}}\}$$

является многообразием в подпространстве $C(T')$, и множество декартовых координатных функций $\{y_t\}_{t\in T''}$ образует набор параметров многообразия.

Доказательство. Отображение ϕ задается формулами

$$y'_t = y_t + g_t, \quad y'_s = y_s,$$

где y_t соответствует символу $X_t \in L$; $iv(g_t), y_s \in \{y_q\}_{q\in T''}$. Значит, обратное отображение ϕ^{-1} имеет вид

$$y_t = y'_t - g_t, \quad y_s = y'_s.$$

Очевидно, ограничение ϕ на $Z(\tilde{\mathcal{B}})$ является проекцией $Z(\tilde{\mathcal{B}})$ на $V \cap C(T'')$. Значит, множество $Z(\tilde{\mathcal{B}})$ – многообразие.

Замечание. Важно отметить, что в этом утверждении требуется, чтобы все функции из $\tilde{\mathcal{B}}$ были заданы в одном и том же открытом множестве V.

3 Дифференцирования и локальные системы

Напомним, что дифференцированием коммутативной алгебры A над полем K называется K-линейное отображение $\mathcal{D} : A \longrightarrow A$, для которого

$$\mathcal{D}(ab) = a\mathcal{D}(b) + b\mathcal{D}(a).$$

Лемма 3.1. *Произвольное дифференцирование $\mathcal{D}$ алгебры $\mathcal{F}_a$ однозначно определяется значениями на координатных функциях y_t и задается для любого $f \in \mathcal{F}_a$ формулой*

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{t\in T} \mathcal{D}(y_t)\frac{\partial f}{\partial y_t}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $a = 0 \in \mathbb{K}^T$. Моном $y_{t_1}^{\alpha_1} \cdots y_{t_n}^{\alpha_n}$ обозначим через y^α. Пусть p – полином $\sum_{\alpha\in A} c_\alpha y^\alpha$, где $c_\alpha \in \mathbb{K}$, A – конечное подмножество в $\mathbb{N}^n$. Согласно определению дифференцирования, верны формулы

$$\mathcal{D}(y^\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{D}(y_{t_i}) y_{t_1}^{\alpha_1} \cdots y_{t_i}^{\alpha_i - 1} \cdots y_{t_n}^{\alpha_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(y_{t_i}) \frac{\partial y^\alpha}{\partial y_{t_i}}, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{D}(p) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \mathcal{D}(y^\alpha) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(y_{t_i}) \frac{\partial y^\alpha}{\partial y_{t_i}} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(y_{t_i}) \frac{\partial p}{\partial y_{t_i}}.$$

Докажем, что дифференцирование $\mathcal{D}$ однозначно продолжается с алгебры полиномов на алгебру $\mathcal{F}_0$. Предположим, что существует другое дифференцирование $\mathcal{D}_0$ алгебры $\mathcal{F}_0$, совпадающее с $\mathcal{D}$ на полиномах. Тогда дифференцирование $\mathcal{D}^* = \mathcal{D} - \mathcal{D}_0$ обращает в ноль любой многочлен.

Предположим, что существует ряд $f \in \mathcal{F}_0$ такой, что $\mathcal{D}^*(f) \neq 0$. Напомним [16], что порядком ряда $f \neq 0$ (обозначается $ord(f)$) называется наименьшее натуральное число q такое, что однородная часть степени q ряда f не равна нулю.

Для любого полинома $p \in \mathcal{F}_0$ верно равенство

$$\mathcal{D}^*(f) = \mathcal{D}^*(f - p).$$

и следовательно,

$$ord(\mathcal{D}^*(f)) = ord(\mathcal{D}^*(f - p)). \tag{3.2}$$

Кроме того, согласно (3.1), верно неравенство

$$ord(\mathcal{D}^*(f)) \geq ord(f) - 1.$$

Значит, выбирая полином p, "уничтожающий младшие члены"ряда f, можно сделать $ord(\mathcal{D}^*(f-p))$ сколь угодно большим числом. Но это противоречит (3.2), т.к. порядок ряда $\mathcal{D}^*(f)$ – конечное число.

Очевидно, множество дифференцирований алгебры $\mathcal{F}_a$ образует модуль над $\mathcal{F}_a$. Обозначим его Der_a. Хорошо известно [16], что множество дифференцирований любой коммутативной алгебры над полем образует алгебру Ли с коммутатором

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] = \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1.$$

Значит, Der_a – алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$. В силу леммы 3.1 дифференцирования алгебры $\mathcal{F}_a$ можно также называть локальными векторными полями в окрестности точки $a \in \mathbb{K}^T$.

Следуя [16], *дифференциалом* ряда $f \in \mathcal{F}_a$ назовем линейное отображение $df : Der_a \longrightarrow \mathcal{F}_a$, действующее по формуле

$$df(\mathcal{D}) = \mathcal{D}(f).$$

Очевидно, множество дифференциалов рядов из $f \in \mathcal{F}_a$ порождает модуль над $\mathcal{F}_a$. Этот модуль обозначается Der_a^* и называется модулем пфаффовых форм. Элементами данного модуля являются конечные суммы вида $\sum g_t df_t$, где $g_t, f_t \in \mathcal{F}_a$.

Утверждение 3.1 *Модуль пфаффовых форм Der_a^* порожден дифференциалами декартовых координатных функций, т.е. элементами $\{dy_t\}_{t\in T}$.*
Доказательство. Достаточно показать, что дифференциал df задается классической формулой

$$df = \sum_{t\in T} \frac{\partial f}{\partial y_t} dy_t, \tag{3.3}$$

здесь суммирование в правой части конечное, т.к. f зависит от конечного числа переменных. Возьмем произвольное дифференцирование $\mathcal{D} \in Der_a$ и сравним значения левой и правой части (3.3) на $\mathcal{D}$:

$$df(\mathcal{D}) = \mathcal{D}(f) = \sum_t \mathcal{D}(y_t)\frac{\partial f}{\partial y_t},$$

$$\sum_t \frac{\partial f}{\partial y_t} dy_t(\mathcal{D}) = \sum_t \frac{\partial f}{\partial y_t}\mathcal{D}(y_t).$$

Мы видим, что эти значения совпадают.

