На правах рукописи

Башмаков Степан Игоревич

ВРЕМЕННЫЕ МНОГОАГЕНТНЫЕ ЛОГИКИ И ПРОБЛЕМА УНИФИКАЦИИ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель: **Рыбаков Владимир Владимирович**
д-р физ.-мат. наук, профессор

Официальные оппоненты: **Перязев Николай Алексеевич,**
д-р физ.-мат. наук, профессор,
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», кафедра вычислительной техники,
профессор

Одинцов Сергей Павлович,
д-р физ.-мат. наук,
ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук,
лаборатория логических систем,
ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»

Защита состоится 02 марта 2018 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 на базе ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Б1-01.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан "___" января 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Шлапунов
Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В диссертации исследуется ряд модальных логик знания и времени. Такие логики являются одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений исследования многомодальных систем, расположенным на стыке математической логики и информатики. Особое внимание исследователей в данной теории, как и в целом в нестандартных логиках, привлекает вопрос унификации формул. Решению унификационных проблем в исследуемых логиках и посвящена данная работа.

Теория модальных логик является сравнительно новым разделом математической логики — образование логического модального исчисления можно датировать работами К. Льюиса 1918-1920 гг. Кратко *модальные логики* можно охарактеризовать, как логики, язык которых помимо стандартных логических связок, включает символы *модальных операторов*, имеющие различную интерпретацию в зависимости от выбранной логической системы. Тем не менее, стандартными модальными операторами являются «необходимо, что» (символьно $\Box$) и «возможно, что» ($\Diamond$ соответственно).

Временные логики являются особым типом модальных, предусматривающим качественное описание и рассуждение об изменении истинности определенного утверждения с течением времени, используя множество временных операторов. Стандартными временными модальными операторами являются «иногда», означающий истинность утверждения в какой-то доступный момент в будущем, и «всегда», гарантирующий истинность в любой доступный в будущем момент. Такие логики активно развиваются в областях математической логики, философии, Computer Science [13].

Первым исследование временных логик как модальных систем предложил в 1950-е А. Прайор, за последующие полвека данная область стала сложной технической дисциплиной [13]. Значительные приложения в Computer Science имеет линейная временная логика $\mathcal{LTL}$ [22]. Аксиоматизация для $\mathcal{LTL}$ впервые предложена в работе [12], проблема допустимости решена в [29], найден базис допустимых правил [4]. В большинстве исследований, наиболее распространена идея модального времени как транзитивной процедуры, при котором любое временное состояние доступно из текущего. Однако, также существует концепция нетранзитивного времени, основывающаяся на том, что переход знаний из прошлого в будущее не всегда проходит гладко [32].

Другим примером многомодальных логик являются логики Знания: дополненные модальностями K_i, представляющими знания элементов, интерпретируемых как *агенты*, предназначенными для моделирования эффектов и свойств знаний агентов в изменяющейся среде. Основополагающей работой в этой области является книга Я. Хинтикка [17], в которой предложено использование модальностей для описания семантики знания. Значительные приложения агентных логик найдены в различных областях знаний, таких как социология (изучение когнитивного мышления и условий неопределенности), биология и медицина (моделирование работы организма, эволюционных процессов), и, конечно, информатика. В ряде работ В. В. Рыбаковым рассматривалась концепция $Chance\ Discovery$ в многоагентной среде, исследовалась логика моделирующая неопределенность с точки зрения агентов. В 1990-е активное развитие получила концепция $Common\ Knowledge$ [10], в которой в качестве базового принято знание агентов, представленное как $\mathcal{S}5$-подобная модальность. В данной диссертации рассматриваются временные логики, а также временные многоагентные логики, сочетающие одновременно операторы времени и знания. Подобные системы активно исследуются в последние десятилетия [1; 32; 33].

В основе используемых в работе методов и подходов лежит *реляционная семантика* Крипке — наиболее известная и (за исключением, возможно, алгебраической) самая изученная модальная семантика. Идеи потока времени, переходов между вычислительными состояниями, сетей возможных миров могут быть представлены в виде простых графических структур. При этом, модальная логика предоставляет интересный инструментарий для работы с этими структурами и выражения их внутренней информации. Такими графическими структурами являются *фреймы* (или *шкалы*) Крипке, представляющие собой множества с наборами отношений, используемыми для интерпретации логических символов [6; 27].

Одной из наиболее важных проблем нестандартных логик, является допустимость правил вывода. Правило называется допустимым в логике λ, если для любой подстановки ε, из $\alpha_1^\varepsilon, \ldots, \alpha_n^\varepsilon \in \lambda$ следует $\beta^\varepsilon \in \lambda$. Наиболее значительные результаты в этой области принадлежат В. В. Рыбакову, решившему в 1984 г. проблему Х. Фридмана [11]: существует алгоритм, распознающий допустимость правил вывода интуиционистской логики [26]; а позднее, проблему допустимости в широком классе модальных логик [27].

