РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа по теме «Полиномиальные решения разностного уравнения» содержит 22 страницы текста, 8 использованных источников.

ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ, МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНУЛЛИ, СУММИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ РАЗНОСТНЫЙ ОПЕРАТОР.

Цель работы — исследовать разностные уравнения с постоянными коэффициентами и полиномиальной правой частью. Описать множество полиномиальных разностных операторов, обладающих суммирующим эффектом и пространство полиномиальных решений для этих операторов.

В результате исследований получены условия, при которых разностный оператор обладает суммирующим эффектом. Для операторов, обладающих суммирующим эффектом, доказана теорема, описывающая пространство полиномиальных решений.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Исчисление конечных разностей — математическая дисциплина, занимающаяся исследованием функций при дискретном изменении аргумента. Слово «конечные» используется здесь в несколько устаревшем смысле «не бесконечно малые», т.е. не связанные с предельными переходами. Поскольку дифференциальное исчисление занимается изучением пределов разностей, а исчисление конечных разностей — самими разностями, то естественно, что между этими двумя теориями существует много параллелей. В конечно-разностном исчислении роль дифференциалов играют конечные разности функций, интегрированию соответствует суммирование разностей, а роль дифференциальных уравнений играют конечно-разностные уравнения.

Истоки теории конечных разностей восходят к античности, — Птолемей (ок. 150 н.э.), в монографии «Альмагест» ввел таблицу разностей первого порядка, чтобы облегчить расчеты в таблице длин хорд. Разности второго порядка использовал при вычислении своих таблиц логарифмов в «Логарифмической арифметике» в 1624 Г.Бриггс. Шесть интерполяционных формул, приведенных Ньютоном в «Математических началах натуральной философии» (1687) дают начало теории интерполяции.

В 18 веке теория конечных разностей развивалась параллельно с основными разделами математического анализа. Лагранж ввел в исчисление конечных разностей символические методы, Лаплас сделал конечные разности главным инструментом в своей «Аналитической теории вероятностей». Эйлер в своих работах по дифференциальному исчислению использовал предельные переходы в конечных разностях, а в 1755 году в «Основаниях дифференциального исчисления» он впервые использует оператор Δ. Для Лейбница вычисления с конечными разностями явились отчасти исходным пунктом создания дифференциального исчисления, которое Тейлор в «Методе приращений» (1715) затем пытался построить прямо на этой основе. В Тейлоре следует видеть первого творца теории конечных разностей в собственном смысле слова. В 1730 году Д. Стирлинг публикует работу «Метод разностей», заложившую прочный фундамент исчисления конечных разностей. Восемнадцатое столетие можно считать веком, когда теория конечных разностей приобрела характер самостоятельной дисциплины.

К основным задачам теории конечных разностей относятся задачи интерполирования и суммирования функций. С последней задачей тесно связана задача решения уравнений в конечных разностях. Общую формулу для суммирования степеней натуральных чисел получил в 1713 году Я. Бернулли. А Эйлер (1733) и независимо от него Маклорен (1738) получили формулу, позволяющую выражать дискретные суммы значений для произвольной функции через производные и интеграл от исходной функции.

На комплекснозначных функциях $f(x)$ целочисленного переменного определим *оператор сдвига* δ

$$\delta f(x) = f(x+1),$$

для $\alpha \in \mathbb{Z}_+, \delta^\alpha = \underbrace{\delta \circ \cdots \circ \delta}_{\alpha}$, δ^0 — тождественный оператор.

Будем рассматривать полиномиальный разностный оператор

$$P(\delta) = \sum_{\alpha=0}^{m} c_\alpha \delta^\alpha, \tag{1}$$

где c_α — постоянные.