Определение. *Производной Ли*, порожденной дифференцированием $\mathcal{D} \in Der_a$, называется $\mathbb{K}$-линейное отображение $\mathcal{L}_\mathcal{D} : Der_a^* \longrightarrow Der_a^*$, удовлетворяющее условию

$$\mathcal{L}_\mathcal{D}(gdf) = \mathcal{D}(g)df + gd\mathcal{D}(f), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_a. \tag{3.4}$$

Утверждение 3.2 *Множество производных Ли образует алгебру Ли над полем $\mathbb{K}$ и для всех $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in Der_a$ справедливы равенства*

$$k_1\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1} + k_2\mathcal{L}_{\mathcal{D}_2} = \mathcal{L}_{k_1\mathcal{D}_1 + k_2\mathcal{D}_2}, \tag{3.5}$$

$$[\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}, \mathcal{L}_{\mathcal{D}_2}] = \mathcal{L}_{[\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2]}. \tag{3.6}$$

Для доказательства утверждения достаточно проверить формулы (3.5), (3.6) на произвольной пфаффовой форме $\omega = \sum_{t\in\tau} f_t dy_t$, где τ – конечное подмножество в T. Равенство левой и правой части формулы (3.5) элементарно проверяется действием на форму ω.

Покажем, что

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}\mathcal{L}_{\mathcal{D}_2}(\omega) - \mathcal{L}_{\mathcal{D}_2}\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}(\omega) = \mathcal{L}_{[\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2]}(\omega).$$

Для этого вычислим $\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}\mathcal{L}_{\mathcal{D}_2}(\omega)$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{D}_2}\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}(\omega)$:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}\mathcal{L}_{\mathcal{D}_2}(\omega) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}\mathcal{L}_{\mathcal{D}_2}(\sum_t f_t dy_t) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}(\sum_t \mathcal{D}_2(f_t)dy_t + \sum_t f_t d\mathcal{D}_2(y_t)) =$$

$$= \sum_t \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2(f_t)dy_t + \sum_t \mathcal{D}_2(f_t)d\mathcal{D}_1(y_t) + \sum_t \mathcal{D}_1(f_t)d\mathcal{D}_2(y_t) + \sum_t f_t d\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2(y_t),$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}_2}\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}(\omega) = \sum_t \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1(f_t)dy_t + \sum_t \mathcal{D}_1(f_t)d\mathcal{D}_2(y_t) + \sum_t \mathcal{D}_2(f_t)d\mathcal{D}_1(y_t) + \sum_t f_t d\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1(y_t)$$

Значит, верны равенства

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}\mathcal{L}_{\mathcal{D}_2} - \mathcal{L}_{\mathcal{D}_2}\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1})(\omega) = \sum_t (\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2(f_t) - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1(f_t))dy_t + \sum_t f_t d(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2(y_t) - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1(y_t) =$$

$$= \sum_t [\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](f_t)dy_t + \sum_t f_t d([\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](y_t)) = \mathcal{L}_{[\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2]}(\omega).$$

Определение. Идеал I алгебры $\mathcal{F}_a$ называется *инвариантным* относительно дифференцирования $\mathcal{D} \in Der_a$, если $\mathcal{D}(I) \subset I$.

Определение. Подмодуль $\mathcal{M}$ модуля пфаффовых форм Der_a^* называется *инвариантным* относительно дифференцирования $\mathcal{D} \in Der_a$, если

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}.$$

Утверждение 3.3 *Множество дифференцирований,оставляющих инвариантным идеал $I \subset \mathcal{F}_a$ или подмодуль $\mathcal{M} \subset Der_a^*$, образует алгебру Ли над полем $\mathbb{K}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in Der_a$ и $\mathcal{D}_i(I) \subset I$. Тогда $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2(I) \subset I$ и $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1(I) \subset I$. Значит, $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] \subset I$. Аналогичные рассуждения проводятся для подмодуля $\mathcal{M}$.

Всюду в дальнейшем полагаем $T = \mathbb{N}_n \cup (\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}^n)$. Тогда пространство $\mathbb{K}^T$ обозначается $\mathbb{J}$ и называется *пространством джетов.* Декартовы координатные функции на $\mathbb{J}$ обозначаются через x_i, u^j_α, где $i \in \mathbb{N}_n$, $j \in \mathbb{N}_m$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Множество Y декартовых координатных функций разбивается на два подмножества

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad U = \{u^j_\alpha\}^{j\in\mathbb{N}_m}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}. \tag{3.7}$$

Введем n отображений $D_1, \ldots, D_n$ из Y в Y:

$$D_k(x_k) = 1, \qquad D_k(x_i) = 0 \quad (i \neq k), \qquad D_k(u^j_\alpha) = u^j_{\alpha+e_k},$$

где $k \in \mathbb{N}_n$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{N}^n$. Тогда, согласно Лемме 3.1, эти отображения единственным образом продолжаются до дифференцирования алгебры $\mathcal{F}_a$ и при произвольном $f \in \mathcal{F}_a$, задаются формулами

$$D_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{j\in\mathbb{N}_m, \alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\partial f}{\partial u^j_\alpha} u^j_{\alpha+e_k}. \tag{3.8}$$

Дифференцирования D_k часто называют *операторами полного дифференцирования* [17], т.к. формула (3.8) представляет собой цепное правило.

Таким образом, алгебра сходящихся степенных рядов $\mathcal{F}_a$ с n операторами полного дифференцирования является дифференциальной алгеброй. Произведение операторов $D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ обозначается D^α, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Дифференциальный идеал алгебры $\mathcal{F}_a$, порожденный множеством $S \subset \mathcal{F}_a$, будем обозначать $\langle\langle S \rangle\rangle$.

Напомним, что *локальной аналитической системой уравнений с частными производными* в [11] называлась тройка множеств $(\mathbb{K}, Y, S)$, где S – конечное подмножество в $\mathcal{F}_a$. В дальнейшем, для краткости, конечное множество $S \subset \mathcal{F}_a$ мы будем называть локальной дифференциальной системой.

Рассмотрим счетное множество $\Omega = \{\omega_\alpha^i\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}^{i\in\mathbb{N}_m}$ канонических пфаффовых форм

$$\omega_\alpha^i = du_\alpha^i - \sum_{j=1}^n u_{\alpha+e_j}^i dx_j.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_a$ подмодуль модуля Der_a^*, порожденный этими каноническими формами. Напомним, что $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ обозначает производную Ли, порожденную дифференцированием $\mathcal{D}$.

