Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЛЕСОСИБИРСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал Сибирского федерального университета

Физико-математический
факультет

Высшей математики, информатики и естествознания
кафедра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

44.03.05 Педагогическое образование
44.03.05.06 Математика и информатика
код и наименование направления, подготовки, специальности

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ В 8 И 11 КЛАССАХ

тема

Руководитель ______________ подпись Е. Н. Яковлева инициалы, фамилия

Выпускник ______________ подпись В. С. Яричина инициалы, фамилия

Лесосибирск 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЛЕСОСИБИРСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ –
филиал Сибирского федерального университета

Физико-математический
факультет
Высшей математики, информатики и естествознания
кафедра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

44.03.05 Педагогическое образование
44.03.05.06 Математика и информатика
код и наименование направления, подготовки, специальности

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ В 8 И 11 КЛАССАХ
тема

Работа защищена «22» июня 2017 г. с оценкой «отлично»

Председатель ГЭК	подпись	С. С. Аплеснин инициалы, фамилия
Члены ГЭК	подпись	Е. В. Киргизова инициалы, фамилия
	подпись	Е. Н. Яковлева инициалы, фамилия
	подпись	А. М. Гилязутдинова инициалы, фамилия
	подпись	И. А. Падалко инициалы, фамилия
Руководитель	подпись	Е. Н. Яковлева инициалы, фамилия
Выпускник	подпись	В. С. Яричина инициалы, фамилия

Лесосибирск 2017

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Обучение решению диофантовых уравнений в школьном курсе математики в 8 и 11 классах» содержит 64 страниц текстового документа, 2 таблицы, 38 формул, 1 приложение, 54 использованных источника.

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ, ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС, ЗАДАНИЕ №19 ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ, ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ.

Объект исследования – процесс обучения математике в 8 и 11 классах.

Предмет исследования – методика обучения решению диофантовых уравнений (методы и способы решения уравнений в целых числах).

Цель исследования: рассмотреть методику обучения решению диофантовых уравнений.

В результате работы были подобранны задания, которые учащиеся могут использовать при самостоятельной подготовке к сдаче ЕГЭ по математике и олимпиадам, а разработанный элективный курс «Диофантовы уравнения» может использоваться для предпрофильной подготовки учащихся по математике.

По теме выпускной квалификационной работы были опубликованы следующие статьи:

1. Диофантовы уравнения.
2. Применение диофантовых уравнений при решении олимпиадных задач и задач С6 в ЕГЭ по математике.
3. Элективный курс «Диофантовы уравнения» как предпрофильная подготовка учащихся 8 – 9 классов.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Задачи, сводящиеся к неопределенным или диофантовым уравнениям, встречаются в клинописных текстах Вавилона, написанных более чем за 2000 лет до нашей эры.

Даже то немногое, что мы знаем об античном ученом Диофанте, представляет собой одну из увлекательнейших загадок в математической истории.

В собрании античных и средневековых греческих эпиграмм под названием Палатинская антология содержится стихотворение – загадка о жизни Диофанта, решив которую нетрудно подсчитать, что он прожил 84 года. По научным трудам французского исследователя Поля Таннери можно определить примерный промежуток времени, в который жил Диофант – середина III века нашей эры.

Главный след, который Диофант оставил в истории – это его произведение «Арифметика». Оно представляет собой сборник задач, большая часть которых эквивалентна неопределённым уравнениям. Каждая задача сопровождается решением. Многие задачи имеют длинную предысторию: некоторые из них восходят к школе Пифагора, другие – к древнему Вавилону. Однако до Диофанта эти задачи *трактовались чисто арифметически.* Диофант привнес в решение задач новые методы, которые ранее не использовались.

В «Арифметике» Диофант систематизировал и расширил накопленный до него опыт решения неопределенных алгебраических уравнений в целых числах. С тех пор эти уравнения стали называться диофантовыми. «Арифметика» Диофанта легла в основу современной теории чисел.

Актуальность исследования обусловлена тем, что в последнее время диофантовы уравнения различного вида стали одним из источников формирования базы задач типа С6 Единого Государственного Экзамена по математике Российской Федерации (до 2014 года включительно), а также заданий профильного уровня №21 в 2015 году и №19 в ЕГЭ по математике 2016 – 2017 годов.

Главным отличием таких задач от остальных задач ЕГЭ является их явно выраженный нестандартный характер – построение решения может потребовать от обучающихся нетривиальных идей и методов. Поэтому смыслом включения таких задач в состав контрольно – измерительных материалов является именно диагностика уровня интеллектуального развития учащихся.

Также уравнения в целых числах присутствуют в качестве заданий практически на каждой олимпиаде школьников по математике. Существуют различные методы их решения, которые не входят в школьную программу по математике, но их полезно знать участникам олимпиад.

Цель исследования: рассмотреть методику обучения решению диофантовых уравнений.

Объектом исследования является процесс обучения математике в 8 и 11 классах.

Предмет исследования – методика обучения решению диофантовых уравнений (методы и способы решения уравнений в целых числах).

Исходя из поставленной цели, можно сформулировать следующие задачи:

1. раскрыть сущность понятия диофантовых уравнений;
2. рассмотреть методику обучения решению диофантовых уравнений (методы и способы решения задач в целых числах);
3. разработать дидактические материалы, используемые при решении заданий ЕГЭ по математике и олимпиадных задач;
4. разработать элективный курс «Диофантовы уравнения» для учащихся 8 – 9 и 10 – 11 классов.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы:

1. анализ периодической и учебно-методической литературы;

2. обобщение педагогического опыта учителей;

3. анализ контрольно – измерительных материалов ЕГЭ и заданий олимпиад разных лет.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что ученику для успешного участия в математических олимпиадах и сдачи ЕГЭ необходимо знать и теорию, и методику решения диофантовых уравнений.

Практическая значимость выпускной квалификационной работы состоит в том, что подобранные нами задания учащиеся могут использовать при самостоятельной подготовке к сдаче ЕГЭ по математике и олимпиадам, а разработанный элективный курс может использоваться для предпрофильной подготовки учащихся по математике.

Структура работы обусловлена целью и задачами исследования.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников (54), приложения.

Введение раскрывает актуальность, определяет объект, предмет, цель, задачи, методы исследования, теоретическую и практическую значимость работы.

В первой главе рассматриваются понятие диофантовых уравнений, методы и способы их решения. Во второй главе раскрывается применение диофантовых уравнений при решении заданий ЕГЭ по математике и олимпиадных задач. В третьей главе представлен элективный курс «Диофантовы уравнения» для учащихся 8 – 9 и 10 – 11 классов. В приложении представлены задания для самостоятельной работы учащихся, которые можно использовать при подготовке к сдаче ЕГЭ по математике и олимпиадам.

В заключении подводятся итоги исследования, формируются окончательные выводы по рассматриваемой теме.

По теме исследования опубликованы следующие статьи:

1. Яричина, В.С. Диофантовы уравнения: материалы международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае:

фундаментальные проблемы науки и образовании» / В.С. Яричина. – Барнаул : издательство Алтайского университета, 2014. – С. 1843–1845.

2. Яричина, В.С. Применение диофантовых уравнений при решении олимпиадных задач и задач С6 в ЕГЭ по математике: материалы VII Международной научно-методической конференции «Преподавание естественных наук (биологии, физики, химии), математики и информатики в вузе и школе» / В.С. Яричина. – Томск : издательство ФГБОУ ВПО ТГПУ, 2014. – С.59–63.

3. Яричина, В.С. Элективный курс «Диофантовы уравнения» как предпрофильная подготовка учащихся 8-9 классов: материалы Международной научно-практической конференции «Концепции фундаментальных и прикладных научных исследований» / В.С. Яричина. – Казань : НИЦ АЭТЕРНА, 2017. – Т.4, С. 13–15.

1 МЕТОДЫ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1 История развития теории диофантовых уравнений

Диофантовыми уравнениями принято называть уравнения с целыми коэффициентами, для которых надо найти целочисленные (или натуральные) решения. При этом количество неизвестных, входящих в уравнение, должно быть не менее двух [1].

Диофантовы уравнения можно записать в виде $P\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = 0$, $n \geq 2$, где $P\ (x_1, ..., x_n)$ – многочлен с целыми коэффициентами, а все переменные x_i принимают целочисленные значения [45].

Решить линейное диофантово уравнение означает установить следующее:

1) имеет ли оно хотя бы одно целочисленное решение;
2) конечно или бесконечно число его целочисленных решений;
3) найти все его целочисленные решения.

Весьма часто диофантовы уравнения называют неопределенными.

Свое название эти уравнения получили в честь одного из выдающихся математиков античности Диофанта Александрийского. О нем известно крайне мало. Большинство историков математики сходятся во мнении, что жил Диофант в III веке нашей эры [5].

Следы диофантовых уравнений можно найти в сохранившихся документах, дошедших до нас из глубины тысячелетий.

Еще в Древнем Вавилоне занимались поисками пифагоровых троек – целочисленных решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

Формулы, позволяющие найти его решение, были получены пифагорейцами: $x = k^2 - 1, y = 2k, z = k^2 + 1$.

Отметим лишь, что при $z \leq 100$ уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ имеет 16 примитивных троек:

(3; 4; 5)	(13; 84; 85)	(16; 63; 65)	(9; 40; 41)
(20; 21; 29)	(5; 12; 13)	(36; 77; 85)	(33; 56; 65)
(11; 60; 61)	(12; 35; 37)	(8; 15; 17)	(39; 80; 89)

(7; 24; 25) (28; 45; 53) (48; 55; 73) (65; 72; 97)

Пифагорова тройка называется *примитивной*, если она не может быть получена из какой – либо другой пифагоровой тройки умножением на одно и то же натуральное число. Таким образом, примитивные пифагоровы тройки являются взаимно простыми. Другими словами, их наибольший общий делитель равен 1.