Теория унификации является важным приложением логики в информатике, на котором, в частности, основываются многие методы автоматической дедукции и баз данных [2]. С момента своего формирования в области Computer Science, унификационная проблема состояла в ответе на вопрос: возможна ли трансформации двух термов в один синтаксически эквивалентный заменой переменных другими термами [25]? Понятия «унификация» и «наиболее общий унификатор» были предложены в 1970 г. [21] в качестве инструментов тестирования Term Rewriting Systems для локального слияния путем вычисления критических пар. В настоящеее время теория унификации играет важную роль во многих областях информатики и математики.

Применительно к алгебраической интерпретации, имеет место классификация эквациональных теорий или переменных алгебр, относительно типов унификации [7].

Пусть дана эквациональная теория E и конечное множество пар переменных, называемое E-унификационной проблемой:

(П): $(s_1,t_1),\ldots,(s_n,t_n)$.

Унификатор (решение) для (П) это подстановка σ, такая что

$E \Vdash \sigma(s_1) = \sigma(t_1), \ldots, \sigma(s_n) = \sigma(t_n)$.

(П) называется унифицируемой (разрешимой), если существует по крайней мере один унификатор. Подстановка σ называется более общей, чем τ, если существует подстановка θ такая, что $E \Vdash \theta \circ \sigma = \tau$.

Наиболее общий унификатор (сокр. mgu – most general unifier) интерпретируется как «лучшее» решение унификационной проблемы (П).

Говорят, что эквациональная теория E имеет *унитарную* унификацию (или унификацию типа =1), если для любых двух унифицируемых переменных t_1, t_2, существует mgu σ такой, что $E \Vdash \sigma(t_1) = \sigma(t_2)$. Если существует конечно (бесконечно) много максимальных унификаторов, тогда E имеет *финитарный* (*инфинитарный*) тип унификации. Если же не существует максимального унификатора, тогда E имеет унификационный тип =0 (худший, нульарный тип). Символьно типы унификации могут быть записаны как =1 (унитарный), $=\omega$ (финитарный), =inf (инфинитарный) и =0 (нульарный).

Вопросы унификации и унификационных типов многообразия алгебр могут быть переформулированы для многообразия соответствующих логик [15]. С этой точки зрения, в языке логики $\mathcal{L}$ рассматривается формула A, унификатором для которой в $\mathcal{L}$ называется подстановка σ такая, что $\Vdash_{\mathcal{L}} \sigma(A)$. В нестандартных логиках формула A называется *унифицируемой*, если такой унификатор σ существует, а базовая проблема унификации эквивалентна (и чаще рассматривается в виде) возможности формулы стать теоремой после замены переменных, с сохранением значений коэффициентов-параметров.

Классическое пропозициональное исчисление обладает лучшим типом — унитарной унификацией [23]. Существуют ли другие логические исчисления с тем же свойством? Отрицательный ответ был дан для всех модальных логик, обладающих дизъюнктивным свойством [18]: формула $\Box x \vee \Box \neg x$ унифицируема в соответствующей логике $\mathcal{L}$ и имеет унификаторы

$$\sigma_1 : x \mapsto \top, \qquad \sigma_2 : x \mapsto \bot$$

и не существует более общего унификатора для них обоих. Однако, в работе [16] доказано, что многие известные системы, такие как, например, $\mathcal{K}4, \mathcal{S}4, \mathcal{S}4\mathcal{G}rz, \mathcal{GL}$, обладают финитарным типом унификации, т.е. существует конечно много лучших (или *максимальных*) унификаторов для любой унифицируемой формулы. Интуиционистская логика $\mathcal{I}nt$ (или многообразие алгебр Гейтинга) также не имеет унитарного типа унификации [7], но обладает финитарным [15]. Используя алгебраический подход, Гиларди показал [14], что многообразие дистрибутивных решеток и многообразие дистрибутивных решеток с псевдодополнением имеют унификационный тип $=$0.

В. В. Рыбаковым унификационная проблема решалась для модальных $\mathcal{S}4$, $\mathcal{G}rz$ и интуиционистской логик, предложен подход к определению всех неунифицируемых формул в широком классе модальных логик: для расширений $S4$ и $[K4 + (\Box\bot \equiv \bot)]$ [28]. С. П. Одинцовым и В. В. Рыбаковым исследовалась проблема унификации в паранепротиворечивых логиках Нельсона $\mathcal{N}4$ и минимальной Йохансcона $\mathcal{J}$. В частности, найден алгоритм построения конечных полных наборов унификаторов для $\sim$-свободных формул в $\mathcal{N}4$ [24].

