

УДК 504.3.054, 519.688

## **Development of the Mathematical Model of the Dynamics of the Atmosphere and the Distribution of Harmful Emissions Over the City of Krasnoyarsk**

**Michael Yu. Hrebtov<sup>a</sup>, Andrei A. Gavrilov<sup>a,b</sup>,  
Alexander A. Dekterev<sup>a,b</sup> and Elena S. Tepfer<sup>\*a</sup>**  
*<sup>a</sup>S.S. Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS  
1 Akademika Lavrentieva, Novosibirsk, 630090, Russia  
<sup>b</sup>Siberian Federal University  
79 Svobodny, Krasnoyarsk, 660041, Russia*

Received 01.09.2017, received in revised form 17.10.2017, accepted 02.12.2017

---

*The article is devoted to the development of a mathematical model of atmospheric dynamics and the spread of environmentally harmful impurities over the city, taking into account the influence of the river that does not freeze in the winter. The article describes a mathematical model for calculating the dynamics of the atmosphere and the distribution of harmful outcomes and model testing results by the example of several tests. Also shown is the result of a model calculation of the spread of harmful impurities directly above the city of Krasnoyarsk.*

*Keywords: Mathematical model, computational domain, distribution of impurities, free convection, turbulent flow, emissions, concentrations.*

---

Citation: Hrebtov M.Yu., Gavrilov A.A., Dekterev A.A., Tepfer E.S. Development of the mathematical model of the dynamics of the atmosphere and the distribution of harmful emissions over the city of Krasnoyarsk, J. Sib. Fed. Univ. Eng. technol., 2017, 10(8), 1000-1006. DOI: 10.17516/1999-494X-2017-10-8-1000-1006.

---

---

© Siberian Federal University. All rights reserved

\* Corresponding author E-mail address: TepferES@ya.ru

## **Разработка математической модели динамики атмосферы и распространения вредных выбросов над г. Красноярском**

**М.Ю. Хребтов<sup>а</sup>, А.А. Гаврилов<sup>а,б</sup>,  
А.А. Дектерев<sup>а,б</sup>, Е.С. Тэпфер<sup>а</sup>**

*<sup>а</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН  
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1*

*<sup>б</sup>Сибирский федеральный университет  
Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79*

---

*Статья посвящена разработке математической модели динамики атмосферы и распространения экологически вредных примесей над городом с учетом влияния незамерзающей в зимнее время реки. В статье представлено описание математической модели для расчета динамики атмосферы и распространения вредных выбросов и результаты тестирования модели на примере нескольких задач. Также показан результат модельного расчета распространения вредных примесей непосредственно над г. Красноярском.*

*Ключевые слова: математическая модель, расчетная область, распространение примесей, свободная конвекция, турбулентное течение, выбросы, концентрации.*

---

Для расчета динамики атмосферы и распространения вредных выбросов используются различные методики и математические модели: эмпирические, статистические, детерминистические и их комбинации. Наиболее перспективным, базирующимся на физических законах является класс детерминистических моделей, основанных на полных пространственных уравнениях гидродинамики. При этом в разных вариантах используются Лагранжево, Эйлерино или гибридное описание распространения вредных примесей.

Для расчета динамики атмосферы и распространения примесей выбрано Эйлерино полевое описание и его реализация в разрабатываемых авторами программных комплексах TFlows и SigmaFlow [1].

Динамика атмосферы над г. Красноярском не типична для крупных городов, что обусловлено наличием в черте города крупной реки Енисей, которая из-за наличия вверх по течению крупнейшей Красноярской ГЭС не замерзает зимой даже в сильные морозы. Это условие определяет значительный градиент температуры между поверхностью реки и окружающей атмосферой, при этом поверхность реки и летом и зимой находится в движении, что не позволяет использовать существующие специализированные программные продукты.