Определение. Дифференцирование $\mathcal{D} \in Der_a$ называется *контактным*, если $\mathcal{L}_\mathcal{D}(\mathcal{P}_a) \subseteq \mathcal{P}_a$.

Очевидно, что операторы полного дифференцирования $D_1, \ldots, D_n$ (3.8) являются контактными дифференцированиями. Если $\mathcal{D}$ – контактное дифференцирование, то

$$\mathcal{D} - \sum_{j=1}^n \mathcal{D}(x_j) D_j$$

тоже контактное дифференцирование. Поэтому, не ограничивая общности, можно рассматривать контактные дифференцирования вида

$$\mathcal{D} = \sum_{i\in\mathbb{N}_m, \alpha\in\mathbb{N}^n} \mathcal{D}(u_\alpha^i) \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i}. \tag{3.9}$$

Такие дифференцирования часто называют вертикальными [21].

Фактически повторяя известные рассуждения [17], [21], можно показать, что дифференцирование (3.9) является контактным тогда и только тогда, когда $[\mathcal{D}, D_i] = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}_n$. Это означает, что коэффициенты $\mathcal{D}(u_\alpha^i)$ в (3.9) задаются формулой $\mathcal{D}(u_\alpha^i) = D^\alpha \mathcal{D}(u^i)$.

Определение. Контактное дифференцирование $\mathcal{D} \in Der_a$ называется *(инфинитезимальной) симметрией* локальной дифференциальной системы $S = \{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathcal{F}_a$, если дифференциальный идеал $I = \langle\langle S \rangle\rangle$ инвариантен относительно $\mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{D}(I) \subseteq I$.

Следует отметить, что инвариантность идеала $\langle\langle S \rangle\rangle$ достаточно проверять на любой дифференциальной системе образующих. Точнее справедливо

Утверждение 3.4. *Пусть S – локальная дифференциальная система и $\mathcal{D}$ - контактное дифференцирование такое, что $\mathcal{D}(S) \subseteq \langle\langle S \rangle\rangle$. Тогда $\mathcal{D}$ – симметрия системы S.*

Доказательство. Пусть $f \in \langle\langle S \rangle\rangle$, тогда

$$f = \sum_{i\in\mathbb{N}_k, \alpha\in A} a_\alpha^i D^\alpha f_i,$$

где $a_\alpha^i \in \mathcal{F}_a$, A – конечное подмножество в $\mathbb{N}^n$, $f_i \in S$. Нужно доказать, что $\mathcal{D}(f) \in \langle\langle S \rangle\rangle$. По определению дифференцирования имеем

$$\mathcal{D}(f) = \sum \mathcal{D}(a_\alpha^i) D^\alpha f_i + \sum a_\alpha^i \mathcal{D} D^\alpha f_i.$$

Поскольку, не ограничивая общности, можно считать дифференцирование вертикальным, то последнее равенство переписывается в виде

$$\mathcal{D}(f) = \sum \mathcal{D}(a^i_\alpha) D^\alpha f_i + \sum a^i_\alpha D^\alpha \mathcal{D}(f_i).$$

Каждое слагаемое в правой части последнего равенства лежит в идеале $\langle\langle S \rangle\rangle$. Значит, левая часть принадлежит идеалу.

Замечание. Приведенное выше определение симметрии с других позиций имеется в [21].

Определения, с использованием дифференциальных идеалов, применимы к законам сохранения и различным определяющим уравнениям [22]. Так, закон сохранения можно ввести следующим образом.

Определение. Законом сохранения дифференциальной системы $S \subset \mathcal{F}_a$ будем называть кортеж $(g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{F}_a^n$ такой, что

$$D_1 g_1 + \dots + D_n g_n \in \langle\langle S \rangle\rangle.$$

Возникает вопрос о проверке принадлежности элемента идеалу. В алгебре многочленов для этого полезно использовать базис Гребнера идеала [1]. Аналогом Базиса Гребнера в нашем случае является пассивная система. Это понятие и его применения рассматриваются в следующем параграфе.

4 Многообразия, порожденные системами

В этом параграфе доказываются основные результаты работы, но сначала, используя обозначение (2.8), сформулируем утверждение, которое оказывается весьма полезным в дальнейшем.

Утверждение 4.1 *Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathcal{F}_a$ – локальная дифференциальная система. Тогда существует брус $U(a_\tau, \rho)$ вида (2.2) такой, что функции $\widetilde{D^\alpha f_i}$ являются аналитическими в этом брусе $\forall i \in \mathbb{N}_k$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.*

Доказательство. Очевидно, существует полицилинр $\Pi(a_\tau, \rho^*)$ вида (2.6), в котором сходятся ряды $f_1, \dots, f_k$, т.е. $S \subset A(a_\tau, \rho^*)$. Согласно формуле дифференцирования (3.8), имеем

$$D_i(f_s) = \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \sum_{j \in \mathbb{N}_m, \alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial f_s}{\partial u^j_\alpha} u^j_{\alpha + e_i}, \qquad s \in \mathbb{N}_k,$$

причем правая часть состоит из конечного числа слагаемых. Кроме того, в силу утверждения 1.1, частные производные $\frac{\partial f_s}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f_s}{\partial u^j}$ принадлежат алгебре $A(a_\tau, \rho)$ при любом $\rho \prec \rho^*$. Значит, соответствующие функции $\widetilde{\frac{\partial f_s}{\partial x_i}}$, $\widetilde{\frac{\partial f_s}{\partial u^j}}$ являются аналитическими в брусе $U(a_\tau, \rho)$. Поскольку ρ – произвольный кортеж, удовлетворяющий условию $\rho \prec \rho^*$, то повторяя рассуждения приведенные выше, видим, что $\widetilde{D^\alpha f_i}$ – аналитическая функция в $U(a_\tau, \rho)$, $\forall i \in \mathbb{N}_k$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathcal{F}_a$ – локальная дифференциальная система и $W = U(a_\tau, \rho)$ – брус, в котором аналитичны функции $\widetilde{D^\alpha f_i}$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ $\forall i \in \mathbb{N}_k$. Рассмотрим множество

$$Z_W(S) = \{z \in W : \widetilde{D^\alpha f_i}(z) = 0, \alpha \in \mathbb{N}^n, i \in \mathbb{N}_k\}. \tag{4.1}$$

в пространстве $\mathbb{J}$ и точку $a \in W$. В дальнейшем $\mathbb{Z}_a(S)$ обозначает росток множества [19] $Z_W(f)$.