В этом ряду, например, отсутствуют тройки (6; 8; 10), (12; 16; 20), (10; 24; 26). Их не относят к примитивным пифагоровым тройкам, так как они содержат числа, кратные числам из примитивных троек.

В «Началах» Евклида (III в. до н.э.) содержится уравнение $x^2 - ay^2 = 1$ (a – параметр), которое относится к неопределенным уравнениям. В этом замечательном труде для него приводятся целочисленные решения. Решение для случая произвольного неквадратного a знал древнегреческий математик Архимед (287 г. до н. э. – 212 г. до н. э.), который поставил перед другим ученым Эллады – Эратосфеном (276 г. до н. э. – 194 г. до н. э.) известную «Задачу о быках», написанную стихами: «Сколько у Солнца коров и быков, сосчитай, иностранец, ум навостривши, коль впрямь свойственна мудрость тебе. Сколько скота выгонялось на долы Сицилии влажной? Разного цвета стада бог лучезарный имел, счетом четыре». Первая часть задачи требовала определить число коров и быков в каждом стаде, и для этого нужно было решить систему уравнений с восемью неизвестными. При этом имелось несколько правильных решений. Наибольший из возможных ответов — 50 389 073 головы. Но вторая часть задачи была во много раз сложнее, и ответ ее выражается числом, имеющим 206 545 десятичных знаков. Не случайно, что концовка задачи звучит достаточно иронично: «Если сумеешь всё это найти и взором духовным стада размеры объять сам и другим передать, гордо шествуй вперед, кичася великой победой: знай, что, других превзойдя, первый по мудрости ты» [3].

Но именно Диофант первым занялся систематическим изучением неопределенных уравнений и описанием методов их решения. К сожалению, до потомков дошли лишь шесть сочинений Диофанта, хотя предположительно, их было тринадцать. Все сохранившиеся записи были собраны в одну книгу, которая получила название «Арифметика». По сути «Арифметика» Диофанта – это сборник задач (их всего 189) с решениями. Ведущая идея книги – описание методов отыскания положительных решений неопределенных уравнений (автором допускались и рациональные решения). Диофант рассматривал, главным образом, неопределенные уравнения второго и третьего порядка [18].

После Диофанта подробным изучением неопределенных уравнений примерно с пятого века занимались индусские математики. Они рассматривали неопределенные уравнения первой степени. Уравнения такого рода (с двумя или тремя неизвестными) появились у них в связи с астрономическими расчетами. Например, они изучали вопросы, порожденные наблюдениями периодической повторяемости небесных явлений. В частности у индийского мыслителя Брахмагупты (около 598 – 670 гг.) мы находим (около 625 г.) описание способа получения общего решения одного из простейших диофантовых уравнений вида $ax + by = c$, где a, b, c – целые числа [21].

В Европе большинство методов алгебры возникали и оттачивались именно при решении неопределенных уравнений. Решением подобного рода задач занимались почти все крупные алгебраисты этого времени от Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (ок.1170 – 1250 гг.) до Франсуа Виета (1540 – 1603 гг.) и Симона Стевина (ок. 1549 – 1620 гг.). Особенность этого периода заключается в том, что вплоть до последней четверти XVI в. европейские математики, хотя и были знакомы со многими задачами Диофанта и даже с некоторыми его методами, однако самой «Арифметики» не читали. Именно по этой причине европейские алгебраисты пошли по пути символического исчисления, в основу которого было положено учение о комплексных числах [31].

Продолжателем работ Леонардо Пизанского стал итальянский монах и математик Лука Пачоли (1445 – 1517). Он издал труд «Сумма арифметики, геометрии, учения о пропорциях и отношениях» (1494 г.). В ней впервые описывались письменные приемы счета и использовались арабские цифры.

Новый виток интереса к наследию «отца алгебры» (так иногда называют Диофанта) инициировал итальянский математик Рафаэлем Бомбелли (1526 – 1572 гг.), который отыскал «Арифметику» в библиотеке Ватикана. После такой замечательной находки, он опубликовал свой труд «Алгебра» (1572 г.), в котором можно обнаружить 143 задачи из незабвенного труда Диофанта [31].

В 1621 г. был напечатан новый перевод на латынь «Арифметики» Диофанта, выполненный французским мыслителем Клодом Гаспаром Баше де Мезирьяком (1581 – 1638 гг.). Эта книга содержала многочисленные комментарии автора к ряду задач, заимствованных из первоисточника, написанного на греческом языке. В частности, Баше де Мезирьяк, рассматривая уравнение $ax+by=c$, применил к нему процесс вычисления неполных частных, используя алгоритм Евклида, после чего рассматривались подходящие дроби.

Таким образом, он первым установил связь между алгоритмом Евклида и решением простейшего линейного диофантова уравнения.

Переводная книга Баше де Мезирьяка стала настольной книгой для французского математика, одного из создателей теории чисел, – Пьера Ферма (1601 – 1665). Именно на ее узких полях была найдена его пометка Ферма (датирована 1630 г.), которая, по сути, выдвигала гипотезу, согласно которой уравнение $a^n+b^n=c^n$ не имеет решений на множестве целых положительных чисел, ни при каком натуральном $n \geq 3$.

В XVII и XVIII вв. алгоритмы для решения неопределенного уравнения вида $ax+by=c$ пополнились благодаря трудам французского математика Мишеля Ролля (1652 –1719 гг.), великого Л. Эйлера, английского математика Н. Саундерсона (1682 –1739 гг.) и других математиков.

Цепные дроби к решению линейных неопределенных уравнений применил Ж. Л. Лагранж. Комбинаторные методы к уравнениям такого типа применил немецкий математик К.Ф. Гинденбург (1741 – 1808 гг.).

В 1900 г. на II Международном конгрессе математиков немецкий математик Давид Гильберт (1862 – 1943 гг.) поставил перед мировым математическим сообществом 23 задачи, в последствие названными «проблемами Гильберта». Одна из проблем (№10) ставила задачу об отыскании некоего универсального способа решения (в целых числах) диофантова уравнения произвольного вида [18].

К середине XX века (1947 г.) после доказательства А.А. Марковым (1903 – 1979 гг.) и Э.Л. Постом неразрешимости одной алгебраической задачи (проблемы Туэ), появилось предположение о неразрешимости (отсутствии алгоритма) 10–й проблемы Гильберта.

В 1953 г. американский математик Мартин Дэвис (р. 1928) опубликовал сочинение, которое содержало наметки способа решения этой проблемы с использованием натуральных чисел.

Доказательство алгоритмической неразрешимости 10–й задачи Гильберта (1970 г.) привел молодой аспирант – математик из Ленинграда Юрий Матиясевич (р. 1947). В основу своего доказательства он положил: учение о числах последовательности Фибоначчи, понятие «сумма Цекендорфа», теорему Н.Н. Воробьева (1925 – 1995 гг.), статью М. Дэвиса, а также статью американского математика Джулии Робинзон (1919 – 1985 гг.), посвященную одному обобщению уравнения Пелля.

Еще одно диофантово уравнение связано с именем бельгийского математика Эжена Шарля Каталана (1814 – 1894 гг.). Это уравнение имеет вид $x^y - z^t = 1$, в нем все переменные – целые положительные числа.

Э.Ш. Каталан в 1844 г. выдвинул гипотезу, что это уравнение имеет единственное решение (набор чисел $x = 3$, $y = 2$, $z = 2$, $t = 3$) на множестве натуральных чисел, больших единицы.

С той поры эту задачу стали называть «Проблема Каталана».

Решение проблемы Каталана произошло лишь в 2003 году, когда румынский математик Преда Михайлеску (р. 1955) доказал справедливость гипотезы, сформулированной Каталаном [23].

1.2 Решение диофантовых уравнений с помощью перебора вариантов и метода остатков

Диофантовым уравнением первого порядка с двумя неизвестными x, y будем называть уравнение вида $mx+ny=k,$ где $m,n,k,x,y\in Z.$ Будем считать, что m и n – взаимно простые числа. Если это не так, то всегда можно сократить обе части уравнения на наибольший общий делитель (НОД) чисел m и n (если при этом в правой части получится нецелое число, то такое уравнение не будет иметь решений). Далее метод решения зависит от того, насколько большие модули чисел m и n. Если хотя бы один из коэффициентов (пусть m) невелик по модулю, перепишем уравнение в виде

$$mx=k-ny. \qquad (1)$$

Левая часть полученного уравнения (1) делится нацело на m. Значит, должна делиться нацело на m и правая часть этого уравнения. Рассматривая всевозможные остатки l от деления y на m; $l=0,1,\ldots,m-1,$ получим, что при одном значении l из указанного промежутка будет делиться на m и правая часть. Поскольку число m невелико по модулю, то и перебор вариантов тоже невелик [39].

Со способом перебора различных вариантов обучающиеся знакомятся уже в начальной школе, где им предлагается перебрать всевозможные варианты рассаживания гостей, похода в кинотеатр, способов времяпрепровождения, деления конфет между детьми и т. д.

Покажем метод перебора вариантов на следующих примерах.

Пример 1. В клетке сидят кролики и фазаны, всего у них 18 ног. Узнать, сколько в клетке тех и других?

Решение:

Составим уравнение с двумя неизвестными, в котором x – число кроликов, y – число фазанов: $4x + 2y = 18,$ или $2x + y = 9.$

Выразим y через x: $y = 9 - 2x.$

Далее воспользуемся методом перебора: неположительные значения для x мы брать не можем (количество ног не может быть 0 или отрицательным), а также $x > 4$ (иначе значение y получится отрицательным).

Таким образом, задача имеет четыре решения.

x	1	2	3	4
y	7	5	3	1

Ответ: (1; 7), (2; 5), (3; 3), (4; 1).