### **Математическая модель**

Разработана физико-математическая модель аэродинамики и теплообмена атмосферного пограничного слоя, а также распространения вредных выбросов, основанная на нестационар-

ной системе уравнений Рейнольдса для слабосжимаемой среды с переменной температурой. Фазово-осредненные уравнения для переноса импульса (1), тепла (2) (в форме потенциальной температуры) и влаги (3) являются основой для модели на нестационарных уравнениях Рейнольдса (U-RANS):

$$\frac{D\langle U_i \rangle}{Dt} = -\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \beta g_i (\langle T \rangle - T_{ref}), \quad (1)$$

$$\frac{D\langle T \rangle}{Dt} = -\frac{\partial \tau_{\theta j}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\frac{D\langle H \rangle}{Dt} = -\frac{\partial \tau_{hj}}{\partial x_j}. \quad (3)$$

Так как в крупномасштабных атмосферных течениях влияние турбулентной диффузии намного сильнее, чем молекулярной, то последней можно пренебречь.

Нестационарные уравнения (1-3) формулируются в форме разложения, в котором переменные  $\Phi = U, T, H$  раскладываются на часть, отфильтрованную по времени (с периодом фильтра, пропорциональным шагу по времени), обозначенную угловыми скобками, и стохастическую часть. Уравнения замыкались через многопараметрическую модель, где для рейнольдсовых напряжений использовалась гипотеза турбулентной вязкости, а для турбулентного потока тепла использовалось дополнительное слагаемое с амплитудой пульсаций температуры. Применяли следующий вид для тензора рейнольдсовых напряжений  $\tau_{ij}$  и турбулентных потоков тепла ( $\tau_{\theta j}$ ) и влаги ( $\tau_{hj}$ ):

$$\tau_{ij} \equiv \overline{u_i u_j} = -\nu_t \left( \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \langle k \rangle \delta_{ij} - c_\phi \frac{\langle k \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \beta (g_i \tau_{\theta j} + g_j \tau_{\theta i}), \quad (4)$$

$$\tau_{\theta i} \equiv \overline{\theta u_i} = -c_\phi \frac{\langle k \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \left( \tau_{ij} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \xi \tau_{\theta j} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \langle \theta^2 \rangle \right), \quad (5)$$

$$\tau_{hi} \equiv \overline{h u_i} = -c_\phi \frac{\langle k \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \left( \tau_{ij} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial x_j} + \xi \tau_{hj} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \right), \quad (6)$$

где  $\nu_t = c_\mu \langle k \rangle^2 / \langle \epsilon \rangle$  – турбулентная вязкость;  $\beta$  – коэффициент теплового расширения.

Выражения (4)-(6) получены из точных уравнений для вторых моментов, с сохранением структуры всех источников членов. Отметим, что в отличие от температуры влажность представлялась как пассивная примесь, что отражено в отсутствие слагаемого с гравитацией в выражении (6). Величины в фигурных скобках имеют значение отфильтрованных по времени трехмерных полей, получаемых решением соответствующих эволюционных уравнений: для кинетической энергии турбулентности, ее скорости диссипации и квадрата пульсаций температуры.

В итоге, добавляя к системе (1)-(6) уравнения для кинетической энергии турбулентности, ее скорости диссипации и квадрата пульсаций температуры (трехпараметрическую модель  $k-\epsilon-\theta^2$ ), получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений [2].

Для дискретизации системы дифференциальных уравнений используется метод конечных объемов, реализованный для расчета на произвольных совмещенных неструктурированных расчетных сетках. Аппроксимация всех членов уравнений (нестационарных, конвективных, диффузионных) осуществляется схемами второго порядка точности. Взаимосвязь поля давле-

ния и поля скорости происходит через процедуру расщепления Simple-C. Для решения системы алгебраических уравнений используется многосеточный метод.