Утверждение 4.2 *Если две локальных дифференциальных системы* $f = \{f_1, \ldots, f_k\}$, $g = \{g_1, \ldots, g_s\} \subset \mathcal{F}_a$ *порождают один и тот же дифференциальный идеал в* $\mathcal{F}_a$, *то они задают одинаковые ростки, т.е.*

$$\mathbb{Z}_a(f) = \mathbb{Z}_a(g). \tag{4.2}$$

Доказательство. Поскольку множества f и g порождают один и тот же дифференциальный идеал, то любой ряд $g_i \in g$ представляется в виде

$$g_j = \sum_{i,\alpha} c_\alpha^{i,j} D^\alpha f_i, \qquad c_\alpha^{i,j} \in \mathcal{F}_a. \tag{4.3}$$

Рассмотрим множества $Z_W(f)$, $Z_W(g)$, принадлежащие брусу $U(a_\tau, \rho)$. Очевидно, из (4.3) следует включение

$$\mathbb{Z}_a(g) \subseteq \mathbb{Z}_a(f). \tag{4.4}$$

Используя рассуждения приведенные выше, имеем представление

$$f_i = \sum_{j,\alpha} b_\alpha^{j,i} D^\alpha g_j, \qquad b_\alpha^{j,i} \in \mathcal{F}_a$$

и включение

$$\mathbb{Z}_a(f) \subseteq \mathbb{Z}_a(g). \tag{4.5}$$

Из формул (4.4),(4.5) следует равенство (4.2).

Ниже приводятся необходимые понятия и результаты из работ [11], [12], они понадобятся для доказательства основной теоремы.

Определение. *Орбитой подмножества* S в $\mathcal{F}_a$ называется множество

$$O(S) = \{D^\alpha s : \alpha \in \mathbb{N}^n; s \in S\}.$$

Определение. Сходящийся дифференциальный ряд $f \in \mathcal{F}_a$ вида $f = u_\alpha^i + g$ называется *разрешимым* относительно u_α^i, если g не зависит от элементов орбиты $O(u_\alpha^i)$.

Если ряд $f \in \mathcal{F}_a$ разрешимым относительно u_α^i, то символ stf обозначает u_α^i. Если S – некоторое множество разрешимых рядов, то

$$stS = \{stf : f \in S\}.$$

Определение. Пусть $S \subset \mathcal{F}_a$ – локальная дифференциальная система, состоящая из разрешимых сходящихся дифференциальных рядов. Предположим, что идеал $\langle\langle S\rangle\rangle \neq \mathcal{F}_a$ обладает нормализованной системой образующих $\mathcal{B}$ и множество главных переменных $\mathcal{L}$ системы $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию $\mathcal{L} = O(stS)$. Тогда S называется *пассивной системой* идеала $\langle\langle S\rangle\rangle$.

Возникает задача о проверке локальной дифференциальной системы на пассивность. Для ее решения нужно ввести дополнительные понятия, частично использованные в [12].

Напомним, что предпорядком на множестве называется рефлексивное и транзитивное отношение, а строгим предпорядком – иррефлексивное и транзитивное отношение [18].

Утверждение 4.3 *Пусть* $\{H_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *– разбиение множества* H*, где* Γ *– вполне упорядоченное множество. Тогда на* H *можно задать предпорядок* $\preceq$ *и строгий предпорядок* $\prec$ *следующим образом:*

$$h_1 \preceq h_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \gamma_1, \gamma_2 (h_1 \in H_{\gamma_1}, h_2 \in H_{\gamma_2}, \gamma_1 \leq \gamma_2), \tag{4.6}$$

$$h_1 \prec h_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \gamma_1, \gamma_2 (h_1 \in H_{\gamma_1}, h_2 \in H_{\gamma_2}, \gamma_1 < \gamma_2). \tag{4.7}$$

Доказательство очевидно.

Пусть на множестве M (слева) действует полугруппа G, т.е. задано отображение $(g, m) \to gm$ множества $G \times M$ в M, удовлетворяющее условию

$$g_1(g_2 m) = (g_1 g_2) m, \quad \forall m \in M \forall g_1, g_2 \in G.$$

Определение. Пусть на множестве M действует полугруппа G и разбиение $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ множества M порождает строгий предпорядок $\prec$, согласно (4.7). Множество M называется *стратифицированным* G*-множеством*, если для всех $g \in G$ выполняются условиям:

1) $m_1 \prec m_2 \Longrightarrow gm_1 \prec gm_2, \qquad m_1, m_2 \in M$;

2) $m \prec gm \quad \forall m \in M$.

Пусть $x^0 \in \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[< x_1, \ldots, x_n >]_{x_0}$ – алгебра ростков аналитических функций в точке x^0, изоморфная соответствующей алгебре сходящихся степенных рядов. Рассмотрим точку $a \in \mathbb{J}$, стандартная проекция которой в $\mathbb{K}^n$ равна x^0, и значит, декартовы координаты точки x^0 являются частью декартовых координат точки a. Обозначим через $\hat{\mathcal{F}}_a$ множество $\mathcal{F}_a \setminus \mathbb{K}[< x_1, \ldots, x_n >]_{x_0}$.

Любое разбиение $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ множества U (3.7) порождает разбиение множества $\hat{\mathcal{F}}_a$. Действительно, рассмотрим семейство множеств

$$Y_\gamma = X \cup \Big(\bigcup_{\Theta \leq \gamma' \leq \gamma} U_{\gamma'} \Big), \tag{4.8}$$

где X определено в (3.7), $\Theta = min\{\gamma \in \Gamma\}$. Очевидно, справедливы формулы

$$Y = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma, \qquad Y_{\gamma'} \subset Y_{\gamma''}, \quad \forall \gamma' < \gamma''$$

Возьмем точку $a \in \mathbb{J}$ и рассмотрим цепь (по включению) подалгебр

$$\mathcal{F}_a^\gamma = \{f \in \mathcal{F}_a : iv(f) \subset Y_\gamma\} \tag{4.9}$$