Пример 2. Решить в натуральных числах уравнение $5x + 8y = 39.$

Решение:

Перепишем уравнение в виде $5x = 39 - 8y$. Чтобы в условиях задачи уравнение имело смысл, y должен быть меньше или равен 4, но больше 0: $0 < y \leq 4.$

Проведем перебор по неизвестной y:

Если $y = 1$, то $x = \frac{39 - 8y}{5} = \frac{39 - 8*1}{5} = 6{,}2$ не является натуральным числом.

Если $y = 2$, то $x = 4{,}2$ – не натуральное число.

Если $y = 3$, то $x = 3$ – натуральное число.

Если $y = 4$, то $x = 1{,}4\ 2$ – не натуральное число.

Ответ: (3; 3).

Покажем применение метода остатков на следующей задаче:

Задача: При делении на 2 число дает остаток 1, а при делении на 3 - остаток 2. Какой остаток дает это число при делении на 6?

Решение:

Так как при делении целого числа на 6 можно получить один из остатков: 0, 1, 2, 3, 4 и 5, то множество целых неотрицательных чисел можно разбить на непересекающиеся подмножества чисел вида $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ и $6k+5$, где k = 0, 1, 2, 3, … .

Так как при делении на 2 данное число дает остаток 1, то оно нечетное, поэтому остается рассмотреть числа вида $6k+1$, $6k+3$ и $6k+5$.

Числа вида $6k+1$ при делении на 3 дают остаток 1, числа вида $6k+3$ кратны 3 и только числа вида $6k+5$ при делении на 3 дают остаток 2. Следовательно, число имеет вид $6k+5$, т.е. при делении на 6 дает остаток 5.

Ответ: Если при делении на 2 число дает остаток 1, а при делении на 3 – остаток 2, то при делении на 6 число остаток 5.

Пример 3. Пусть число $p > 3$ является простым.

Доказать, что

а) имеет место представление $p = 6k \pm 1$ для некоторого $k \in N$;

б) $(p^2 - 1) \vdots 24$.

Решение:

а) Рассуждения проводим по модулю 6. Все натуральные числа распадаются на 6 классов $\{6k\}, \{6k+1\}, \{6k+2\}, \{6k+3\}, \{6k+4\}, \{6k+5\}$. Простое число р может попасть только либо в класс $\{6k+1\}$, либо в класс $\{6k+5\} = \{6k-1\}$. Т.к. числа первого класса делятся на 2, 3, поэтому они составные. Числа третьего класса делятся на 2, числа четвертого класса делятся на 3, числа пятого класса делятся на 2.

б) Т.к. $p = 6k \pm 1$, то $(6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k + 1 - 1 = 36k^2 \pm 12k = (12k(3k \pm 1)) \vdots 24$, т.к. первый множитель делится на 12, а третий на 2. Что и требовалось доказать.

Пример 4. Решить уравнение $3x - 4y = 1$ в целых числах.

Решение:

Перепишем уравнение в виде $3x = 4y + 1$. Поскольку левая часть уравнения делится на 3, то должна делиться на 3 и правая часть.

Рассмотрим три случая:

1) Если $y = 3m$, где $m \in Z$, то $4y + 1 = 12m + 1$ не кратно 3.

2) Если $y = 3m + 1$, где $m \in Z$, то $4y + 1 = 4(3m + 1) + 1 = 12m + 5$ не кратно 3.

3) Если $y = 3m + 2$, где $m \in Z$, то $4y + 1 = 4(3m + 2) + 1 = 12m + 9$ кратно 3, поэтому $3x = 12m + 9, x = 4m + 3$.

Ответ: $x = 4m + 3, y = 3m + 2$, где $m \in Z$.

1.3 Применение алгоритма Евклида при решении диофантовых уравнений

В 6 классе учащиеся умеют находить наибольший общий делитель двух натуральных чисел с помощью разложения этих чисел на простые множители. Но у этого способа есть существенный недостаток: если данные числа велики, да еще не очень легко раскладываются на множители, то задача отыскания НОД (*a, b*) становится довольно трудной. В этом случае, на помощь приходит более универсальный метод: Алгоритм Евклида.

Таким образом, можно найти наибольший общий делитель натуральных чисел *a* и *b*, не раскладывая эти числа на простые множители, а применяя процесс деления с остатком. Для этого надо разделить большее из этих чисел на меньшее, потом меньшее из чисел на остаток при первом делении, затем остаток при первом делении на остаток при втором делении и вести этот процесс до тех пор, пока не произойдет деление без остатка (т.к. остатки убывают, то это на каком – то шаге случится). Последний отличный от нуля остаток и есть искомый НОД (*a, b*).

Чтобы доказать это утверждение, представим описанный процесс в виде следующей цепочки равенств: если *a* >*b*, то

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1q_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-1} &= r_nq_n. \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $r_1, \ldots, r_n$ – положительные остатки, убывающие с возрастанием номера. Из первого равенства следует, что общий делитель чисел a и b делит r_1 и общий делитель b и r_1 делит a, поэтому НОД (a, b) = НОД (b, r_1). Переходя к следующим равенствам системы, получаем: НОД (a, b) = НОД (b, r_1) = = НОД (r_1, r_2) =…= НОД (r_{n-1}, r_n) = НОД (r_n, 0) = r_n [10].

Таким образом, решая диофантовы уравнения первой степени $ax+by=c$ можно применять следующие теоремы:

Теорема 1. Если НОД (a, b) = 1, то уравнение $ax+by=1$ имеет, по меньшей мере, одну пару (x, y) целого решения.

Теорема 2. Если НОД (a, b) = d > 1, и число c не делится на d, то уравнение $ax+by=c$ не имеет целого решения.

Доказательство. Предположим, что уравнение $ax+by=c$ имеет целое решение (x_0, y_0). Так как, $a \vdots d$, $b \vdots d$, то получим, что $c=(ax+by) \vdots d$. Это противоречит условиям теоремы и тем самым теорема доказана.

Теорема 3. Если НОД (a, b) = 1,то все целые решения уравнения $ax+by=c$ определяются формулой:

$$\begin{cases} x = x_0 c + bt, \\ y = y_0 c - at. \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь (x_0, y_0) – целое решение уравнения $ax+by=1$, а t – произвольное целое число.

Пример 2. Требуется найти целое решение уравнения $15x+37y=1$ [22].

1-й метод. Воспользуемся разложением единицы: $1=15*5+37*(-2)$.

Ответ: $x=5, y=-2$.

2-й метод. Применяя алгоритм Евклида, имеем:

$$37=15*2+7,\ \ 15=2*7+1.$$

Откуда имеем $1=15-2*7=15-2(37-15*2)=15*5+(-2)*37$.

Тогда $x_0=5$, $y_0=-2$.

Общее решение уравнения есть система $\begin{cases} x = 5 + 37t, \\ y = -2 - 15t \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x = 5 + 37t, \\ y = -2 - 15t \end{cases}$, где t – целое число.

Пример 3. В уравнении $16x + 34y = 7$, НОД (16, 34) = 2 и 7 не делится на 2, то есть, нет целых решений.

Пример 4. Найти наибольший общий делитель d чисел 27 и 96 и представить его в виде $d = 27x + 96y$, где x и y – целые числа [24].

Решение:

Используя алгоритм Евклида, найдем наибольший общий делитель d чисел 27 и 96:

96 = 3*27 + 15,

27 = 1*15 + 12,

15 = 1+12 + 3,

12 = 4*3.

Отсюда получаем, что d = (27, 96) = 3.

Начиная с первого равенства алгоритма Евклида, спускаясь до последнего, получаем:

15 = 96 – 3*27,

12 = 27 – 1*15 = 27 – 1* (96 – 3*27) = 4 * 27 – 1*96,

3 = 15 – 1*12 = (96 – 3*27) – 1*(4*27 – 1*96) = –7*27 + 2*96.

Это и есть искомое представление 3 = –7*27+2*96.

То есть x = –7, y = 2.

Ответ: d = (27, 96) = 3; 3 = 27x + 96y, где x = –7, y = 2.

Замечание: Отметим, что найденное представление не является единственным.

Общее решение уравнения 3 = 27x + 96y представляет собой система уравнений $\begin{cases} x = -7 - 96t, \\ y = 2 + 27t, \end{cases}$ где $t \in Z$.

1.4 Решение диофантовых уравнений с помощью цепных дробей

Первое понятие о (долях) дробях даётся учащимся в третьем классе. В курсе математики 5 – 6 классов учащиеся более полно знакомятся с понятием «обыкновенная дробь», «десятичная дробь». Изучение конечных цепных дробей в школе можно организовать с помощью краткого элективного курса для 10 – 11 классов, цель которого – дать учащимся, проявившим интерес к математике, возможность углублённого изучения основного курса путём рассмотрения заданий, требующих нестандартного подхода при своём решении. Другой важной целью изучения конечных цепных дробей является формирование мировоззрения обучающихся, развитие их логического мышления. Достижению этих целей служат специально подобранные задания, решение которых требует дополнительных знаний, полученных в данном курсе, что развивает сообразительность, логическое мышление и стремление к самосовершенствованию.

Рассмотрим применение метода цепных дробей к решению диофантовых уравнений.

Дробь $\frac{a}{b}$ можно записать в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} \qquad (5)$$

Из второго равенства в (5) имеем $\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$. Значит, $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$.

Продолжим этот процесс до тех пор, пока не придем к знаменателю q_n.

В результате мы представим обыкновенную дробь a/b в следующем в виде

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \ldots + \frac{1}{q_n}}}, \qquad (6)$$

где q_0 – целое число, а q_1, ... ,q_n – натуральные числа. Такое выражение называется цепной (конечной непрерывной) дробью.

Ввиду громоздкости развернутой записи цепной дроби применяют компактную запись $a/b = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$.