В конце 1990-х С. Гиларди предложил новый подход к исследованию унификации через приложение идей проективных алгебр и техники, основанной на проективных формулах [15], позволивший решить задачу построения конечных полных наборов унификаторов, предложив эффективные алгоритмы для целого ряда логик [14–16]. Основываясь на данном подходе, В. Джик и П. Войтылак установили проективную унификацию в расширениях $\mathcal{S}4.3$ [9]. В. В. Рыбаков исследовал $\mathcal{LTL}$ с оператором $Until$, для которой установил проективность унификации [31]. Из проективности унификации в логике следует существование mgu, но не наоборот. К примеру, доказано существование mgu для каждой унифицируемой формулы в $\mathcal{LTL}$ с операторами $Next, Until$, и построен пример унифицируемой, но не проективной формулы [5].

Важным следствием существования вычислимых полных наборов унификаторов стало решение проблемы допустимости (например, [19]), что значительно увеличило важность подхода к унификации через проективные формулы. Унификационная проблема редуцируема к проблеме допустимости [30]: унифицируема ли формула φ в логике $\mathcal{L}$, если правило вывода $\varphi/\bot$ не допустимо в $\mathcal{L}$? В некоторых случаях, при финитарном типе унификации, проблема допустимости также сводима к проблеме унификации [3].

Позднее было установлено еще одно следствие проективной унификации в логике — *почти структурная полнота* [8]: каждое допустимое не пассивное правило выводимо в логике.

Широкую применимость демонстрирует подход, основанный на построении *граунд унификатора* (полученного подстановкой констант вместо всех переменных): как в качестве доказательства унифицируемости произвольной формулы, так и при построении проективных унификаторов [7; 31]. Последнее, однако, не всегда возможно: было показано, что не для каждой формулы в $\mathcal{I}nt$ [15] и $\mathcal{S}4.3$ [9] граунд унификатор дает построение проективного. Не смотря на это, использование граунд унификатора при решении унификационных проблем целесообразно: даже если логика имеет $=0$ тип, его построение остается возможным.

Одновременно с интенсивными исследованиями унификации в транзитивных логиках, крайне малоизучены нетранзитивные случаи, где проблемы обретают гораздо большую сложность, а многие методы оказываются неприменимыми или требуют значительной модификации. Однако, несправедливо было бы не отметить существование работ для логик с нестандартными отношениями. К примеру, Э. Ерабеком доказан нульарный тип унификации в минимальной нормальной логике $\mathcal{K}$ [20], а В. Джиком унитарный для $\mathcal{S}5$ и её расширений [7]. Ф. Вольтером и М. Захарьящевым доказана неразрешимость унификации над $\mathcal{K}$ с универсальной модальностью.

Представленные в диссертации результаты являются продолжением исследований В. В. Рыбакова с коллегами, посвященных логикам знания и времени, унификационным проблемам и правилам вывода. В ряде работ В. В. Рыбаковым рассматривались логики нетранзитивного времени, совместно с С. В. Бабёнышевым исследовалась линейная временная логика $\mathcal{LTL}$, с Э. Калардо рассматривалась линейная транзитивная временная многоагентная логика $\mathcal{LTK}$, а ее нетранзитивный случай — с А. Н. Лукьянчук.

Целью настоящей работы является решение проблем унификации в ряде временных и многоагентных модальных логик, сформулированных в виде следующих **задач**:

1. Найти критерии неунифицируемости для любой формулы в линейных временных логиках знания $\mathcal{LTK}$ (над множеством натуральных чисел) и $\mathcal{LFPK}$ (над множеством целых чисел, с обратными бинарными отношениями по времени).
2. Построить обобщенный критерий неунифицируемости для класса полных по Крипке логик с выразимой универсальной модальностью.
3. Доказать проективную унификацию в логике $\mathcal{LFPK}$ и некоторых расширениях, а также в линейной модальной логике нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$. Найти алгоритм построения наиболее общего унификатора в данных логиках.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для линейных временных логиках знания $\mathcal{LTK}$ (над множеством натуральных чисел) и $\mathcal{LFPK}$ (над множеством целых чисел, с обратными бинарными отношениями по времени):
   (a) найдены критерии для определения любой неунифицируемой формулы в логиках;
   (b) построены базисы пассивных правил вывода.
2. Для всех полных по Крипке логик с выразимой универсальной модальностью:
   (a) найден универсальный критерий для определения любой неунифицируемой формулы;

   (b) построен универсальный базис пассивных правил вывода.

3. Для логики $\mathcal{LFPK}$ и ее расширений наборами модальных операторов $Until+, Until-$ и $Next, Previous$:
   (a) доказана проективность унификации;
   (b) предложены алгоритмы построения наиболее общего унификатора для любой унифицируемой формулы.
4. Для линейной модальной логики нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$:
   (a) доказана возможность эффективно установить унифицируемость произвольной формулы путем построения граунд унификаторов;
   (b) доказана проективность унификации;
   (c) предложены алгоритмы построения наиболее общего унификатора для любой унифицируемой формулы.