### Тестирование

Для тестирования математической модели рассмотрено несколько тестовых задач о свободной конвекции. Первая задача представляет собой задачу о развитии свободноконвективного течения в зазоре между цилиндрами. Внутри цилиндра радиусом 46,3 мм расположен другой цилиндр радиусом 17,8 мм. Пространство между цилиндрами заполнено воздухом. Стенки внутреннего цилиндра имеют постоянную температуру 100 °С, стенки внешнего – 54 °С. Система находится в поле сил тяжести, в результате в полости между цилиндрами формируется ламинарное конвективное течение. На рис. 1 изображена общая картина течения, распределение поля температуры и график температуры в сравнения с экспериментом.

Вторая тестовая задача посвящена формированию турбулентного течения в замкнутой пространственной полости с нагреваемой стенкой. На рис. 2 представлены результаты сопоставления картины течения в камере с нагреваемой стенкой, полученные расчетом и экспериментально PIV-методом в ИТ СО РАН.

### Результаты моделирования

Красноярск расположен по берегам реки и окружен предгорьем Саян и холмами. Для построения расчетной области брали геодезические данные. Для предварительного моделирования использовалась расчетная область размером 32x17x2 км, на которой строилась сетка, состоящая из около 5,6 млн узлов (рис. 3).

При задании граничных условий считалось, что река является источником влаги и имеет постоянную температуру ~ 0 °С. Температура окружающей поверхности земли менялась со временем по синусоидальному закону, имитируя суточный цикл. Данные по суточной динамике температуры брали из осреднения данных городских метеостанций [3]. При моделировании учитывалось движение реки, полученное из предварительного 2D-расчета течения

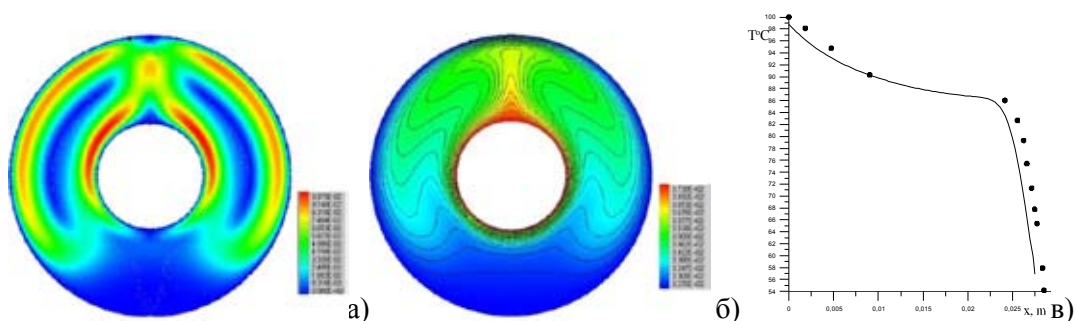


Рис. 1. Течение в зазоре между цилиндрами: а – модуль скорости; б – поле температуры; в – распределения температуры вдоль вертикальной линии над внутренним цилиндром

Fig. 1. The flow in the gap between the cylinders: a – the velocity modulus; b – the temperature field; c – the temperature distribution along the vertical line above the inner cylinder