Уравнение: $ax + by = c$ с взаимно простыми коэффициентами a и b имеет решение $x_0 = (-1)^n cQ_{n-1}$, $y_0 = (-1)^{n+1} cP_{n-1}$, где $\dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ – предпоследняя подходящая дробь к цепной дроби, в которую раскладывается дробь $\dfrac{a}{b}$.

Доказательство:

Если для заданной цепной дроби с последовательными частными q_1, $q_2,\dots,q_n$ несократимые дроби $\dfrac{P_1}{Q_1}, \dfrac{P_2}{Q_2}, \dots, \dfrac{P_n}{Q_n}$ являются результатами свертывания подходящих дробей $q_1 + \dfrac{1}{q_2}$, $q_1 + \dfrac{1}{q_2 + \dfrac{1}{q_3}}$ и т.д., порядка 1, 2, …, n соответственно, то $\dfrac{P_k}{Q_k} - \dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \dfrac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$, $k = 2, \dots, n$.

При $k = n$ получаем: $\dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}}$, (7)

где $\dfrac{P_n}{Q_n} = \dfrac{a}{b}$ – последняя подходящая дробь к цепной дроби, в которую раскладывается дробь $\dfrac{a}{b}$. Так как дроби $\dfrac{P_n}{Q_n}$ и $\dfrac{a}{b}$ несократимы, то $P_n = a$, $Q_n = b$ и $aQ_{n-1} - bP_{n-1} = (-1)^n$.

Умножая обе части последнего равенства на $(-1)^n c$, имеем $a((-1)^n cQ_{n-1}) + b((-1)^{n+1} cP_{n-1}) = c$, то есть пара чисел $x_0 = (-1)^n cQ_{n-1}$, $y_0 = (-1)^{n+1} cP_{n-1}$, где n – порядок цепной дроби, является решением уравнения $ax + by = c$ [20].

Пример 1. Для перевозки большого количества контейнеров по 170 кг и по 190 кг выделены трехтонные машины. Можно ли ими загружать машины полностью? [2]

Решение:

Пусть x и y – количество контейнеров по 170 и 190 кг соответственно, тогда имеем уравнение $170x+190y=3000$. После сокращения на 10 уравнение выглядит так: $17x+19y=300$.

Для нахождения частного решения воспользуемся разложением дроби $\frac{17}{19}$ в цепную дробь $\frac{17}{19}=\frac{1}{1+\frac{2}{17}}=\frac{1}{1+\frac{1}{8+\frac{1}{2}}}$.

Сворачиваем предпоследнюю подходящую к ней дробь в обыкновенную $\frac{1}{1+\frac{1}{8}}=\frac{8}{9}$.

Частное решение данного уравнения имеет вид:
$x_0 = (-1)^4 300*9 = 2700$, $y_0 = (-1)^5 300*8 = -2400$. А общее задается формулой $x = 2700 - 19k$, $y = -2400 + 17k$.

Откуда получаем условие на параметр k: $141<\frac{2400}{17}\le k\le\frac{2700}{19}<143$.

Т.е. $k = 142$, $x = 2$, $y = 14$.

Ответ: Да, можно. Потребуется 2 контейнера по 170 кг и 14 по 190 кг.

Пример 2. Решите в целых числах уравнение $127x - 52y + 1 = 0$ [24].

Решение:

Преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных. Прежде всего, выделим целую часть неправильной дроби $\frac{127}{52}$: $\frac{127}{52}=2+\frac{23}{52}$.

Правильную дробь $\frac{23}{52}$ заменим равной ей дробью $\frac{1}{\frac{52}{23}}$.

Тогда получим $\frac{127}{52}=2+\frac{1}{\frac{52}{23}}$. проделываем такие же преобразования с полученной в знаменателе неправильной дробью $\frac{52}{23}$.

Теперь исходная дробь примет вид: $\frac{127}{52}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{23}{6}}}$.

Повторяя те же рассуждения для дроби $\frac{23}{6}$, получим $\frac{127}{52}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{6}{5}}}}$.

Выделяя целую часть неправильной дроби $\frac{6}{5}$, придем к окончательному результату: $\frac{127}{52}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}}$.

Мы получили выражение, которое называется конечной цепной или непрерывной дробью. Отбросив последнее звено этой цепной дроби – одну пятую, превратим получающуюся при этом новую цепную дробь в простую и вычтем ее из исходной дроби $\frac{127}{52}$:

$$2+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9}, \quad \frac{127}{52}-\frac{22}{9}=\frac{1143-1144}{52*9}=-\frac{1}{52*9}.$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и отбросим его, тогда 127*9 – 52*22 + 1 = 0.

Из сопоставления полученного равенства с уравнением $127x - 52y + 1 = 0$ следует, что $x = 9$, $y = 22$ будут частным решением этого уравнения. А все его решения будут содержаться в формулах $x = 9 + 52t$, $y = 22 + 127t$, где $t \in Z$.

Ответ: $x = 9 + 52t$, $y = 22 + 127t$, где $t \in Z$.

1.5 Использование способа рассеивания (размельчения) для решения диофантовых уравнений

Впервые способ рассеивания (размельчения) применил индийский математик Ариабхатта в начале VI века. Данный метод заключается в сведении данного уравнения к последовательности других уравнений с убывающими по абсолютной величине коэффициентами перед неизвестными. В школьном курсе математики данный метод не рассматривается, но его также можно рассмотреть на курсе по выбору для учащихся 10 – 11 классов.

Алгоритм, основанный на последовательном уменьшении по модулю коэффициентов уравнения (1) при неизвестных [39]:

1. Выбор наименьшего по модулю коэффициента (пусть $|m| < |n|$).
2. Проведение процедуры уменьшения коэффициентов. Это делается с помощью деления с остатком. Пусть $n = l|m| + q$, где $0 < q \le |m| - 1$, тогда $mx + ny = k \Leftrightarrow mx + (l|m| + q)y = k \Leftrightarrow mx + l|m|y = k = qy$.

Левая часть последнего уравнения делится на m. Значит, должна делиться на m и правая часть: $k - qy = mt$, где $t \in Z$, t – новая переменная.

3. Повторение процедуры уменьшения коэффициентов. Новое уравнение отличается от старого только тем, что его коэффициенты по модулю меньше коэффициентов старого. За конечное число шагов добьемся того, что коэффициент при одном из новых неизвестных будет равен 1.
4. Возврат от новых переменных к исходным.

Продемонстрируем его на примере решения следующих примеров.

Пример 1: Найти два числа, если разность произведений второго на 79 и первого на 23 равна 1 [24].

Решение: Возьмем за x – первое число, за y – второе число, тогда нам требуется решить уравнение: $79y - 23x = 1$.

Проведем деление с остатком: $79 = 23*3 + 10$ и перепишем исходное уравнение в виде $23x = 79y - 1 = (23*3 + 10)y - 1 = 69y + 10y - 1$ ↔ $23x - 69y = 10y - 1$.

Левая часть последнего уравнения кратна 23, поэтому должна быть кратна и правая часть: $10y - 1 = 23t$ или $10y = 23t + 1$, где $t \in Z$ – новое неизвестное.

Полученное новое уравнение по типу точно такое же, как исходное. Однако коэффициенты при неизвестных в нем уменьшились по модулю (измельчились). Повторим процедуру уменьшения коэффициентов еще раз: $10y = 23t + 1 = (10*2 + 3)t + 1 \leftrightarrow 10y - 20t = 3t + 1 \rightarrow 3t + 1 = 10u$, где $u \in Z$ – новое неизвестное. Повторим процедуру уменьшения коэффициентов в последний раз: $3t + 1 = 10u = (3*3 + 1)u \leftrightarrow 3t - 9u = u - 1 \rightarrow u - 1 = 3v$, $v \in Z$.

Осталось выразить x и y через v. Поскольку $u = 3v + 1$, то

1. $3t = 10u - 1 = 10(3v + 1) - 1 = 30v + 9 \rightarrow t = 10v + 3$.
2. $10y = 23t + 1 = 23(10v + 3) + 1 = 230v + 70 \rightarrow y = 23v + 7$.
3. $23x = 79y - 1 = 79(23v + 7) + 1 = 79*23v + 552 \rightarrow x = 79v + 24$.

Ответ: $(79v + 24, 23v + 7)$, где v – целое число.

Пример 2. Решить способом измельчения в целых числах уравнение $5x + 8y = 39$ [40].

Решение:

1. Выразим через другое неизвестное переменную, имеющую наименьший коэффициент: $x = \dfrac{39 - 8y}{5}$.

Выделив целую часть, получим: $x = (7 - y) + \dfrac{4 - 3y}{5}$.

Значение переменной x будет целым, если целым окажется значение дробной части, т. е. $\dfrac{4 - 3y}{5}$.

Это возможно тогда, когда число $(4 - 3y)$ нацело разделится на 5. Введя дополнительную целочисленную переменную z, последнее уравнение запишем в виде: $4 - 3y = 5z$.

Таким образом, мы пришли к уравнению аналогичному исходному, но с меньшими коэффициентами. Решать его будем относительно переменных y и z.

2. $y = \frac{4-5z}{3} = (1-z) + \frac{1-2z}{3}$.

Аналогично рассуждая, запишем $(1-2z)$ через новую целочисленную переменную *u*: $1-2z = 3u$.

3. $z = \frac{1-3u}{2} = \frac{1-u}{2} - u$; $1-u = 2v$.

4. $u = 1-2v$ — получили не дробное число, поэтому уменьшение заканчиваем.

5. Нам осталось вернуться к исходным переменным. Для этого, выразим через переменную *v* сначала *z*, потом *y* и последним *x*.

$$z = \frac{1-u}{2} - u = \frac{1-1+2v}{2} - 1 + 2v = 3v - 1; \quad z = 3v - 1.$$

$$y = \frac{4-5z}{3} = \frac{4-5(3v-1)}{3} = 3 - 5v; \quad y = 3 - 5v.$$

$$x = \frac{39-8y}{5} = \frac{39-8(3-5v)}{5} = 3 + 8v; \quad x = 3 + 8v.$$

6. Формулы $x = 3+8v$, $y = 3-5v$ представляют собой общее решение исходного уравнения в целых числах.