Методы исследования. Используется язык многомодальных логик. Основным инструментом исследования является реляционная семантика Крипке, расширенная на случаи временных и многоагентных систем. При решении унификационной проблемы применяются подходы через отрицание унифицируемости, построение граунд унификаторов, метод основанный на проективных формулах. Также используются общие методы теоретико-модельной и алгебраической семантики для пропозициональных нестандартных логик.

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми, носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях как унификационных проблем, так и других вопросов модальных логик транзитивного и нетранзитивного времени, логик знаний агентов (допустимости, аксиоматизируемости), а также в различных областях математики (теория моделей, теория графов) и информатики (Computer Science, Term Rewriting Systems, Artificial Intelligence). Результаты диссертации также могут быть использованы при составлении программ специальных курсов по математической логике для студентов, магистрантов и аспирантов математических и инженерных специальностей, в том числе кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики СФУ.

Апробация работы. Результаты диссертации апробировались на семинарах кафедры алгебры и математической логики ИМиФИ СФУ по нестандартным логикам, «Красноярском алгебраическом семинаре», международных конференциях «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2016), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2016, 2017), «Математика в современном мире» (Новосибирск, 2017), всероссийских научных мероприятиях: конференции «Математики — Алтайскому краю (МАК)» (Барнаул, 2017) и школе-семинаре «Синтаксис и семантика логических систем» (Улан-Удэ, 2017), а также ряде молодежных конференций: «Ломоносов» (Москва, 2016); «МНСК» (Новосибирск, 2016); «Проспект Свободный» (Красноярск, 2016).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 14 работах [34–47], среди которых 5 статей в рецензируемых журналах [34–38]. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях [34–37] в изданиях, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Работа изложена на 83 страницах и включает 6 глав, введение, заключение и список литературы (90 наименований). Нумерация определений и утверждений в работе имеет вид $X.Y$, где X соответствует номеру текущей главы, а Y — номеру определения или утверждения внутри главы, в соответствии с его типом.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, перечислены основные выносимые на защиту результаты, используемые методы и подходы, сформулированы научная новизна, теоретическая и практическая значимость, вклад автора, приводятся данные об апробации представленных результатов и их публикации, краткие сведения об объеме и структуре работы.

В **первой главе** даются основные определения теории пропозициональных логик, модальных и соответствующих временных логик, правил вывода, реляционной семантики Крипке, важных свойств и характеристик, таких как финитная аппроксимируемость логики, временная степень и длина формул. Приводятся основные определения и наиболее существенные результаты теории унификации. Вводится используемое далее определение унифицируемой формулы, а также граунд унификатора.

Определение 1.30 *Формула $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ называется* ***унифицируемой*** *в логике $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда существует подстановка $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i$ для каждой p_i такая, что $\alpha(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$. В этому случае, подстановка σ называется унификатором формулы α.*

Граунд унификатором *называется унификатор, полученный путем подстановки констант $\{\top, \bot\}$ вместо переменных формулы.*

Известна [28] следующая теорема.

Теорема 1.2 *Для любой модальной логики $\mathcal{L}$ расширяющей $S4$ и любой модальной формулы α, α не унифицируема в $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда формула*

$$\Box\alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \Diamond p \wedge \Diamond \neg p \right]$$

доказуема в $\mathcal{L}$ (т.е. данная формула принадлежит $\mathcal{L}$).

Опираясь на данный подход, в **Главах 2, 3 и 4** доказываются теоремы, описывающие все неунифицируемые формулы во временных логиках $\mathcal{LTK}$, $\mathcal{LFPK}$, а также в широком классе модальных и временных логик с выразимой в языке универсальной модальностью.

Определение 1.31 *Унификатор σ формулы $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ называется* ***более общим****, чем σ^1 в логике $\mathcal{L}$, если существует постановка σ^2, такая что для любой переменной p_i: $\sigma^1(p_i) \equiv \sigma^2(\sigma(p_i)) \in \mathcal{L}$.*

Унификатор σ формулы $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ называется ***наиболее общим унификатором*** *(кратко* ***mgu****), если для любого другого σ^i унификатор σ является более общим.*

Приводится общий вид определения проективной формулы в логике.

Определение 1.33 *Формула $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ называется проективной в логике $\mathcal{L}$, если существует унификатор τ (называемый проективным унификатором) для формулы α такой, что $\Box\alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{L}$ для любой переменной p_i формулы α.*

Известна [15] следующая лемма:

Лемма 1.4 *Если подстановка σ_p проективна для формулы φ в логике $\mathcal{L}$, то $\{\sigma_p\}$ является полным набором унификаторов для φ (т.е. σ_p является наиболее общим для φ).*

Проективность любой унифицируемой формулы является замечательным результатом,гарантирующим существование mgu для каждой такой формулы и, значит, унитарный тип унификации. Исследование унификации через проективные формулы проведено в **главах 5 и 6** диссертации.