алгебры $\mathcal{F}_a$. Здесь, как и раньше, $iv(f)$ означает множество переменных от которых зависит ряд f. Тогда цепь $\{\mathcal{F}_a^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ порождает разбиение $\{\Phi_a^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ множества $\hat{\mathcal{F}}_a$ на блоки

$$\Phi_a^\gamma = \mathcal{F}_a^\gamma \setminus \Big(\bigcup_{\gamma' < \gamma} \mathcal{F}_a^\gamma \Big), \qquad \Theta < \gamma, \tag{4.10}$$

$$\Phi_a^\Theta = \mathcal{F}_a^\Theta \setminus \mathbb{K}[< x_1, \ldots, x_n >]_{x_0}.$$

Кроме того, цепь подмножеств (4.8) множества Y порождает цепь координатных подпространств

$$J_\gamma = \{z \in \mathbb{J} : y(z) = 0, \forall y \in (Y \setminus Y_\gamma)\} \tag{4.11}$$

пространства $\mathbb{J}$. Очевидно, верны формулы

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} J_\gamma = \mathbb{J}, \qquad J_{\gamma'} \subset J_\gamma \quad \forall \gamma' < \gamma.$$

На множествах U, $\hat{\mathcal{F}}_a$ действие полугруппы $\mathbb{N}^n_{-0} = \mathbb{N}^n \setminus \vec{0}$, где $\vec{0}$ – кортеж из нулей, задается формулами

$$\alpha u^i_\beta = u^i_{\alpha+\beta}, \quad \alpha f = D^\alpha(f)$$

для всех $\alpha \in \mathbb{N}^n_{-0}$. Как следует из работы [11], $\hat{\mathcal{F}}_a$ является стратифицированным $\mathbb{N}^n_{-0}$-множеством, если U – стратифицированное $\mathbb{N}^n_{-0}$-множество.

В дальнейшем всюду предполагается, что $\hat{\mathcal{F}}_a$ является стратифицированным $\mathbb{N}^n_{-0}$-множеством, наделенным соответствующим предпорядком (4.6) и строгим предпорядком (4.7).

Определение. Ряд $f \in \mathcal{F}_a$ вида

$$f = u^i_\alpha + h, \qquad h \prec u^i_\alpha \tag{4.12}$$

называется *упорядочено разрешимым* (относительно u^i_α).

Определение. Пусть F – произвольный ряд из алгебры $\mathcal{F}_a$, а $f \in \mathcal{F}_a$ – упорядочено разрешимый ряд относительно u^i_α. Будем говорить, что ряд F редуцируется к ряду $r \in \mathcal{F}_a$ относительно f, если существует элемент $\delta \in \mathbb{N}^n$ для которого $u^i_{\alpha+\delta} \in iv(F)$ и существует ряд $q \in \mathcal{F}_a$ такой, что

$$F = qD^\delta f + r,$$

где $q \preceq F$, $r \preceq F$, $u^i_{\alpha+\delta} \notin iv(r)$.

Когда F редуцируется к r относительно f, мы будем использовать обозначение $F \underset{f}{\to} r$.

В [12] доказано следующее. *Пусть F – произвольный ряд из алгебры $\mathcal{F}_a$ и $u^i_\beta \in iv(F)$. Если $f \in \mathcal{F}_a$ – упорядочено разрешим относительно u^i_α и существует $\delta \in \mathbb{N}^n$ такой, что $u^i_\beta = u^i_{\alpha+\delta}$, то $F \underset{f}{\to} r$.*

Определение. Подмножество S в $\mathcal{F}_a$ называется *слабо разрешимым*, если каждый ряд $f \in S$ упорядочено разрешим относительно некоторого u^i_α. Элемент u^i_α называется старшим членом ряда f и обозначается ltf.

Определение. Пусть $F \in \mathcal{F}_a$, а $S = \{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathcal{F}(a)$ – слабо разрешимое подмножество. Ряд F *редуцируется к $r \in \mathcal{F}(a)$ относительно S*, если существует конечная последовательность одношаговых редукций вида

$$F \underset{f_{i_1}}{\longrightarrow} r_1 \underset{f_{i_2}}{\longrightarrow} r_2 \underset{f_{i_3}}{\longrightarrow} \dots \underset{f_{i_p}}{\longrightarrow} r, \tag{4.13}$$

где $f_{i_j} \in S$. Эта последовательность редукций кратко обозначается $F \underset{S}{\to} r$.

Определение. Будем говорить, что ряд $f \in \mathcal{F}_a$ *не редуцируемый* относительно слабо разрешимого множества S, если $iv(f) \cap O(ltS) = \emptyset$, где

$$ltS = \{ltf : f \in S\}.$$

Определение. Ряд $r \in \mathcal{F}_a$ называется *нормальной формой ряда* $f \in \mathcal{F}_a$ *относительно слабо разрешимого подмножества* $S \subset \mathcal{F}_a$, если $f \underset{S}{\to} r$ и r – не редуцируемый относительно S.

Нормальная форма ряда f относительно S обозначается $NF(f \downarrow S)$. В общем случае нормальная форма ряда относительно произвольного слабо разрешимого подмножества определена неоднозначно. Для однозначности нормальной формы достаточно, чтобы S была пассивной системой [12].

Введем на $\mathbb{N}^n$ бинарную операцию

$$\alpha \diamond \beta = (\mu_1, \dots, \mu_n),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\mu_i = max(\alpha_i, \beta_i) - \alpha_i$.
Определение. Пусть f_1, f_2 – два разрешимых ряда из $\mathcal{F}_a$ вида

$$f_1 = u^i_\alpha + h_1, \quad f_2 = u^i_\beta + h_2, \tag{4.14}$$

где $u^i_\alpha = ltf_1, u^i_\beta = ltf_2$. Тогда разность

$$D^{\alpha\diamond\beta} f_1 - D^{\beta\diamond\alpha} f_2 \tag{4.15}$$

называется *τ-рядом от* f_1, f_2 и обозначается $\tau(f_1, f_2)$.
Определение. Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ – локальная дифференциальная система, являющаяся слабо разрешимым подмножеством в $\mathcal{F}_a$. Будем говорить, что S *удовлетворяет условиям совместности*, если для каждой пары $f_i, f_j \in S$ вида (4.14) соответствующий τ-ряд (4.15) редуцируется к нулю относительно S.

Нижеследующее утверждение и теорема дают ответ на вопрос о принадлежности ряда дифференциальному идеалу.