7. Если необходимо получить только натуральные числа, то среди всех целых решений нужно выбрать такие, для которых $x > 0$, $y > 0$, то есть $3 + 8v > 0$, $3 - 5v > 0$. Совместно эти неравенства могут выполняться лишь при $v = 0$. В этом случае $x = 3, y = 3$.

Ответ. (3; 3).

Учащимся также можно показать более сложные задачи, решая их методом рассеивания.

Пример 3. Решить в целых числах $29x + 13y + 56z = 17$ [41]. (8)

Решение:

Выразим неизвестное, коэффициент при котором наименьший, через остальные неизвестные.

$$y = \frac{17 - 29x - 56z}{13} = (1 - 2x - 4z) + \frac{4 - 3x - 4z}{13}; \tag{9}$$

Обозначим $\frac{4 - 3x - 4z}{13} = t_1$ (10)

Из (9) следует, что t_1 может принимать только целые значения.

Из (10) имеем $13t_1 + 3x + 4z = 4$. (11)

Получили новое диофантово уравнение, но с меньшими, чем в (10) коэффициентами.

Применим к (12) те же соображения:

$$x = \frac{4 - 13t_1 - 4z}{3} = (1 - 4t_1 - z) + \frac{1 - t_1 - z}{3};$$

$\frac{1 - t_1 - z}{3} = t_2$, где t_2 — целое, $3t_2 + t_1 + z = 1$. (12)

В (12) коэффициент при z – неизвестном исходного уравнения равен 1 – завершили «измельчение» коэффициентов. Теперь последовательно выражаем z, x, y через t_1 и t_2:

$z = -t_1 - 3t_2 + 1$,

$x = 1 - 4t_1 + t_1 + 3t_2 - 1 + t_2 = -3t_1 + 4t_2$, (13)

$y = 1 + 6t_1 - 8t_2 + 4t_1 + 12t_2 - 4 + t_1 = 11t_1 + 4t_2 - 3$.

Итак, $x = -3t_1 + 4t_2$,

$y = 11t_1 + 4t_2 - 3$, (14)

$z = -t_1 - 3t_2 + 1$,

где t_1, t_2 — любые целые числа, определяющие все целые решения уравнения исходного уравнения.

Можно предложить учащимся найти частные решения данного уравнения и проверить их.

Например, пусть $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Имеем $x = 5$, $y = 16$, $z = -6$.

Подставим найденные решения в уравнение $29x + 13y + 56z = 17$, получим $145 + 208 - 336 = 17$; $353 - 336 = 17$; $17 = 17$.

Ответ: $x = -3t_1 + 4t_2$, $y = 11t_1 + 4t_2 - 3$, $z = -t_1 - 3t_2 + 1$, где t_1, t_2 — любые целые числа.

1.6 Методы решения диофантовых уравнений высших степеней

Рассмотрим методы, которые применяются к решению диофантовых уравнений второй и выше степеней.

1. *Применение метода разложения на множители при решении диофантовых уравнений.*

В курсе 7 класса учащиеся знакомятся с такими приемами как: вынесение общего множителя за скобки, использование формул сокращенного умножения, способ группировки при изучении метода разложения на множители, когда начинают проходить тему «Многочлены».

Перебрать все варианты при решении уравнения с двумя переменными не всегда легко. В том случае же, если уравнение имеет целочисленные решения, то перебрать их вовсе невозможно, так как таких решений бесконечно много. Поэтому существует еще один прием – метод разложения на множители.

Пример 1. Решить в целых числах уравнение $2x^3 + xy - 7 = 0$ [24].

Решение:

Приведем данное уравнение к следующему виду: $x(2x^2 + y) = 7$. Так как $7 = 1*7 = 7*1 = -1*(-7) = -7*(-1)$, то нам нужно рассмотреть 4 системы уравнений:

1) $\begin{cases} x = 1, \\ 2x^2 + y = 7, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = -1, \\ 2x^2 + y = -7, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 7, \\ 2x^2 + y = 1, \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = -7, \\ 2x^2 + y = -1. \end{cases}$

Из каждой системы получаем решения:

1) $x = 1$, $y = 7 - 2*1^2 = 5$, т.е. пара (1; 5).

2) $x = 7$, $y = 1 - 2*7^2 = -97$, т.е. пара (7; –97).

3) $x = -1$, $y = -7 - 2*(-1)^2 = -9$, т.е. пара (–1; –9).

4) $x = -7$, $y = -1 - 2*(-7)^2 = -99$, т.е. пара (–7; –99).

Ответ: (1; 5), (7; –97), (–1; –9), (–7; –99).

Метод разложения на множители может использоваться и при решении линейного уравнения с двумя неизвестными.

Пример 2. Решить в целых числах уравнение $x + y = xy$.

Решение:

Произведем ряд преобразований исходного уравнения:

$$\begin{aligned}
&xy - x - y = 0,\\
&x(y-1) - y = 0,\\
&x(y-1) - y + 1 - 1 = 0,\\
&x(y-1) - (y-1) = 1,\\
&(y-1)(x-1) = 1.
\end{aligned}$$

Запишем уравнение $x + y = xy$ в виде $(x-1)(y-1) = 1$.

Произведение двух целых чисел может равняться 1 только в том случае, когда оба они равны 1 или –1.

То есть исходное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-1=1,\\ y-1=1,\end{cases}\\ \begin{cases} x-1=-1,\\ y-1=-1,\end{cases}\end{array}\right. \qquad (15)$$

Решение первой системы: $x = 2$, $y = 2$, т.е. пара (2; 2).

Решение второй системы: $x = 0$, $y = 0$, т.е. пара (0; 0).

Ответ: (2; 2) , (0; 0).

2. *Применение метода оценки при решении диофантовых уравнений*.

Основной принцип данного метода – преобразования уравнения в целых числах в уравнение с очевидной оценкой. В большинстве случаев уравнение сводится к неотрицательному выражению. Данный метод применяется при решении нелинейных диофантовых уравнений, поэтому изучать его лучше в 10 – 11 классах.

Рассмотрим данный метод на примерах:

Пример 3. Решить в целых числах уравнение $5x^4 - 40x^2 + 2y^6 - 32y^3 = -208$ [14].

Решение:

Преобразуем исходное уравнение: $5(x^4 - 8x^2 + 16) + 2(y^6 - 16y^3 + 64) = 0$.

Используя формулы сокращенного умножения, получим: $5(x^2 - 4)^2 + 2(y^3 - 8)^2 = 0$. Так как $5(x^2 - 4)^2 \geq 0$ и $2(y^3 - 8)^2 \geq 0$, то решение возможно лишь при $5(x^2 - 4)^2 = 0$ и $2(y^3 - 8)^2 = 0$, что соответствует системе уравнений: $\begin{cases} x^2 - 4 = 0; \\ y^3 - 8 = 0. \end{cases}$

Решение первого уравнения системы $x = \pm 2$. Решение второго уравнения системы $y = 2$.

Ответ: $x = \pm 2$; $y = 2$.

Пример 4. Решить в целых числах уравнение $(x^2 + 4)(y^2 + 1) = 8xy$.

Решение:

Если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением данного уравнения, то и пара $(-x_0; -y_0)$ тоже решение.

И так как $x = 0$ и $y = 0$ не являются решением уравнения, то, разделив обе части уравнения на *xy*, получим: $\frac{(x^2 + 4)(y^2 + 1)}{xy} = 8$, которое равносильно следующему уравнению $\left(x + \frac{4}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 8$.

Пусть $x > 0$, $y > 0$, тогда, согласно неравенству Коши, $x + \frac{4}{x} \geq \sqrt{x\frac{4}{x}} = 4$,

$y + \frac{1}{y} \geq \sqrt{y\frac{1}{y}} = 2$. Тогда их произведение $\left(x + \frac{4}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 4 * 2 = 8$, значит,

$x + \frac{4}{x} = 4$ и $y + \frac{1}{y} = 2$.

Отсюда находим $x=2$ и $y=1$ – решение, тогда $x=-2$ и $y=-1$ – тоже решение.

Ответ: (2;1); (–2;–1).

3. *Решение диофантова уравнения с двумя неизвестными как квадратного относительно одной из переменных.*

При решении уравнений методом сведения к квадратному уравнению необходимо рассмотреть и оценить дискриминанты этих уравнений.

Пример 5. Решить в натуральных числах квадратное уравнение $2k^2+7k=2mk+3m+36$ [14].

Решение:

1) Решим квадратное уравнение относительно переменной k:

$$2k^2+(7-2m)k-3m-36=0;$$
$$D=49-28m+4m^2+24m+288=4m^2-4m+337;$$
$$k_{1,2}=\frac{-2m-7\pm\sqrt{4m^2-4m+337}}{4},$$

Так как, k и $(2m-7)$ – целые числа (k и m – натуральные по условию), то $\sqrt{4m^2-4m+337}$ – является целым числом.

Пусть $L=\sqrt{4m^2-4m+337}$, $L>0$; L – целое число. Тогда $L^2=4m^2-4m+337$.

2) Решим полученное квадратное уравнение относительно переменной m.

Перепишем уравнение в следующем виде: $4m^2-4m+337-L^2=0$. $D=4+4L^2-1348=4L^2-1344$.

Получаем следующие значения корней:

$$4m_1=2+\sqrt{L^2-336};$$
$$4m_2=2-\sqrt{L^2-336}.$$

Так как $4m$ – натуральное число (m – натуральное по условию), то $\sqrt{L^2-336}$ – является целым числом.

Пусть $N = \sqrt{L^2 - 336}$, $N > 0$; N – целое число. Тогда $N^2 = L^2 - 336$, откуда следует, что $(L - N)(L + N) = 336$.