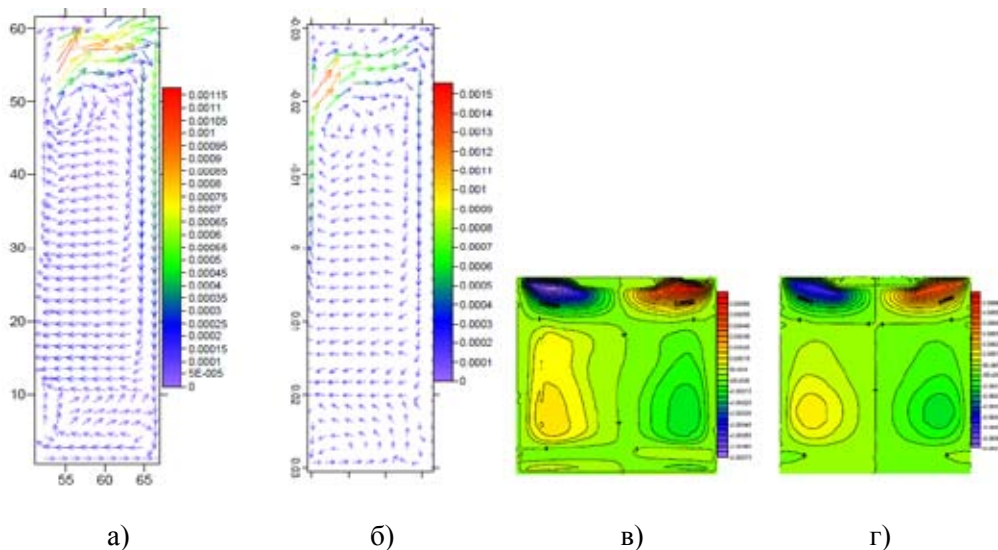


Рис. 2. Турбулентное течение в полости. Поле скорости в центральном сечении: а – численный расчет; б – PIV-измерение. Компонента скорости U: в – расчет; г – PIV-эксперимент

Fig. 2. Turbulent flow in the cavity. The velocity field in the central section: а – numerical calculation; б – PIV-measurement. Component of velocity U: в – calculation; д – PIV-experiment

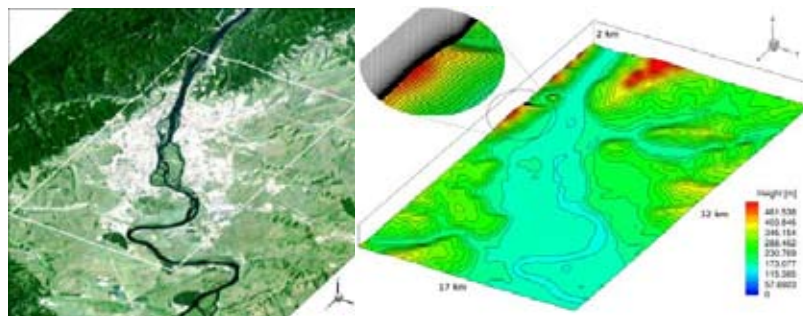


Рис. 3. Расчетная область атмосферы над г. Красноярском и расчетная сетка

Fig. 3. The calculated atmospheric region above the city of Krasnoyarsk and the calculated grid

воды в реке. Основными источниками выбросов в атмосферу в городе выступают предприятия энергетики, металлургии и транспорт. Данные по температуре поверхности и источникам загрязнений основывались на анализе литературных источников и данных натуральных измерений (рис. 4).

В результате расчета получают данные о суточной динамике атмосферы над городом и распространении вредных примесей (рис. 5). Усредненные по времени (за сутки) поля концентрации примеси, полученные при моделировании, показаны на рис. 6.

Время расчета единичного варианта на одном процессоре класса Intel 7 составляет порядка 300 ч. В дальнейшем предполагается реализовать модель для параллельных расчетов на высокопроизводительной кластерной системе, что позволит выполнять моделирование в режиме реального времени.

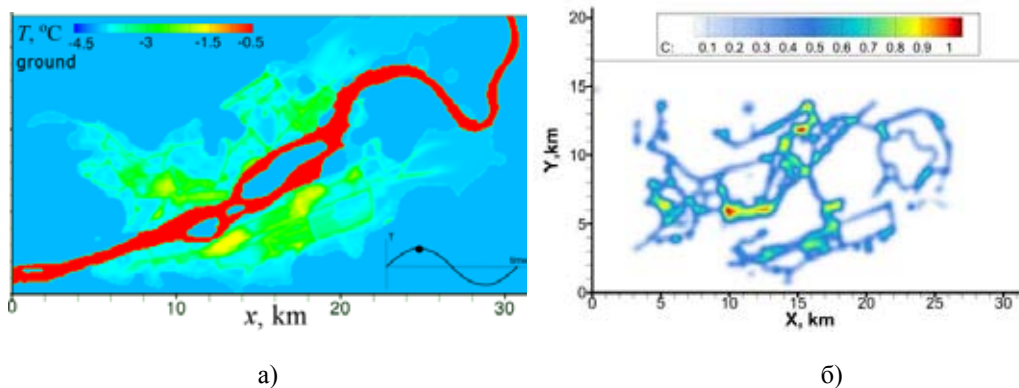


Рис. 4. Характерные распределения: а – температуры вблизи поверхности земли в ноябре; б – источники загрязнений

