СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Поиски методов решения алгебраических уравнений степеней выше второй оставались безрезультатными долгое время — вплоть до середины 16 века, когда в книге «Великое искусство» были опубликованы формулы для решения уравнений степеней 3 и 4. Приведем кратко основные результаты, полученные для уравнений степеней выше 4.

Значительные успехи для уравнения пятой степени сделали Эрмит [1] и Кронекер [2] в 1858 г. независимо друг от друга. Им удалось найти решение уравнения пятой степени

$$y^5 + 5y = a \tag{1}$$

через модулярные эллиптические функции. Отметим, что общее алгебраическое уравнение 5-й степени с помощью преобразования Чирнгауза сводится к уравнению с одним параметром (1) (см. [3], [4]).

Одним из важных результатов в теории решения уравнений произвольной степени был результат Меллина 1921 г. [5]. Он привел интегральную формулу и разложение в гипергеометрический ряд для решения общего алгебраического уравнения

$$y^n + x_1 y^{n_1} + \ldots + x_s y^{n_s} - 1 = 0,\ n > n_1 > \ldots > n_s > 0. \tag{2}$$

Интегральная формула Меллина для ветви $y_0(x)$ с условием $y_0(0) = 1$ следующая:

$$y_0(x) = \frac{\frac{1}{n}}{(2\pi i)^s} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n_1}{n}\zeta_1 - \ldots - \frac{n_s}{n}\zeta_s\right)\Gamma(\zeta_1)\ldots\Gamma(\zeta_s)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n'_1}{n}\zeta_1 + \ldots + \frac{n'_s}{n}\zeta_s + 1\right)} x^{-\zeta} d\zeta, \tag{3}$$

где $n'_k = n - n_k$, $x^{-\zeta} = x_1^{-\zeta_1} \ldots x_s^{-\zeta_s}$, $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_s$, а $\Gamma(z)$— гамма-функция Эйлера.

Что же касается областей сходимости интегралов Меллина–Барнса, то известно, что таковыми являются полиугловые области [6]. Более подробно области сходимости интегралов Меллина–Барнса исследованы в статьях [6] и [7].

Представление в виде гипергеометрического ряда для $y_0(x)$ (см. [5], [8]) такое:

$$y_0(x) = \frac{1}{n} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{(-1)^{|k|}\, \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n}k_1 + \ldots + \frac{n_s}{n}k_s\right)}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_s!\, \Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n_1'}{n}k_1 - \ldots - \frac{n_s'}{n}k_s + 1\right)}\, x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_s^{k_s},$$

где $|k| = k_1 + \ldots + k_s,\ k_i \geqslant 0$. Отметим, что областями сходимости гипергеометрических рядов являются поликруговые области. В статье [9] исследована область сходимости гипергеометрических рядов в терминах амебы алгебраического множества.

Проиллюстрируем вышесказанное на примере триномиального уравнения, т.е. уравнении (2) при $s = 1$. В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$y^n + xy^m - 1 = 0. \tag{4}$$

Областью сходимости интеграла Меллина–Барнса, представляющего главное решение уравнения, является сектор (рис. 1)

$$|arg\, x| < \frac{m}{n}\, \pi,$$

а область сходимости гипергеометрического ряда для $y_0(x)$ есть круг (см. [8])

$$|x| < \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}.$$

Заметим, что полиугловые области (в которых сходятся интегралы Меллина–Барнса) и поликруговые области (в которых сходятся степенные ряды) имеют непустое пересечение. Это позволяет аналитически продолжать интеграл Меллина–Барнса в степенной ряд и обратно.

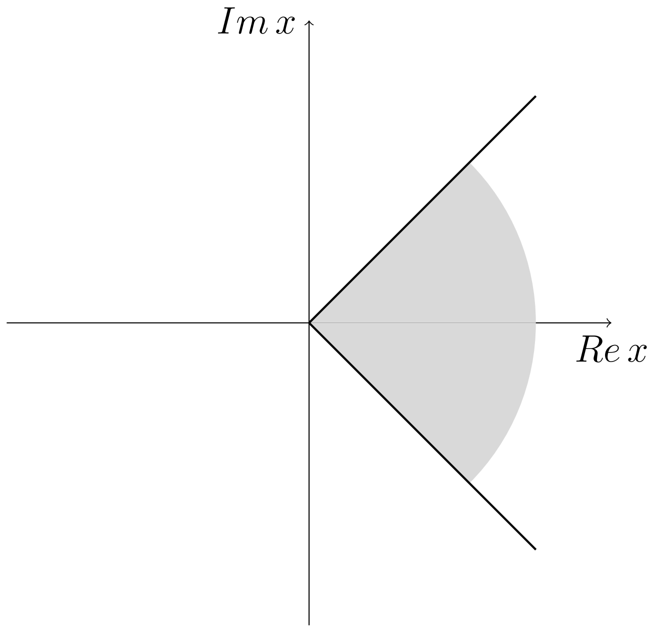

Рисунок 1 — Область сходимости интеграла Меллина–Барнса для главного решения уравнения (4).