Решая это уравнение в натуральных числах методом разложения на множители, получим $L = 25$; $N = 17$; $k = 9$; $m = 9$.

Ответ: $k = m = 9$.

Таким образом, можно сделать вывод, что существуют различные методы и способы решения диофантовых уравнений, которые условно можно разделить на две группы:

1. методы решения неопределенных уравнений первой степени с двумя переменными;

2. методы решения уравнений высших степеней в целых числах.

Задачи на целые числа всегда считались одними из наиболее сложных задач, предлагаемых учащимся старших классов. Это объясняется отсутствием универсального метода решения для таких уравнений.

При решении диофантовых уравнений нужно уметь мыслить, охватывать задачу целиком и как говорят шахматисты «просчитывать на несколько шагов вперед». Большой упор при обучении решению диофантовых уравнений делается на знание понятия диофантовых уравнений, их видов, методов и способов решения, а главное на умения эти знания применять на практике.

2 ПРИМЕНЕНИЕ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ И ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

2.1 Решение задач в целых числах при подготовке к ЕГЭ по математике

В последнее время диофантовы уравнения стали одним из источников формирования базы задач типа С6 ЕГЭ по математике (до 2014 года включительно), а также заданий №21 (профильный уровень) в материалах ЕГЭ 2015 – 2016 годов и №19 (профильный уровень) 2017 года.

Так как основным отличием таких задач является их неординарный характер, то построение решения может потребовать нестандартных методов. Поэтому ученику для успешной сдачи ЕГЭ нужно знать и теорию, и методику решения диофантовых уравнений.

Рассмотрим применение диофантовых уравнений при решении заданий Единого Государственного Экзамена.

Пример 1. Сумма двух натуральных чисел равна 43, а их наименьшее общее кратное в 120 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите эти числа [28].

Решение:

Сумма чисел кратна их наибольшему общему делителю, поэтому их наибольший общий делитель является делителем числа 43, откуда следует, что он равен 1. Тогда наименьшее общее кратное этих чисел равно их произведению.

Обозначив искомые числа через x и y, получаем систему $\begin{cases} x+y=43 \\ xy=120 \end{cases}$, решая которую, получаем x = 40 и y = 3.

Ответ: (40; 3).

Пример 2. Решите в натуральных числах уравнение [47]

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{25}\text{, где } m>n\,. \qquad (16)$$

Решение:

Так как m и n натуральные числа, то для решения задачи требуется решить в натуральных числах уравнение

$$25n + 25m = mn, \text{ где } m > n. \qquad (17)$$

При $n = 25$ равенство (17) неверно, поэтому из равенства (17) можно выразить неизвестную m: $m = \dfrac{25n}{n-25} = 25 + \dfrac{625}{n-25}$.

Теперь очевидно, что m является натуральным числом при $n > 25$ лишь в случаях:

1) $n - 25 = 1$,
2) $n - 25 = 5$,
3) $n - 25 = 5^2$,
4) $n - 25 = 5^3$,
5) $n - 25 = 5^4$.

Но при этом условие $m > n$ будет выполнено лишь в случаях

1) $m = 650$, $n = 26$;
2) $m = 150$, $n = 30$.

Ответ: (650; 26), (150; 30).

Пример 3. Решить в целых числах уравнение $3x^2 + 6xy + 4y^2 = 28$ [38].

Решение:

$3x^2 + 6xy + 4y^2 = 28 \leftrightarrow 3(x + y)^2 + y^2 = 28$, откуда (т.к. $3(x + y)^2 \geq 0$ и y – целое) $y^2 < 28$ и, следовательно $|y| \leq 5$.

Имеем:

1. при $y = 1$

$3(x + y)^2 = 28 - 1 = 27 \rightarrow (x + y)^2 = 9 \rightarrow (x + y) = \pm 3 \rightarrow x_1 = -4, x_2 = 2.$

2. при $y = -1$

$3(x + y)^2 = 28 - 1 = 27 \rightarrow (x + y)^2 = 9 \rightarrow (x + y) = \pm 3 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 4.$

3. при $y = \pm 2$

$3(x + y)^2 = 28 - 4 = 24 \rightarrow (x + y)^2 = 8 \rightarrow$ в целых числах решений нет.

4. при $y = \pm 3$

$3(x + y)^2 = 28 – 9 = 19 \rightarrow (x + y)^2 = 9 \rightarrow$ в целых числах решений нет.

5. при $y = 4$

$3(x + y)^2 = 28 – 16 = 12 \rightarrow (x + y)^2 = 4 \rightarrow (x + y) = \pm 2 \rightarrow x_1 = – 6, x_2 = –2.$

6. при $y = – 4$

$3(x + y)^2 = 28 – 16 = 12 \rightarrow (x + y)^2 = 4 \rightarrow (x + y) = \pm 2 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 6.$

7. при $y = 5$

$3(x + y)^2 = 28 – 25 = 3 \rightarrow (x + y)^2 = 1 \rightarrow (x + y) = \pm 1 \rightarrow x_1 = – 6, x_2 = – 4.$

8. при $y = –5$

$3(x + y)^2 = 28 – 25 = 3 \rightarrow (x + y)^2 = 1 \rightarrow (x + y) = \pm 1 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 6.$

Составляя пары целочисленных решений, получим ответ.

Ответ: (–4; 1), (2; 1), (–2; –1), (4; –1), (–6; 4), (–2; 4), (2; –4), (6; –4), (–6; 5), (–4; 5), (4; –5), (6; –5)

Пример 4. Решите в целых числах уравнение [39]

$$m^4 - 2n^2 = 1. \qquad (18)$$

Решение:

Так как m – нечетное число, то знаки m и n можно выбирать произвольно, так как если $(m; n)$ решение уравнения (18), то $(– m; n)$, $(m; – \mathrm{n})$, $(–m; –n)$ – тоже решения уравнения (18). Договоримся искать неотрицательные решения.

Пусть $m = 2t + 1$, тогда:

$$(m^4 – 1) = (m – 1)(m + 1)(m^2 + 1) = 2t(2t + 2)(4t^2 + 4t + 2) = 2n^2.$$

Тогда $4t(t + 1)(2t^2 + 2t + 1) = n^2$, получается, что n – четное число. Пусть $n = 2z$, тогда $t(t + 1)(2t^2 + 2t + 1) = z^2$. Числа t, $t + 1$ и $2t^2 + 2t + 1 = 2t(t + 1) + 1$ попарно взаимно просты, а их произведение – полный квадрат. Отсюда следует, что каждое из них тоже является полным квадратом. Это возможно только при $t = 0$, иначе $t + 1$ не будет квадратом! Тогда и $z = 0$, получается, что $m = \pm 1$, $n = 0$.

Ответ: $m = \pm 1$, $n = 0$.

Пример 5. Решите в целых числах уравнение $mn^2 = 10^5 n + m$ [47].

Решение:

Запишем исходное уравнение в виде

$$m(n^2 - 1) = 10^5 n. \qquad (19)$$

Если $n = 0$, то и $m = 0$. Получено первое решение уравнения (19).

Если $n \neq 0$, то и $m \neq 0$. Заметим, что если пара чисел $(m_0; n_0)$ решение уравнения (19), то и пара $(-m_0; -n_0)$ – тоже решение уравнения (19).

Пусть $n > 0, m > 0$, тогда $n \neq 1$. Перепишем уравнение (19) в виде

$$m(n - 1)(n + 1) = 10^5 n. \qquad (20)$$

Так как ни $n-1$, ни $n+1$ не делятся на n, то m делится на n. Обозначим $m = pn$, где p – натуральное число. Разделив (20) на n, имеем:

$$p(n - 1)(n + 1) = 10^5. \qquad (21)$$

Число n не может быть четным, так как в противном случае хотя бы одно из соседних нечетных чисел $n-1$ и $n+1$ будет иметь простой нечетный делитель, отличный от 5. Следовательно, число n нечетное, а $n+1$ и $n+1$ – два соседних четных числа, не имеющие простых делителей, кроме 2 и 5.

Выпишем четные числа $n - 1$, не имеющие простых делителей, кроме 2 и 5 такие, что $(n - 1)(n + 1)$ не превосходит 10^5. Учтем, что число $n - 1$ имеет делитель 2 в степени, не большей 4, так как число $n + 1$ тоже четное, а степень числа 2 в правой части равенства (20) равна 5.

$2^1 = 2$,	$2^1 * 5^1 = 10$,	$2^1 * 5^2 = 50$,	$2^1 * 5^3 = 250$.
$2^2 = 4$,	$2^2 * 5^1 = 20$,	$2^2 * 5^2 = 100$,	
$2^3 = 8$,	$2^3 * 5^1 = 40$,	$2^3 * 5^2 = 200$,	
$2^4 = 16$,	$2^4 * 5^1 = 80$,		

Из всех перечисленных случаев только при $n - 1 = 2$ и $n - 1 = 8$ произведение $(n - 1)(n + 1)$ не содержит простых делителей, кроме 2 и 5. Это означает, что условию задачи удовлетворяют лишь $n = 3$ и $n = 9$.

При $n = 3$ из равенства (20) получим: $p = 12500$, $m = pn = 37500$.

При $n = 9$ из равенства (20) получим: $p = 1250$, $m = pn = 11250$.

Итак, условиям задачи удовлетворяют $n = 3$ и $m = 37500$; $n = 9$ и $m = 11250$.

В силу сделанного выше замечания условиям задачи удовлетворяют также $n = -3$ и $m = -37500$; $n = -9$ и $m = -11250$.

Ответ: (m; n) = (0; 0), (±9; ±11250), (±3; ±375000)

Пример 6. Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах [37].