Fig. 4. Characteristic distributions: a – temperatures near the surface of the earth in November; б – sources of pollution



Рис. 5. Результат модельного расчета распространения вредностей над г. Красноярском

Fig. 5. The result of calculation of the spread of hazards over the city of Krasnoyarsk

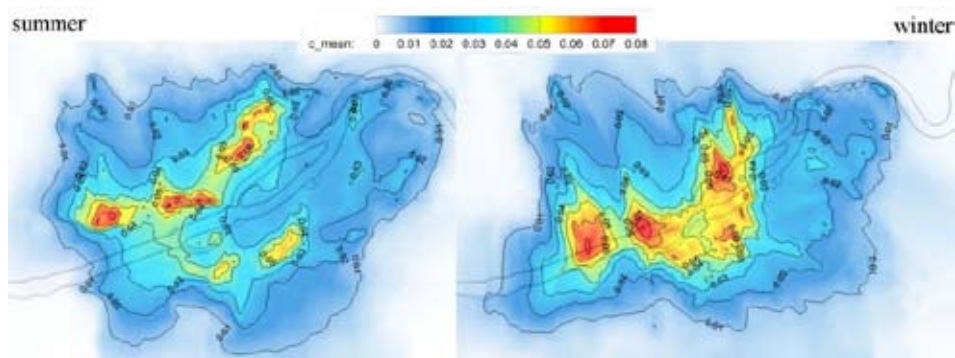


Рис. 6. Расчетные усредненные концентрации загрязняющих веществ на высоте 50 м над землей. Левый рисунок – в летний период, правый – в зимний

Fig. 6. Average concentrations of pollutants at a height of 50 m above ground. The left drawing is in summer, the right one in winter

### Заключение

В статье представлена математическая модель динамики атмосферы и распространения загрязнений над г. Красноярском. Приведены результаты тестирования модели и предварительные результаты расчетных исследований. Показана необходимость развития модели для возможности ее использования на высокопроизводительных кластерных системах с целью проведения расчетов в реальном режиме времени.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научных проектов № 16-41-240788 p\_a и 16-41-242156 p\_офи\_м.*

### Список литературы

- [1] Дектерев А.А., Гаврилов А.А., Минаков А.В. Современные возможности CFD кода SigmaFlow для решения теплофизических задач. *Сборник научных статей. Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии*. Киев: «НПК Триакон», 2010, 2(4), 117-122 [Dekterev A.A., Gavrilov A.A., Minakov A.V. Modern possibilities of SFD code SigmaFlow for solving thermophysical problems. *Collection of scientific articles. Modern science: research, ideas, results, technology*. Kiev: "NPVK Triacon", 2010, 2 (4), 117-122 (in Russia)]
- [2] Hanjalić, K. and Hrebtov, M. Ground boundary conditions for thermal convection over horizontal surfaces at high Ra numbers (Bound. Layer Meteor, published online, DOI 10.1007/s10546-016-0135-z) 2016.
- [3] Хлебопрос Р.Г., Тасейко О.В., Иванова Ю.Д., Михайлюта С.В. *Экологические очерки: монография*, Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. 130 с. [Khlebopros R.G., Taseiko O.V., Ivanova Yu.D., Mykhaylyut S.V. *Ecological essays*. Krasnoyarsk: Siberian Federal University, 2012. 130 p. (in Russia)]