Глава 2 посвящена исследованию вопроса унификации через поиск критериев неунифицируемости и базиса пассивных правил в линейной временной логике знания $\mathcal{LTK}$, дается семантическое построение логики. Основные результаты **второй главы** приведены в §2.2, 2.3, получены автором лично и опубликованы в [34]. В §2.2 доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1 *Любая формула α не унифицируема в $\mathcal{LTK}$ тогда и только тогда, когда формула*

$$\Box_{\leq}\alpha \to \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_{\leq}p \wedge \Diamond_{\leq}\neg p\right]$$

является теоремой в $\mathcal{LTK}$.

Кроме того, в §2.3 найден бесконечный и конечный базисы пассивных правил в логике $\mathcal{LTK}$.

Определение 1.9 *Правило $r := \alpha_1, ..., \alpha_n/\beta$ называется* ***пассивным*** *для $\mathcal{L}$ если для любой подстановки g формул вместо переменных в r никогда не выполняется $g(\alpha_1) \in \mathcal{L}\& \ldots \&g(\alpha_n) \in \mathcal{L}$ (в терминах унификации: если формулы из посылки правила не имеют общих унификаторов).*

Предложение 2.1 *Правила*

$$r_n := \frac{\bigvee_{1\leq i\leq n} \Diamond_{\leq}p_i \wedge \Diamond_{\leq}\neg p_i}{\perp}$$

формируют базис для всех пассивных правил в логике $\mathcal{LTK}$.

Теорема 2.2 *Правило*

$$r := \frac{\Diamond_{\leq}p \wedge \Diamond_{\leq}\neg p}{\perp}$$

является базисом для всех пассивных правил в логике $\mathcal{LTK}$.

В **Главе 3** рассматриваются вопросы, аналогичные представленным в **Главе 2**, для линейной временной логики знания $\mathcal{LFPK}$. Основными результатами **третьей главы** являются теоремы **3.1** (§3.2) и **3.2** (§3.3), полученные в нераздельном соавторстве с А. В. Кошелевой и В. В. Рыбаковым и опубликованные в [35].

Теорема 3.1 *Любая формула α не унифицируема в $\mathcal{LFPK}$ тогда и только тогда, когда формула*

$$\Box_F \Box_P \alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \neg \Box_F \Box_P p \wedge \neg \Box_F \Box_P \neg p \right]$$

является теоремой в $\mathcal{LFPK}$.

Теорема 3.2 *Правила*

$$r_m := \frac{\bigvee_{1 \le i \le m} \neg \Box_F \Box_P p_i \wedge \neg \Box_F \Box_P \neg p_i}{\perp}$$

формируют базис всех пассивных правил вывода в логике $\mathcal{LFPK}$.

В **четвертой главе** дается обобщение полученных результатов для случая произвольной полной по Крипке временной логики с выразимой в языке универсальной модальностью, опубликованное в статье [38] в нераздельном соавторстве с А. В. Кошелевой и В. В. Рыбаковым. В §4.1 дано семантическое построение, в §4.4 рассматриваются примеры таких логик ($\mathcal{LTL}$, $\mathcal{LFPK}$, логика ветвящегося зиг-заг времени $\mathcal{L}(n)$).

Пусть язык логики содержит модальный оператор $\Box_U$ и правило определения истинности формул содержащих $\Box_U$ на модели $M = \langle F, V \rangle$ логики задается следующим образом:

$$\forall x \in F, \langle F, x \rangle \Vdash_V \Box_U \varphi \leftrightarrow [\forall y \in F, \langle F, y \rangle \Vdash_V \varphi] .$$

Логикой с универсальной модальностью $\mathcal{L}^U$ будем называть логику, язык которой содержит модальный оператор $\Box_U$ и $\mathcal{L}^U$ полна по Крипке (т.е. существует такой класс фреймов K , что $\mathcal{L}^U = L(K)$.

В §4.2 доказывается следующая теорема.

Теорема 4.1 *Формула α неунифицируема в $\mathcal{L}^U$ тогда и только тогда, когда*

$$\Box_U \alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p \right]$$

является теоремой в $\mathcal{L}^U$.

Также получено обобщение для бесконечного базиса пассивных правил в этом классе логик (§4.3).

Теорема 4.2 *Правила*

$$r_n := \frac{\bigvee_{1\leq i\leq n} \Diamond_U p_i \wedge \Diamond_U \neg p_i}{\perp}$$

формируют базис всех пассивных правил вывода в любой логике $\mathcal{L}^U$.