Характеристическим многочленом разностного оператора (1) назовем многочлен

$$P(z) = \sum_{\alpha=0}^{m} c_\alpha z^\alpha.$$

Данная работа посвящена задаче отыскания частных решений уравнений вида

$$P(\delta) f(x) = Q(x),$$

где $Q(x)$ — заданный полином, $f(x)$ — искомая функция. Задача нахождения таких решений возникает, например, в одном из важнейших приложений исчисления конечных разностей — в *задаче суммирования функций дискретного аргумента.* Задача суммирования рассматривается в параграфе 1. Эта задача состоит в отыскании суммы значений некоторой данной функции $\varphi(t)$ в целых неотрицательных точках отрезка $[0, x]$:

$$S(x) = \sum_{t=0}^{x} \varphi(t).$$

Сумму $S(x)$ можно найти, зная решение $f(x)$ разностного уравнения

$$(\delta - 1) f(x) = \varphi(x),$$

так как в этом случае $S(x)$ выражается через значения $f(x)$ в концах отрезка $[0, x+1]$:

$$S(x) = f(x+1) - f(0). \tag{2}$$

По аналогии с задачей интегрирования функций, функцию $f(x)$ называют *дискретной первообразной функции* $\varphi(x)$, а формулу (2) — *дискретным аналогом формулы Ньютона–Лейбница.*

В настоящей работе рассматривается разностное уравнение $P(\delta) f(x) = Q(x)$, где $P(\delta) = \sum\limits_{\alpha=0}^{m} c_\alpha \delta^\alpha$ — полиномиальный разностный оператор (δ — оператор сдвига), $Q(x)$ — заданная функция, $f(x)$ — искомая функция. В параграфе 2 показывается, что, если характеристический многочлен оператора $P(\delta)$ удовлетворяет условию $P(1) = 0$, тогда сумму $\sum\limits_{t=0}^{x} Q(t)$ можно выразить через значения $f(x)$ в концах отрезка $[0, x+1]$. Таким образом, в этом случае будем говорить, что функция $f(x)$ играет роль дискретной первообразной для функции $Q(x)$, а оператор $P(\delta)$ является оператором, обладающим «суммирующим эффектом». Эти результаты отражены в теоремах 1, $1'$ и определении 1 данной работы.

Теорема 1. *Рассмотрим уравнение* $P(\delta) f(x) = Q(x)$, *где* $P(\delta) = \sum\limits_{\alpha=0}^{m} c_\alpha \delta^\alpha$. *Если характеристический многочлен оператора* $P(\delta)$ *удовлетворяет условию* $P(1) = 0$, *то сумма*

$$S(x) = Q(0) + Q(1) + Q(2) + \cdots + Q(x) = \sum_{t=0}^{x} Q(t) \tag{3}$$

выражается через значения $f(x)$ *в концах отрезка* $[0, x+1]$, *а именно:*

$$S(x) = R(\delta)\big(f(x+1) - f(0)\big),$$

где $R(\delta)$ — *разностный оператор, определяемый соотношением* $P(\delta) = (\delta - 1) \circ R(\delta)$.

Теорема 1′. *В условиях теоремы 1 обозначим через* n *кратность корня* $z = 1$ *характеристического многочлена разностного оператора* $P(\delta)$. *Тогда для суммы (3) справедливо следующее представление:*

$$S(x) = \tilde{R}(\delta) \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \sum_{i=0}^{k} (-1)^{n-i} C_n^i + \sum_{k=1}^{n} f(x+k) \sum_{i=k}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i \right),$$

где $\tilde{R}(\delta)$ — *разностный оператор, определяемый соотношением*

$$P(\delta) = (\delta - 1)^n \circ \tilde{R}(\delta).$$

Определение 1. Полиномиальный разностный оператор $P(\delta)$, характеристический многочлен которого удовлетворяет условию $P(1) = 0$, мы назовем *оператором, обладающим суммирующим эффектом.*

В параграфе 3 для разностного уравнения $P(\delta)f(x) = Q(x)$, когда $Q(x)$ — произвольный заданный полином, а оператор $P(\delta)$ обладает суммирующим эффектом, найдена формула для полиномиальных решений. Коэффициенты полученного полиномиального решения выражаются через обобщенные числа Бернулли. Эти факты приведены в определении 2, теореме 2 и замечаниях к ней.