Утверждение 4.4 *Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathcal{F}_a$ – пассивная система и $ltS = stS$. Ряд $f \in \mathcal{F}_a$ принадлежит дифференциальному идеалу $I = \langle\langle S \rangle\rangle$ тогда и только тогда, когда f редуцируется к нулю относительно S.*

Доказательство. Если $f \underset{S}{\to} 0$, то из определения редукции следует, что $f = \sum a^i_\alpha D^\alpha f_i$, где $f_i \in S$, т.е. $f \in I$.

Обратно, пусть $f \in I$. Как показано в [12], каждый ненулевой элемент из идеала I зависит хотя бы от одного элемента из орбиты $O(ltS)$. Если $f \underset{S}{\to} r$, где ряд r не редуцируется относительно S, то r не зависит от элементов из $O(ltS)$. Значит, $r = 0$.

Если система S не является пассивной, то утверждение 4.4, в общем случае, не верно, т.к. результат редукции определен неоднозначно.

Пример. Пусть дана система $S = \{f_1 = u_{1,1} + u, f_2 = u_{0,2} - u\}$ и ряд $f = u_{1,2} - u_{1,0}$. Данная система не пассивна, т.к. $D_2 f_1 - D_1 f_2 = u_{1,0} + u_{0,1}$ не зависит от элементов орбиты $O(lt(u_{0,2}), lt(u_{1,2}))$. Ряд f представляется двумя способами $f = D_2 f_1 - u_{1,0} - u_{0,1}$, $f = D_1 f_2$, т.е. в первом случае f редуцируется к $-u_{1,0} - u_{0,1}$, а во втором к нулю.

Заметим, что если $f \in \mathcal{F}_b$, то $f \in \mathcal{F}_a$ для бесконечного числа точек a. Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathcal{F}_b$ – локальная дифференциальная система и $f_i(b) = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}_k$. Будем называть точки $a, b \in \mathbb{J}$ эквивалентными по модулю S (и писать $a \sim b\, modS$), если $f_i \in \mathcal{F}_a$ и $f_i(a) = 0$ для всех $f_i \in S$.

Теорема. *Пусть $S = \{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathcal{F}_b$ – локальная дифференциальная система, являющаяся слабо разрешимым подмножеством в $\mathcal{F}_b$, удовлетворяющая условиям совместности, и $f_i(b) = 0$ для всех $f_i \in S$. Тогда S – пассивная система, существует точка $a \in \mathbb{J}$ эквивалентная b по модулю S и брус W, содержащий эту точку, такие, что множество $Z_W(f)$ вида (4.1) является аналитическим многообразием в W с системой параметров $Y \setminus ltS$.*

Доказательство. Пассивность системы S доказана в работе [11]. Там же показано, что существует точка $a \in \mathbb{J}$ ($a \sim b\, modS$) такая, что $f(a) = 0$ для всех рядов f из орбиты $O(S)$. Кроме того, доказано, что существование нормализованной системы $\mathcal{B}$ образующих идеала $\langle\langle S \rangle\rangle$, множество главных переменных которой совпадает с ltS.

Не ограничивая общности, можно считать, что S – нормализованное множество (или в терминологии [20] ортономное), т.к. согласно результатам работ [11], [12], S – пассивная система и существует каноническое множество S' такое, что $\langle\langle S \rangle\rangle = \langle\langle S' \rangle\rangle$. Тогда из утверждения 4.2 следует, что ростки $\mathbb{Z}_a(S)$, $\mathbb{Z}_a(S')$ совпадают. Следовательно, достаточно доказать что найдется брус W, содержащий точку a такой, что аналитическое множество $Z_W(S')$ – многообразие в брусе W.

Согласно утверждению 1.2, нужно показать, что множество аналитических функций из $\tilde{\mathcal{B}}$, соответствующее нормализованной системе образующих $\mathcal{B}$ идеала $\langle\langle S' \rangle\rangle$ задано в некотором брусе $V \subset \mathbb{J}$. Как следует из утверждения 3.1, существует брус $U(a_\tau, \rho)$, в котором все функции из $\widetilde{O(S')}$ являются аналитическими. Поэтому достаточно установить, что множество аналитических функций из $\tilde{\mathcal{B}}$ также определено в $U(a_\tau, \rho)$. Для этого вспомним как строилась в [11] нормализованная система образующих.

Как отмечалось ранее, разбиение множества U (3.7) порождает цепь подалгебр $\mathcal{F}_a^\gamma$ (4.9), цепь подпространств J_γ (4.11) и разбиение $\{\Phi_a^\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ (4.10). Обозначим через a_γ естественную проекцию точки a на подпространство J_γ. Введем еще обозначения:

$$\gamma_0 = min\{\gamma \in \Gamma : O(S) \cap \mathcal{F}_a^\gamma \neq \emptyset\}, \quad \Pi_\gamma = U(a_\tau, \rho) \cap J_\gamma,$$

$$O_\gamma = O(S) \cap \mathcal{F}_a^\gamma, \quad C_\gamma = O(S) \cap \Phi_a^\gamma,$$

где $\mathcal{F}_a^\gamma$, Φ_a^γ задаются формулами (4.9) и (4.10) соответственно. Очевидно, для любого $\gamma^* \geq \gamma$ верна формула

$$O_{\gamma_\star} = C_{\gamma_\star} \cup \bigcup_{\gamma_0 \leq \gamma < \gamma_\star} C_\gamma. \tag{4.16}$$

Обозначим через $< O_\gamma >_{a_\gamma}$ идеал алгебры $\mathcal{F}_a^\gamma$, порожденный множеством O_γ.

Используя принцип трасфинитной индукции покажем, что

1) для любого $\gamma \geq \gamma_0$ существует нормализованная система образующих B_γ идеала $< O_\gamma >_{a_\gamma}$ алгебры $\mathcal{F}_a^\gamma$ такая, что $L_\gamma = ltO_\gamma$, где L_γ – множество главных переменных системы B_γ;

2) все функции из $\tilde{B}_\gamma$ являются аналитическими в в Π_γ.