В **<u>пятой главе</u>**, следуя подходу С. Гиларди и работе [31], исследован вопрос унификации в логике $\mathcal{LFPK}$ и ее модификациях, дополненных операторами $Next, Previous$ и $Until+, Until-$ ($\mathcal{LFPK}_{\mathcal{U}_-}^{\mathcal{U}_+}$ и $\mathcal{LFPK}_{\mathcal{U}_-,\mathcal{P}}^{\mathcal{U}_+,\mathcal{N}}$) через проективные формулы. В §5.1 приводится семантическое описание этих модификаций (для удобства вводится единое обозначения для всех трех логик: $\mathcal{L}_P^F$), в §5.2 доказывается, что любая унифицируемая в данных логиках формула является проективной, предложен алгоритм построения наиболее общего унификатора. Основным результатом является **Теорема 5.1**, опубликованная в статье [36] и полученная в нераздельном соавторстве с А. В. Кошелевой и В. В. Рыбаковым.

Формула $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ называется **проективной** в логике $\mathcal{L}_P^F$, если существует унификатор τ (называемый проективным) для формулы α такой, что $\Box_F\Box_P\alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{L}_P^F$ для любой переменной p_i формулы α.

Доказана следующая теорема, а также два следствия, обобщающие результат для всех $\mathcal{L}_P^F$ в целом.

Теорема 5.1 *Любая унифицируемая в* $\mathcal{LFPK}$ *формула проективна.*

Для любой унифицируемой в логике формулы φ следующая подстановка для всех переменных x_i дает построение наиболее общего унификатора, путем последовательного применения к каждой переменной формулы:

$$\sigma(x_i) := \Big(\Box_F\Box_P\varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge x_i\Big) \vee \Big(\neg\Box_F\Box_P\varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge T(x_i)\Big),$$

где $T(x_i)$ — граунд унификатор формулы φ.

В **<u>шестой главе</u>** дано семантическое построение линейной логики нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$ (§6.1), в §6.2 доказывается эффективная определимость унифицируемости и проективность унификации в логике $\mathcal{ULITL}$, а также ряд вспомогательных утверждений. Основными результатами являются теоремы **6.1** и **6.2**, полученные автором лично и опубликованные в [37].

Теорема 6.1 *В логике $\mathcal{ULITL}$ унифицируемость произвольной формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ может быть эффективно установлена при помощи подстановок $\sigma(\varphi)$ следующего вида: $\forall p_i \in Var(\varphi)$ $\sigma(p_i) \in \{\top, \bot\}$.*

Теорема 6.2 *Любая унифицируемая в $\mathcal{ULITL}$ формула проективна.*

Аналогично предыдущей главе, следующая подстановка дает построения наиболее общего унификатора для любой унифицируемой формулы $\sigma(p_i)$, для всех переменных $p_i \in Var(\varphi)$:

$$\sigma(p_i) := (\Box_U \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \Box_U \varphi \wedge gu(p_i)),$$

где gu — граунд унификатор формулы φ.

Заключение

В диссертации получены следующие результаты:

1. Для линейных временных логик знания $\mathcal{LTK}$ (над множеством натуральных чисел) и $\mathcal{LFPK}$ (над множеством целых чисел):
   (a) найдены критерии для определения любой неунифицируемой формулы в логиках;
   (b) построены базисы пассивных правил вывода.
2. Для всех полных по Крипке логик с выразимой универсальной модальностью:
   (a) найден универсальный критерий для определения любой неунифицируемой формулы;
   (b) построен универсальный базис пассивных правил вывода.
3. Для логики $\mathcal{LFPK}$ и ее расширений наборами модальных операторов $Until+, Until-$ и $Next, Previous$:
   (a) доказана проективность унификации;
   (b) предложены алгоритмы построения наиболее общего унификатора для любой унифицируемой формулы.
4. Для линейной модальной логики нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$:
   (a) доказана возможность эффективно установить унифицируемость произвольной формулы путем построения граунд унификаторов;

(b) доказана проективность унификации;

(c) предложены алгоритмы построения наиболее общего унификатора для любой унифицируемой формулы.

Дальнейшие исследования связаны с унификационными вопросами в области интуиционистских, модальных, временных, многоагентных и мультиозначиваемых логик.

Список литературы

1. Юн, В. Ф. Полимодальная логика индуктивных линейных по времени фреймов / В. Ф. Юн // Сиб. электр. матем. изв. — 2015. — Т. 12. С. 421–431.

2. Baader F. Unification theory / F. Baader, J. H. Siekmann // Handbook of Logic in AI and LP. — Oxford Univ. Press, 1994. — P. 41–125.

3. Baader, F. Unification in modal and description logics / F. Baader, S. Ghilardi // Logic J. IGPL. — 2011. — V. 19. — P. 705–730.