Определение 2. Коэффициенты $\tilde{b}_\nu$ разложения функции

$$g(t) = \frac{t^k}{c_0 + c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \cdots + c_m e^{mt}}$$

в степенной ряд

$$g(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\tilde{b}_\nu t^\nu}{\nu!}$$

будем называть *обобщенными числами Бернулли.*[1].

Произведение $\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-(\nu-1))$ будем называть *обобщенной степенью* числа μ и обозначать $\mu^{(\nu)}$; будем считать $\mu^0 = 1, \mu^{(-\nu)} = \frac{1}{\mu^{(\nu)}}$.

[1]Некоторые обобщения чисел и многочленов Бернулли рассматриваются в работах [4], [5], [7], [8]

Функцию Хевисайда определим следующим образом:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geqslant 0 \end{cases}$$

Теорема 2 *Пусть* $P(\delta) = \sum\limits_{\alpha=0}^{m} c_\alpha \delta^\alpha$ *— разностный оператор,* k *— кратность корня* $z = 1$ *характеристического уравнения* $P(z) = 0$*, тогда полиномиальные решения уравнения*

$$P(\delta)f(x) = x^\mu, \quad x, \mu \in \mathbb{Z}_+$$

имеют степень, равную $\mu + k$ *и для них справедлива формула*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\tilde{b}_\nu}{\nu!} \frac{x^{\mu+k-\nu}}{(\mu+k-\nu)^{(k-\nu)}} + \Theta(\mu-k-1) \cdot \sum_{\nu=k+1}^{\mu} \frac{\tilde{b}_\nu}{\nu!} \mu^{(\nu-k)} x^{\mu+k-\nu} + \sum_{i=0}^{k-1} q_i x^{k-1-i}, \tag{4}$$

где $\tilde{b}_\nu$ *— обобщенные числа Бернулли,* q_i *— произвольные константы,* Θ *— функция Хевисайда.*

Замечание 1. В силу линейности разностного полиномиального оператора $P(\delta)$ теорема легко обобщается на случай, когда в правой части исходного разностного уравнения стоит произвольный полином

$$P(\delta)f(x) = \sum_{\mu=0}^{w} a_\mu x^\mu.$$

Замечание 2. Полученные в теореме 2 многочлены (4) естественно назвать *обобщенными многочленами Бернулли.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе получены следующие результаты. Исследованы разностные уравнения с постоянными коэффициентами и полиномиальной правой частью. Описано множество полиномиальных разностных операторов, обладающих суммирующим эффектом и пространство полиномиальных решений для этих операторов.

Основные результаты бакалаврской работы докладывались на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный» (Красноярск, 2017 г.). Доклад был отмечен дипломом первой степени.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Виноградов, И.М. Математическая энциклопедия, Т.1 / И.М. Виноградов — М.: Советская энциклопедия, 1977.

2. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. — М.: Наука, 1967.

3. Ландо, С. К. Лекции о производящих функциях / С. А. Ландо. – 3-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2007.

4. Шишкина, О. А. Многочлены Бернулли от нескольких переменных и суммирование мономов по целым точкам рационального параллелотопа / О. А. Шишкина // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия «Математика». — 2016. — Т. 16. — С. 89–101.

5. Шишкина, О. А. Формула Эйлера–Маклорена для рационального параллелотопа / О. А. Шишкина // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия «Математика». — 2015. — Т. 13. — С. 56–71.

6. Эйлер, Л. Дифференциальное исчисление : пер. с лат. / Л. Эйлер — М.: Гостехиздат, 1949.

7. Shishkina, O. A. Multidimensional Analog of the Bernoulli Polynomials and its Properties / O. A. Shishkina // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. — 2016. — V. 9(3). — P. 376-384.

8. Temme, N.M. Bernoulli polynomials old and new: Generalization and asymptotics / N.M. Temme // CWI Quarterly. — 1995. — V. 8(1). — P. 47-66.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_________/А. К. Цих
«15» 06 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор _________/Е. К. Лейнартас
14.06.2017

Выпускник _________/А. А. Григорьев
14.06.2017

Красноярск 2017