При $\gamma = \gamma_0$ верны равенства

$$O_{\gamma_0} = S \cap \mathcal{F}_a^{\gamma_0} = S \cap \Phi_a^{\gamma_0} = C_{\gamma_0}.$$

Несложно видеть [11], что множество O_{γ_0} является нормализованной системой образующих идеала $< O_{\gamma_0} >_{a_{\gamma_0}}$. Значит, согласно утверждению 1.2, аналитическое множество

$$Z_{\gamma_0} = \{z \in \Pi_{\gamma_0} : \tilde{f}(z) = 0, \forall f \in \tilde{O}_{\gamma_0}\}$$

является многообразием в Π_{γ_0}. Очевидно, $L_{\gamma_0} = ltO_{\gamma_0}$.

Теперь предположим, что для всех γ, удовлетворяющих неравенствам $\gamma_0 \leq \gamma < \gamma_*$ верны утверждения: существует нормализованная система образующих B_γ идеала $< O_\gamma >_{a_\gamma}$ такая, что $L_\gamma = ltO_\gamma$ и все функции из $\tilde{B}_\gamma$ являются аналитическими в Π_γ. Покажем, что такие же свойства имеют место при $\gamma = \gamma_*$.

Согласно (4.16) и предположению индукции, множество

$$G_{\gamma_*} = C_{\gamma_*} \cup \bigcup_{\gamma_0 \leq \gamma < \gamma_*} B_\gamma$$

является системой образующих идеала $< O_{\gamma_*} >_{a_{\gamma_*}}$. Используя множество G_{γ_*}, в [11] построена нормализованная система образующих B_{γ_*}. В рассматриваемом нами случае, где S' – каноническое множество, имеется своя специфика. Именно, любой ряд $f \in C_{\gamma_*}$ имеет вид $f = u^i_\alpha + g$, где $g \prec u^i_\alpha$, при этом ряд $g \in \mathcal{F}_a^\gamma$, $\gamma < \gamma_*$, является полиномом от главных переменных нормализованной системы образующих B_γ, в силу формулы дифференцирования (3.8). Коэффициенты этого полинома являются степенными рядами, сходящимися в Π_γ, согласно (2.5), и зависящими только от параметрических переменных системы B_γ. Если выразить главные переменные, входящие в g, через ряды из B_γ, то получим ряд $f_* \in B_{\gamma_*}$, сходящийся в Π_{γ_*}.

Как следует из предыдущих рассуждений, множество $B = \bigcup_{\gamma_0 \leq \gamma} B_\gamma$ является нормализованной системой образующих идеала $\langle\langle S \rangle\rangle$ и соответствующее множество $\tilde{B}$ состоит из аналитических функций в брусе $U(a_\tau, \rho)$. Для завершения доказательства остается сослаться на утверждение 1.2.

Замечание. Стандартным образом можно определить касательные расслоения и векторные поля на многообразиях, а также пучки ростков аналитических функций [14, 23].

Пример. Рассмотрим нелинейное уравнение Дюбрей-Жакотен [24]

$$\Delta\psi + \frac{\rho'}{2\rho}[(\nabla\psi)^2 + y] + F = 0, \tag{4.17}$$

где ψ – функция тока, зависящая от x, y, ρ – плотность жидкости, зависящая от ψ, Δ - оператор Лапласа, $(\nabla\psi)^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2$, F – некоторая функция от ψ. Данное уравнение описывает, плоское стационарное течение стратифицированной жидкости в поле силы тяжести. В наших обозначениях (декартовых координатах на $\mathbb{J}$) данное уравнение задается рядом

$$u_{(2,0)} + u_{(0,2)} + \frac{\rho'}{2\rho}[u^2_{(1,0)} + u^2_{(0,1)} + x_2] + F,$$

где ρ, F - аналитические функции от $u_{(0,0)}$. В дальнейшем будем использовать привычные обозначения и писать, например, u_x, u_y вместо $u_{(1,0)}, u_{(0,1)}$.

Мы хотели бы узнать при каких функциях ρ, F уравнение (4.17) допускает обобщенное разделение переменных , т.е. решения вида $\psi = G(\alpha(x)+\beta(y))$, где α, β – функции от x и y соответственно, G – некоторая функция. Такого типа решения описаны в [22], для случая нелинейного уравнения Лапласа. Эту задачу можно переформулировать как задачу исследования совместности системы, образованной уравнением (4.17) и уравнением

$$\phi(\psi)_{xy} = 0, \tag{4.18}$$

где ϕ – обратная функция к G.

Введем новую функцию $w = \phi(\psi)$, тогда уравнения (4.17), (4.18) будут иметь вид

$$\Delta w + (\nabla w)^2 r + yf + g = 0, \tag{4.19}$$

$$w_{xy} = 0. \tag{4.20}$$

Здесь r, f, g – некоторые функции от w. Кратко опишем исследование совместности системы (4.19), (4.20), используя методы описанные выше. Операторы полного дифференцирования (3.8) будем обозначать D_x, D_y. Вычисления объемные, поэтому применяется система компьютерной алгебры Maple [10].

Применяя оператор D_xD_y к (4.19) и редуцируя полученное выражение относительно (4.20), т.е. заменяя все $w_{xy}, w_{xxy}, w_{xxxy}$ на 0, получаем уравнение второго порядка. Редуцируя последнее уравнение относительно (4.19), получаем некоторый полином $E1$ относительно w_x, w_y. Несложно показать, что если все коэффициенты этого полинома обращаются в ноль, то это возможно только тогда, когда уравнение (4.19) имеет вид

$$\Delta w + (\nabla w)^2 + ay + bw = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Обобщенное разделение для этого уравнения можно найти в [22], там же представлены соответствующие картины линий тока. Заметим, что дифференциальный идеал, порожденный последним уравнением и (4.19), обладает нормализованной системой образующих. Главными переменными этой системы образующих можно считать $D_x^n D_y^m w_{xx}$, $D_x^n D_y^m w_{xy}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Если полином $E1$ – не нулевой, то применяя к нему оператор D_x и редуцируя полученное выражение относительно (4.19), (4.20), получим некоторое соотношение $E10$. Если же применить к полиному $E1$ оператор D_y и редуцировать полученное выражение относительно (4.19), (4.20), то получим некоторое соотношение $E01$. Использую (4.19), (4.20), из соотношений $E10$, $E01$ можно исключить все переменные w_{xy}, w_{xx}, w_{yy} и получить новый полином $E2$ от w_x, w_y.