4. Babenyshev, S. Linear temporal logic LTL: basis for admissible rules / S. Babenyshev, V. Rybakov // J. Log. Comput. — 2011. — V. 21. — P. 157–177.

5. Babenyshev, S. V. Unification in linear temporal logic LTL / S. V. Babenyshev, V. V. Rybakov // Ann. Pure Appl. Logic. — 2011. — V. 162. — P. 991–1000.

6. Chagrov, A. Modal logic / A. Chagrov, M. Zakharyaschev. — Oxford Univ. Press, 1997. — 605 p.

7. Dzik, W. Unitary Unification of S5 Modal Logic and its Extensions / W. Dzik // Bull. Sect. Logic. — 2003. — V. 32, N. 1–2. — P. 19–26.

8. Dzik, W. Remarks on projective unifiers / W. Dzik // Bull. Sect. Logic. — 2011. — V. 40, N. 1. — P. 37–45.

9. Dzik, W. Projective unification in modal logic // W. Dzik, P. Wojtylak // Logic J. IGPL. — 2012. — V. 20, N. 1. — P. 121–153.

10. Fagin, R. Reasoning About Knowledge / R. Fagin, J. Y. Halpern, Y. Moses, M. Vardi. — MIT press, 1995. — 536 p.

11. Fridman, H. One hundred and two problems in mathematical logic / H. Fridman // J. Symbolic Logic. — 1975. — V. 40, N. 3. — P. 113–130.

12. Gabbay, D. M. On the temporal analysis of fairness / D. Gabbay, A. Pnueli, S. Shelah, J. Stavi // Proc. 7th Symp. Princ. Program. Lang. — ACM Press, 1980. — P. 163–173.

13. Gabbay, D. M. Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects / D. M. Gabbay, I. M. Hodkinson, M. A. Reynolds. — Clarendon Press, 1994. — V.1. — 653 p.

14. Ghilardi, S. Unification through Projectivity, / S. Ghilardi // J. Log. Comput. — 1997. — V. 7. — P. 733–752.

15. Ghilardi, S. Unification in Intuitionistic logic / S. Ghilardi // J. Symbolic Logic. — 1999. — V. 64, N. 2. — P. 859–880.

16. Ghilardi, S. Best solving modal equations / S. Ghilardi // Ann. Pure Appl. Logic. — 2000. — V. 102, N. 3. — P. 183–198.

17. Hintikka, J. Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions / J. Hintikka. — Ithaca, NY : Cornell Univ. Press, 1962. — 179 p.

18. Hughes, G. E. A Companion to Modal Logic / G. E. Hughes, M. J. Cresswell. — London : Methuen, 1984. — 203 p.

19. Iemhoff, R. On the admissible rules of intuitionistic propositional logic / R. Iemhoff // J. Symbolic Logic. — 2001. — V. 66, N. 1. — P. 281–294.

20. Jerábek, E. Blending margins: the modal logic K has nullary unification type / E. Jerábek // J. Log. Comput. — 2015. — V. 25. — P. 1231–1240.

21. Knuth, D. E. Simple word problems in universal algebras / D. E. Knuth, P. B. Bendix // Comput. Problems Abstract Algebra. — 1970. — P. 263–297.

22. Manna, Z. The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems: Specification / Z. Manna, A. Pnueli. — Springer, 1992. — 426 p.

23. Martin, U. Boolean unification — the story so far / U. Martin, T. Nipkow // J. Symbolic Comput. — 1988. — V. 7. — P. 275–293.

24. Odintsov, S. P. Unification Problem in Nelson's Logic N4 / S. P. Odintsov, V. V. Rybakov // Siber. Electr. Math. Rep. — 2014. — V. 11. — P. 434–443.

25. Robinson, A. A machine oriented logic based on the resolution principle / A. Robinson // J. ACM. — 1965. — V. 12, N. 1. — P. 23–41.

26. Rybakov, V. V. A criterion for admissibility of rules in the modal system S4 and the intuitionistic logic / V. Rybakov // Algebra and Logic. — 1984. — V. 23, N. 5. — P. 369—384.

27. Rybakov, V. V. Admissible Logical Inference Rules. Series: Studies in Logic and the Foundations of Mathematics / V. V. Rybakov. — North-Holland : Elsevier, 1997. — 616 p.

28. Rybakov, V. An essay on unification and inference rules for modal logics / V. Rybakov, M. Terziler, C. Gencer // Bull. Sect. Logic. — 1999. — V. 28, N. 3. — P. 145–157.

29. Rybakov, V. V. Linear temporal logic with until and next, logical consecutions / V. V. Rybakov // Ann. Pure Appl. Logic. — 2008. V. 155. — P. 32–45.