Решение:

Левая часть уравнения при любых натуральных числах m и n при делении на 3 дает остаток 1, следовательно, такой же остаток при делении на 3 должен быть и у 5^k, откуда следует, что k – четное. Пусть $k = 2r,\ r \in N$.

Правая часть уравнения при любом натуральном k при делении на 4 дает остаток 1, следовательно, такой же остаток при делении на 4 должен быть и у 3^m, откуда следует, что m – четное. Пусть $m = 2s,\ s \in N$.

Перепишем исходное уравнение в виде $3^{2s} + 4^n = 5^{2r}$, или в виде

$$2^{2n} = (5^r - 3^s)(5^r + 3^s)\ . \qquad (22)$$

Тогда $5^r - 3^s = 2^q$ и $5^r + 3^s = 2^l$, где q и l – целые неотрицательные числа и $q + l = 2n$. Таким образом, $5^r = \dfrac{2^q + 2^l}{2}$ и $3^s = \dfrac{2^l - 2^q}{2} = 2^{l-1} - 2^{q-1}$.

Число 3^s – нечетное, значит $2^{l-1} - 2^{q-1}$ нечетно, поэтому $q = 1$ и $3^s = 2^{l-1} - 1$.

Следовательно, число $l-1$ четно, $l-1 = 2p$ (иначе левая часть не делится на 3). Тогда $3^s = (2^p - 1)(2^p + 1)$ – произведение двух множителей, отличающихся на 2 и являющихся степенями тройки. Ясно, что эти множители 1 и 3, тогда $p = 1$, $s = 1$, $m = 2s = 2$.

Далее последовательно получаем: $l = 2p + 1 = 3$, $5^r = \dfrac{2^q + 2^l}{2} = 5$, $r = 1$, $k = 2r = 2$, $q + 1 = 2n = 4$. Итак, $m = n = k = 2$.

Ответ: $m = 2$, $n = 2$, $k = 2$.

Пример 7. Мастер делает за час целое число деталей, большее 5, а ученик – на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе – на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ? [39]

Решение:

Пусть $x > 5$ деталей делает мастер за 1 час, тогда ученик за одни час делает $(x - 2)$ детали. Пусть также мастер выполняет заказ за t часов, где t – целое число. Согласно условиям задачи имеем уравнение $xt = 2(x-2)(t-1)$.

Произведем некоторые преобразования исходного уравнения:

$$xt = 2(x-2)(t-1) = 2(xt - x - 2t + 2) = 2xt - 2x - 4t + 4,$$
$$-xt = -2x - 4t + 4,$$
$$-xt + 4t = -2x + 4,$$
$$t(4-x) = -2x = 4,$$
$$t(x-4) = 2x - 4.$$

Выразим переменную t из последнего равенства:

$$t = \frac{2x-4}{x-4} = 2 + \frac{4}{x-4}. \qquad (23)$$

В равенстве (23) дробь $\frac{4}{x-4}$ должна быть целым числом. При $x > 5$ это возможно, когда $x = 6$ или $x = 8$. В первом случае получаем, что $t = 4$, во втором – $t = 3$. В обоих случаях заказ состоит их $xt = 24$ деталей.

Ответ: Из 24 деталей.

Пример 8. Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря двумя способами: либо двумя автобусами типа A за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа B за несколько рейсов, причем, число рейсов каждого автобуса типа B будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа A. В каждом случае автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа B входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа A? [39]

Решение:

Пусть в автобус типа B входит k человек, а в автобус типа A – $(k + 7)$ человек и каждый из автобусов типа B сделает m рейсов, а каждый из автобусов типа A – (m + 1) рейсов. Так как в обоих случаях автобусы перевезут одно и то же количество школьников, получаем уравнение:

$$3km = 2(k+7)(m+1). \qquad (24)$$

После раскрытия скобок и арифметических преобразований

$$km = 14m + 2k + 14\ , \qquad (25)$$

Откуда

$$km - 14m - 2k - 14 = 0,$$
$$km - 14m - 2k + 28 - 42 = 0,$$
$$km - 14m - 2k + 28 = 42,$$
$$m(k-14) - 2(k-14) = 42,$$
$$(m-2)(k-14) = 42.$$

Далее будем работать с равенством (m – 2)(k – 14) = 42 (26)

Делителями числа 42 являются числа 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Перебор всех делителей дает восемь систем уравнений, решая которые получим возможные решения для чисел k и m: (15; 44), (16; 23), (17; 16), (20; 9), (21; 8), (28; 5), (35; 4), (56; 3). Для каждой пары чисел находим количество перевозимых школьников, равное $3km$, а именно 1980, 1104, 816, 540, 420, 420, 504. Следовательно, максимальное количество школьников, которое можно перевезти, составляет 1980 детей.

Ответ: 1980 детей.

Пример 9. Среди учеников начальной школы провели опрос: кто любит зиму, а кто – лето. Оказалось, что 90% любителей зимы любит и лето, а 72% любителей лета любят и зиму. Зато 10% всех опрошенных не любят ни зимы, ни лета. Каким при этих условиях могло быть наименьшее число опрошенных? [39]

Решение:

Обозначим через x число школьников, которые любят лето, через y – число школьников, которые любят зиму, а через z – число всех опрошенных школьников. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}9y = 0{,}72x \\ 0{,}9z = x + 0{,}1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 4x \\ 9z = 10x + y. \end{cases} \quad (27)$$

Кроме этого, числа $0{,}1y$ и $0{,}28x = \frac{7}{25}x$ должны быть целыми. Это означает, что y делится без остатка на 10, а x – на 25. Наименьшие значения переменных при этих условиях – это $y = 20$ и $x = 25$. При этом $z = \frac{10x + y}{9} = 30.$ То есть было опрошено минимум 30 школьников.

Ответ: 30 школьников.

2.2 Подготовка к решению олимиадных задач в целых числах

Предметные олимпиады чаще всего проходят в виде состязания между учащимися одного класса, между учащимися разных образовательных учреждений. Олимпиады требуют от участников демонстрации своих знаний, умений и навыков в различных изучаемых дисциплинах.

Участник олимпиады обычно усиленно готовится к ней, что способствует усвоению учебного и дополнительного материала. Участие в олимпиаде может служить преимуществом при поступлении в учебные заведения для дальнейшего образования, особенно если участник занял призовое место.

Одним из часто встречающихся видов заданий на олимпиадах различного уровня являются диофантовы уравнения или задачи, приводящие к ним.

Рассмотрим примеры таких заданий, взятых из олимпиад прошлых лет.

Пример 1. Решите уравнение $10x^2 + 11xy + 3y^2 = 7$ с двумя неизвестными x и y в целых числах [7].

Решение:

Преобразуем левую часть уравнения к виду $(5x + 3y)(2x + y)$. Таким образом, данное уравнение будет равносильно 4 системам, которые приводят к следующим парам целых корней (–4; 9), (14; –21), (4; –9), (–14; 21).

Ответ: (–4; 9), (14; –21), (4; –9), (–14; 21).

Пример 2. Решить в целых числах систему уравнений [12]
$$\begin{cases} x^2 + y - z = 0 \\ x + y^2 - z^2 + 6 = 0 \end{cases}.$$

Решение:

Запишем данную систему в виде
$$\begin{cases} z = x^2 + y \\ z^2 = x + y^2 + 6, \end{cases} \qquad (28)$$

тогда получим $(x^2 + y)^2 = y^2 + x + 6$ или $x(x^3 + 2xy - 1) = 6$.

Следовательно, x делитель 6, т.е. $x = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Нам подходят лишь значения $x = \pm 1; 2; 3; -6$.

Если

$x = -1$, то $y = 2$, $z = 3$;

$x = 1$, то $y = 3$, $z = 4$;

$x = 2$, то $y = -1$, $z = 3$;

$x = 3$, то $y = -4$, $z = 5$;

$x = -6$, то $y = -18$, $z = 18$.

Ответ: (–1; 2; 3), (1;3;4), (2; –1; 3), (3; –4; 5), (–6; –18; 18).

Пример 3. Найти все пары (a; b) натуральных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $45^a - b^b = 1998$ [4].

Решение:

Числа 1998 и 45^a кратны 3, поэтому и число b^b должно быть кратно 3. То есть $b = 3k$ для некоторого натурального k. Тогда $45^a = 1998 + 3^3k*k^{3k}$. Оба слагаемых в правой части полученного равенства кратны $3^3 = 27$, поэтому число 45^a также должно быть кратно 27, то есть $a \geq 2$. Значит, $45^a = 5^a*9^a$ делится на $9^2 = 81$. Если $k \geq 2$, то тогда число 3^3k*k^{3k} делилось бы на 81, поэтому и число 1998 должно делиться на 81, что неверно.

Следовательно, $k = 1$, т.е. $b = 3$, и поэтому $5^a = 1998 + 3^3 = 2025 = 45^2$, или $a = 2$.

Ответ: (2; 3).

Пример 4.Решить в целых числах уравнение $6x^2+5y^2=74$ [32].

Решение:

Запишем исходное уравнение в виде: $6x^2 - 24 = 50 - 5y^2$, то есть $6(x^2-4) = 5(10-y^2)$, откуда имеем $x^2-4=5u$, $10-y^2=6v$, значит $u=v$.

Итак, $x^2=4+5u$, т.е. $4+5u\ge 0$, откуда $u\ge\frac{-4}{5}$.

Аналогично $y^2=10-6v$, т.е. $10-6v\ge 0$, откуда $v\le\frac{5}{3}$.

Значит $u=0$ или $v=1$.

При $u=v=0$ получим, что $10=y^2$, где y – целое, что невозможно.

Пусть $u=v=1$, тогда $x^2=9$ и $y^2=4$.

Ответ: (3; 2), (–3; –2), (3; –2), (–3; 2).

Пример 5. Доказать, что все решения в целых числах уравнения $y^2=1+x+x^2+x^3+x^4$ исчерпываются следующими парами чисел (x; y): (–1; ±1), (0; ±1), (3; ±11) [19].