Еще одним известным результатом для решения алгебраического уравнения является результат Биркелана [10]. Он исследовал вопрос о представлении корней алгебраических уравнений при помощи гипергеометрических функций от нескольких переменных. Биркелан показал, что общее алгебраическое уравнение при помощи элементарной подстановки можно привести к следующему:

$$z^q = z^p + l_1 z^{m_1} + l_2 z^{m_2} + \cdots + l_s z^{m_s}, \tag{5}$$

т.е. к уравнению, в котором коэффициенты при любых двух мономах «заморожены». Далее он при помощи формулы Лагранжа получил для $q-p$ его корней, не обращающихся при $l_1 = l_2 = \ldots = l_s = 0$ в нуль, следующее разложение в ряд:

$$z_j^\gamma = \varepsilon^{j\gamma} \frac{\gamma}{q-p} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_s}^{0\ldots\infty} \varepsilon^{jv} \frac{(\tau)_{r-1}}{k_1!\,k_2!\ldots k_s!}\, l_1^{k_1}\, l_2^{k_2} \ldots l_s^{k_s},$$

где γ — произвольная постоянная, $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{q-p}}$ — первообразный корень из единицы степени $q-p$, а r, v, и τ определяются следующими суммами:

$$r = \sum_{\nu=1}^{s} k_\nu, \quad v = \sum_{\nu=1}^{s} (m_\nu - q) k_\nu, \quad \tau = \frac{\gamma + v}{q-p} + 1,$$

$(\lambda)_l = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+l-1)$ — символ Похгаммера, причем $(\lambda)_0 = 1$. Заметим, что уравнение Меллина является частным случаем уравнения Биркелана (в нем коэффициенты при старшей и нулевой степенях равны ± 1).

Что же касается уравнений низших степеней, а именно, степеней 3 и 4, то наряду с известными формулами Кардано и Феррари для решения указанных уравнений, отметим результат, изложенный в книге Леонарда Эйлера «Универсальная арифметика» (1768–1769) [11]. Метод решения уравнения четвертой степени

$$y^4 + ay^2 + by + c = 0, \tag{6}$$

именуемый в настоящее время «решением Декарта–Эйлера», заключается в следующем. Рассмотрим резольвентное уравнение третьей степени

$$z^3 + \frac{a}{2}z^2 + \frac{a^2 - 4c}{16}z - \frac{b^2}{64} = 0,$$

коэффициенты которого выражаются через коэффициенты исходного уравнения. Обозначив через z_1, z_2, z_3 корни последнего уравнения, корни уравнения (6) находятся по формуле

$$\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.$$

Эта формула была доказана с помощью симметрических сумм.

Целью данной работы является доказательство формулы Декарта–Эйлера для уравнения с одним параметром на основе гипергеометрических методов. Здесь важное значение для нас будут иметь формулы Меллина и Биркелана для решения алгебраического уравнения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты проделанной работы:

1. Решение уравнения 4 степени представлено в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов;

2. На основе обобщенных гипергеометрических рядов доказана формула Декарта–Эйлера.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Hermite, Ch. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré/ Ch. Hermite// C. R. Acad. Sci. — 1858. — V. 46. — P. 508-515.

2 Kronecker, L. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré/ L. Kronecker// C. R. Acad. Sci. — 1858. — V. 46. — P. 1150–1152.

3 Tschirnhausen, E. Nova metodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione/ E. Tschirnhausen// Acta eruditorum. — Leipzig, 1683. — V. 2. — P. 204-207.

4 Клейн, Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени/ Ф. Клейн; под ред. А.Н. Тюрина; пер. с нем. — М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 336с.

5 Mellin, H.J. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma/ H.J. Mellin// C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. — 1921. — V. 172. — P. 658-661.

6 Антипова, И. А. Обращения многомерных преобразований Меллина и решение алгебраических уравнений/ И.А. Антипова// Матем. сб. — 2007. — Т.198, №4. — С. 3-20.

7 Семушева, А.Ю. Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений. В кн.: Комплексный анализ и дифференциальные операторы (к 150-летию С.В. Ковалевской)/ А.Ю. Семушева, А.К. Цих. — КрасГУ. — 2000. — С. 134-146.

8 Passare, M. Algebraic equations and hypergeometric series. In the book «The legacy of Niels Henrik Abel»/ M. Passare, A. Tsikh// Springer: Berlin-Heidelberg-New York, 2004. — P. 653-672.

9 Passare, M. Amoebas: their spines and their contours/ M. Passare, A. Tsikh// Contemporary Math. — 2005. — V. 377. — P. 275-288.

10 Birkeland, R. Les équations algébriques et les fonctions hypergéométriques/ R. Birkeland// Ark. Norske Vid.-Akad. Oslo. — 1927. — V. 8. — P. 1–23.

11 Эйлер, Л. Универсальная арифметика/ Л. Эйлер. — Типография при Имп. Акад. наук, 1769. — Т. 2. — 586с.

12 Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции/ Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М.: Наука, 1973. — Т. 2. — 580с.

13 Хованский, А.Г. Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде/ А.Г. Хованский. — М.: МЦНМО, 2008. — 296с.

14 Прасолов, В.В. Многочлены/ В.В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2014. — 336с.

15 Курош, А.Г. Курс высшей алгебры/ А.Г. Курош. — Изд. 9. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. — 431с.

16 Михалкин, Е.Н. Некоторые формулы для решений триномиальных и тетраномиальных алгебраических уравнений/ Е.Н. Михалкин// Журн. СФУ. Матем. и физика. — 2012. — №5(2). — С. 230-238.

17 Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа: в 2 т./ Г.М. Фихтенгольц. — 6-е изд., стереотп. — СПб.: Лань, 2005. — Т. 2. — 464с.

18 Садыков, Т.М. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных/ Т.М. Садыков, А.К. Цих. — М.: Наука, 2014. — 408с.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
А. Цих / А.К. Цих
«8» июня 2017 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ДЕКАРТА–ЭЙЛЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 4-Й СТЕПЕНИ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.01 Комплексный анализ

Научный руководитель доктор физико-математических наук, доцент	Е. Мих 8.06.17 / Е.Н. Михалкин
Выпускник	8.06.17 / Е.О. Белова

Красноярск 2017