30. Rybakov, V. V. Multi-modal and temporal logics with universal formula — reduction of admissibility to validity and unification. / V. V. Rybakov // J. Log. Comput. — 2008. — V. 18, N. 4. — P. 509–519.

31. Rybakov, V. V. Projective formulas and unification in linear temporal logic LTLU / V. V. Rybakov // Logic J. IGPL. — 2014. — V. 22, N. 4. — P. 665–672.

32. Rybakov, V. V. Nontransitive temporal multiagent logic, information and knowledge, deciding algorithms, / V. V. Rybakov // Sib. Math. J. — 2017. — V. 58, N. 5. — P. 875–886.

33. van der Meyden, R. Model checking knowledge and time in systems with perfect recall / R. van der Meyden, N. N. Shilov // FSTTCS. — 1999. — V. 99. — P. 432–445.

Публикации автора по теме диссертации

34. **Bashmakov, S. I.** Unification and inference rules in the multi-modal logic of knowledge and linear time LTK / S. I. Bashmakov // J. Siberian Fed. Univ. Math. & Physics. — 2016. — V. 9, N. 2. — P. 149–157.

35. **Bashmakov, S. I.** Non-unifiability in linear temporal logic of knowledge with multi-agent relations / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. Rybakov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2016. — V. 13. — P. 656-663.

36. **Bashmakov, S. I.** Projective formulas and unification in linear discrete temporal multi-agent logics / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. Rybakov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2016. — V. 13. — P. 923–929.

37. **Bashmakov, S. I.** Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality / S. I. Bashmakov // J. Siberian Fed. Univ. Math. & Physics. — 2018. — V. 11, N. 1. — P. 3–9.

38. **Bashmakov, S. I.** Multi-agent temporal logics with universal modality, description of non-unifiability / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. Rybakov // IfCoLog Logics and Their Applications. — 2017. — V. 4, N. 4. — P. 939–954.

Публикации в сборниках материалов конференций

39. **Башмаков, С. И.** Вопрос унификации и базис пассивных правил в многомодальной логике LTK / С. И. Башмаков // Ломоносов 2016: матер. XXIII междунар. науч. конф. студ., аспир. и мол. уч. (11–15 апреля 2016 г.). — Москва : ВМК МГУ, 2016. — С. 38–39.

40. **Башмаков, С. И.** Унификация в многомодальной логике LTK / С. И. Башмаков // МНСК-2016: матер. 54-й междунар. студ. конф. (16–20 апреля 2016 г.). Новосибирск : НГУ, 2016. — С. 6.

41. **Башмаков, С. И.** Критерий неунифицируемости в транзитивной временной линейной бимодальной логике на множестве целых чисел / С. И. Башмаков // Проспект Свободный: электрон. сбор. матер. междунар. конф. студ., аспир. и мол. уч. (15–25 апреля 2016 г.). — Красноярск : СФУ, 2016. — С.10.

42. **Bashmakov, S. I.** On unification and passive rules in multi-modal temporal logic of linear time and knowledge LFPK / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. V. Rybakov // Алгебра и логика: теория и приложения: тез. докл. междунар. конф. (24–29 июля 2016 г.). — Красноярск : СФУ, 2016. — С. 88–90.

43. **Bashmakov, S. I.** Unification through the projective formulas in linear discrete temporal logics of knowledge / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. V. Rybakov // Мальцевские чтения: тез. докл. междунар. конф. (21–25 ноября 2016 г.). — Новосибирск : ИМ СО РАН, 2016. — С. 218.

44. **Башмаков, С. И.** Линейные транзитивные логики знания и времени, унификация и проективные формулы / С. И. Башмаков, А. В. Кошелева, В. В. Рыбаков // Математики — Алтайскому краю: сб. труд. всерос. конф. по матем. (29 июня –2 июля 2017 г.). — Барнаул: АлтГУ, 2017. — С. 6–7.

45. **Башмаков, С. И.** Унификация во временных логиках / С. И. Башмаков, А. В. Кошелева // Синтаксис и семантика логич. систем: матер. 5-й школы-семинара (Байкал, 8–12 августа 2017 г.). — Улан-Удэ : БГУ, 2017. — С. 20–25.

46. **Башмаков, С. И.** Унификация во временных многоагентных логиках с универсальной модальностью / С. И. Башмаков, А. В. Кошелева, В. В. Рыбаков // Математика в современном мире: тез. докл. междунар. конф. (14–19 августа 2017 г.). — Новосибирск : ИМ СО РАН, 2017. — С. 67.

47. **Bashmakov, S. I.** Projective unification in linear modal logic on nontransitive time with universal modality / S. I. Bashmakov // Мальцевские чтения: тез. докл. междунар. конф. (20–24 ноября 2017 г.). — Новосибирск : ИМ СО РАН, 2017. — С. 174.