Предположим теперь, что полиномы $E1$, $E2$ отличаются лишь множителем. Это дает семь обыкновенных дифференциальных уравнений на три функции f, g, r, стоящие в левой части (4.19). Из этих семи уравнений можно получить три дифференциальных уравнения первого порядка, решая которые находим:

$$r = \frac{1}{-2w + c_0}, \qquad g = \frac{c_1}{-2w + c_0}, \qquad f = \frac{c_2}{-2w + c_0},$$

где $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Значит, уравнение (4.19) имеет вид

$$\Delta w + (\nabla w)^2 \frac{1}{-2w + c_0} + y \frac{c_2}{-2w + c_0} + \frac{c_1}{-2w + c_0} = 0.$$

Несложно видеть, что общим решением последнего уравнения и уравнения (4.20) является многочлен

$$w = b_1 y + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{4.21}$$

где $b_1, a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 = c_2/4b_1$, $a_0 = (c_1 + 2c_0 a_2 + a_1^2 + b_1^2)/4a_2$. Если ввести новые переменные

$$y' = y + c_1/c_2, \qquad w' = w - c_0/2,$$

то последнее уравнение примет вид

$$\Delta w' + \frac{(\nabla w')^2}{-2w'} + \frac{c_2 y'}{-2w'} = 0.$$

В результате замены

$$w' = \psi^2 - c_2/4$$

получаем уравнение на функцию тока в форме Дюбрей-Жакотен

$$\Delta \psi + \frac{c_2}{c_2\psi - 4\psi^3}[(\nabla \psi)^2 + y] = 0. \tag{4.22}$$

Значит, найденное решение этого уравнения имеет вид

$$\psi = (w - c_0/2 + c_2/4)^{1/2},$$

где функция w задана формулой (4.21). Некоторые другие уравнения Дюбрей-Жакотен, допускающие обобщенное разделение переменных найдены в [25].

В [22] представлена групповая классификация уравнения Дюбрей-Жакотен. Из результатов классификации следует, что уравнение (4.22) допускает двумерную алгебру симметрий, и найденное здесь решение (4.21) не является инвариантным.

5 Заключение

В работе рассматривалась алгебра сходящихся степенных рядов $\mathcal{F}_a$, вместо нее можно изучать кольцо ростков гладких (бесконечно дифференцируемых) вещественнозначных функций, при этом большинство представленных здесь результатов остается справедливым. Наши рассуждения, в частности, основаны на теореме деления Вейерштрасса, но утверждение об единственности остатка имеет место и в гладком случае, если у соответствующего идеала существует нормализованная система образующих. Это связано с тем, что в данном случае теорема Вейерштрасса следует из теоремы о неявной функции [26].

Несомненный интерес представляет распространение описанного подхода на разностные алгебры и уравнения. К сожалению, ограничиться локальными алгебрами для изучения разностных уравнений нельзя. Тем не менее симметрии разностных уравнений были введены В.А. Дородницыным [27] и активно изучаются в настоящее время.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор 14.Y26.31.0006) и Программ государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-544.2012.1, НШ-6293.2012.9).

Список литературы

[1] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д О'Ши. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир. 2000. с. 671

[2] Б. Бухбергер Базисы Гребнера. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов. В книге Компьютерная алгебра. Символические и алгебраические вычисления. Мир, М., 1986

[3] C. Riquier. Les systémes des équations aux dérivées partielles. Paris: Gauthier-Villars, 1910.

[4] M. Janet. Leçons sur les systémes des équations aux dérivées partielles. Paris: Gauthier-Villars, 1929.

[5] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин, Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений, Наука, М., 1986.

[6] Ж. Поммаре Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. Мир, М., 1983.

[7] V.V. Zharinov. Lectures notes on geometrical aspects of partial differential equations. World Scintific: Singapore. 1992

[8] W.M. Seiler. Involution: The Formal Theory of Differential Equations and its Applications in Computer Algebra. NY: Springer, 2009.

[9] M. Marvan. Sufficient set of integrability conditions of an orthonomic system, Found. Comput. Math. V.9, Issue 6, 2009, p. 651Ц674

[10] http://www.maplesoft.com/products/Maple/index.aspx

[11] О. В. Капцов. Системы образующих идеалов алгебры дифференциальных рядов. Программирование. 2014. Т. 40. 2. С. 32–40.

[12] О. В. Капцов. Локальный алгебраический анализ дифференциальных систем.// ТМФ. Т. 183, 3, 2015. с. 342-358

[13] Г. Грауэрт , Р. Реммерт. Аналитические локальные алгебры. Наука, М., 1988.

[14] Р. Ганнинг, Х. Росси. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.

[15] Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.

[16] Н. Бурбаки Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Наука, 1965.

[17] Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978.

[18] А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев, Дискретная математика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 744 с.

[19] Н. Бурбаки, Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.

[20] J. Ritt, Differential Algebra. NY: Dover Publications, 1966

[21] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. ред. А.М.Виноградов и И.С.Красильщик.- М.:-Факториал, 1997.

[22] V.K. Andreev, O.V. Kaptsov, V.V. Pukhnachov, A.A. Rodionov. Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. Springer: Netherlands, 2010.

[23] Д. Мамфорд, Красная книга о многообразиях и схемах. М.: МЦМНО, 2007.

[24] C.-S. Yih, Stratified Flows, Academic Press, New York, 1980.

[25] Ю.В. Шанько, Некоторые классы плоских стационарных течений стратифицированной жидкости// Выч. технологии, Т. 6, є5. 2001, с. 106-117.

[26] М. Голубицкий, В. Гийемин, Устойчивые отображения и их особенности. М.: Мир, 1977

[27] В. А. Дородницын, Группы преобразований в сеточных пространствах. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., 34, ВИНИТИ, М., 1989, с.149Ц191

Сведения об авторе

Капцов Олег Викторович
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Сибирский федеральный университет
660036, г. Красноярск, ул. Академгородок, ИВМ СО РАН,
E-mail: kaptsov@icm.krasn.ru
тел.: 89135589312

Ключевые слова: совместность дифференциальных уравнений, редукция, бесконечномерное многообразие, базис Гребнера.
Kaptsov Oleg Victorovich
Institute of Computational Modelling SB RAS,
Siberian Federal University
660036, Krasnoyarsk, Akademgorodok, ICM SD RAS
E-mail: kaptsov@icm.krasn.ru
tel.: 89135589312

Key words: compatibility of differential equations, reduction, infinite-dimensional manifold, Gröbner bases