Решение:

Исходное уравнение можно преобразовать к любому из двух видов: либо

$$\left[x+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]^2=y^2-\frac{(5-2\sqrt{5})}{4}\left[x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]^2, \tag{29}$$

либо

$$\left[x^2+\frac{x}{2}+1\right]^2=y^2+\frac{5x^2}{4}. \tag{30}$$

Следовательно, если x и y – вещественные числа, удовлетворяющие исходному уравнению, то должны выполняться неравенства

$$x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\le|y|\le x^2+\frac{x}{2}+1, \tag{31}$$

откуда $|y|=x^2+\frac{x+a}{2}$, $0<a\le 2$.

Поскольку нас интересуют лишь целые x и y, то при четном значении x число a должно быть равно 2. В этом случае из уравнения (30) следует, что

x = 0. При нечетном значении x число a должно быть равно 1. В этом случае, поскольку $y^2 = \left[x^2 + \frac{x+1}{2}\right]^2 - \frac{(x-3)(x+1)}{4}$, x может принимать лишь два значения: $x = 3$ и $x = -1$.

Следовательно, все решения исходного уравнения в целых числах исчерпываются следующими значениями: (–1; ±1), (0; ±1), (3; ±11), что и требовалось доказать.

Пример 6. Доказать, что существуют четыре различных набора целых чисел, удовлетворяющих уравнениям $x_1 + x_2 + x_3 = 54,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1406$. Разработать общий метод решения в целых числах аналогичной системы уравнений, в которых вместо 54 и 1406 стоят целые числа a и b [19].

Решение:

Рассмотрим сразу общий случай, то есть уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 = a, \tag{32}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = b. \tag{33}$$

Исключив x_1 из (32) и (33), получим

$$2(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 - ax_2 - ax_3) = b - a^2. \tag{34}$$

Следовательно, $(b - a^2)$ – четное число, т.е. коэффициенты a и b должны быть либо оба четные, либо нечетные.

Пусть

$$x_1 = \frac{a}{3} - x, \tag{35}$$

$$x_2 = \frac{x-y}{2} + \frac{a}{3}, \tag{36}$$

$$x_3 = \frac{x+y}{2} + \frac{a}{3}. \tag{37}$$

Если из уравнения (37) вычесть уравнение (36), получим, что y – целое число. Примем за основу, что y неотрицательное целое число, поскольку изменение знака у приводит лишь к перестановке x_2 и x_3 и не порождает нового набора целочисленных решений x_1, x_2, x_3 системы уравнений (32) и (33). При $y = 0$ числа x_2 и x_3 равны.

Подставляя (35), (36) и (37) в уравнение (33), получаем

$$3x^2 + y^2 = 2\left(b - \frac{a^2}{3}\right), \tag{38}$$

откуда $b \geq \frac{a^2}{3}$.

Случай 1. Число a кратно 3.

Как показывает соотношение (35), число x в этом случае целое. Поскольку x_2 и x_3 – целые числа, x и y должны быть либо оба четные, либо оба нечетные. Любая пара чисел (x; y), удовлетворяющих соотношению (38), порождает набор целых чисел x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих системе уравнений (33) и (33). Решение (x_1, x_2, x_3), получаемое при положительном x, как правило, отличается от решения (x_1, x_2, x_3), соответствующего равному по абсолютной величине, но противоположному по знаку значению x.

Если $x = y$, то независимо от знака х решение (x_1, x_2, x_3) одинаково при одном и том же значении $|x|$. Различные пары чисел x и y, удовлетворяющих соотношению (38), не обязательно приводят к различным решениям (x_1, x_2, x_3) системы уравнений (32) и (33). Действительно, как следует из симметрии уравнений (32) и (33), если новое значение x приводит к значению x_1, совпадающему с ранее полученными значениями x_2 или x_3, то нового набора значений x_1, x_2, x_3 не возникает. Поэтому, за исключением особых случаев, следует ожидать, что каждому набору x_1, x_2, x_3 соответствуют три различных пары значений x и y.

Случай 2. Число a не кратно 3.

В этом случае число x имеет вид $\frac{n}{3}$, где n – такое целое число, что $\frac{(a-n)}{3}$ – целое. Пары значений n и y, используемые для получения набора x_1, x_2, x_3, должны удовлетворять соотношению (38), а знак n следует выбирать так, чтобы удовлетворялось соотношение (35). Числа y и n должны быть либо оба четными, либо оба нечетные.

При заданных значениях a и b предложенный метод позволяет довести решение задачи до конца. При $a = 54$, $b = 1406$ правая часть соотношения (38) равна 868. Различные решения системы уравнений (32) и (33) для этого случая представлены в таблице 1:

Таблица 1

Решения уравнений

x	y	x_1	x_2	x_3
3	29	15	5	34
–3	29	21	2	31
8	26	10	9	35
–8	26	26	1	27

Остальные пары значений (x, y): (±9, 25), (±13, 19), (±16, 10), (±17, 1) не приводят к новым наборам x_1, x_2, x_3.

Как мы видим, довольно часто на школьных олимпиадах по математике можно встретить задания, сводящиеся к решению уравнений в целых или натуральных числах.

3 ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ»

3.1 Общие положения об элективных курсах

Положение об элективных курсах (курсах по выбору) разработано на основании следующих нормативных документов:

- Федеральный Закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (с изменениями) [42];
- Приказ Министерства образования Российской Федерации от 09.03.04 г. № 1312 «Об утверждении Федерального базисного учебного плана и примерных учебных планов для образовательных учреждений Российской Федерации, реализующих программы общего образования» (в редакции приказа Минобрнауки РФ от 01.02.2015 №74) [35];
- Письмо Минобразования России от 13.11.2003г. № 14–51–277/13 «Об элективных курсах в системе профильного обучения на старшей ступени общего образования» [34];
- Письмо Министерства образования и науки Российской Федерации от 4 марта 2010 года №03–413 «О методических рекомендациях по реализации элективных курсов» [33].

Понятие «элективный» (от лат. Electus– избранный) избирательный. Элективные курсы – это *обязательные для посещения* курсы по выбору учащихся. Элективные курсы реализуются за счет школьного компонента учебного плана.

Цель элективных курсов – помощь обучающимся в овладении способами решения практических задач через учебную практику, проектирование и исследовательскую деятельность. Более того, выбор способа реализации индивидуальной образовательной траектории способствует развитию самостоятельности в плане выбора будущей профессии.

Программа курса должна удовлетворять следующим условиям:

- учитывать индивидуальные особенности обучающихся;

- знакомить обучающихся с методами научных исследований;
- опираться на школьную программу и дополнять ее, способствовать формированию исследовательских умений у обучающихся;
- нацеливать обучающихся на подготовку к ОГЭ, ЕГЭ и их успешную сдачу, а также к победе в олимпиадах;
- формировать у обучающихся такие умения, как конспектирование учебного материала, наблюдение, анализ, обобщение, рефлексия, систематизация.

Рабочие программы курсов разрабатываются в соответствии с требованиями принятого Положения о рабочей программе в образовательном учреждении (ОУ). Рабочая программа и календарно – тематический план курса на текущий учебный год утверждаются директором образовательного учреждения.

Виды элективных курсов по содержанию:

- предметно – ориентированные (нацелены на создание условий школьнику для реализации личных познавательных интересов в выбранной им образовательной области, выявление готовности обучающихся изучать предмет на повышенном уровне, создание условий для сдачи экзамена по выбору);
- межпредметные (отвечают за формирование у школьников способности ориентироваться в мире современных профессий, знакомство обучающихся на практике со спецификой типичных видов деятельности, соответствующих наиболее распространённым профессиям, осуществление поддержки мотивации к будущему профилю обучения);
- надпредметные (обеспечивают реализацию познавательных интересов школьников, выходящих за рамки традиционных предметов и распространяющихся на области деятельности человека вне выбранного ими профиля обучения)

Функции элективных курсов

- дополняют программу изучения базовых предметов;

- служат для индивидуализации и дифференциации обучения;
- позволяют повысить качество знаний обучающихся;
- формируют у обучающихся способы организации учебной деятельности;
- способствуют формированию коммуникативной компетентности;
- ориентируют в выборе профиля обучения и будущей профессии;
- развивают навыки самоопределения, самоорганизации, самоконтроля и принятия решений;
- прививают общекультурные ценности.

Элективных курсов в ОУ должно быть достаточно для того чтобы обучающиеся могли раскрыть свой внутренний потенциал с учетом интересов, способностей и склонностей.

Элективные курсы как форма образовательного процесса организуются за счет регионального компонента (1 час) и школьного компонента (1 час).

Преподавание курсов ведется в рамках учебного расписания ОУ, утвержденного директором ОУ.

Критерии оценивания достижений учащихся в рамках курсов

Критерии оценивания достижений устанавливаются ОУ и доводятся до сведения учеников на первом занятии.

Для оценивания учебных достижений обучающихся рациональнее использовать систему «зачет – незачет». Курс считается зачтенным, если учащийся посетил не менее 65 – 80% (в зависимости от установленных в ОУ критериев оценки) занятий по этому курсу и (или) по окончании курса предоставил зачетную работу. Зачетная работа может быть выполнена в форме контрольной, лабораторной, практической, презентационной работы или в др.

Особенности элективных курсов на ступени профильной подготовки (10 –11 классы)

Элективные курсы старшей профильной школы определяются ОУ на основе базисного учебного плана. Их основная задача – расширение, углубление знаний, формирование специфических умений, знакомство с новыми областями науки в рамках выбранного профиля.

Элективные курсы в 10 – 11 классах более системные, долгосрочные, содержательные, специфичны для каждого профиля обучения.

Эффективность элективных курсов определяется по результатам ЕГЭ, школьной научной конференции и материалов анкетирования.

Программно – методическое обеспечение элективных курсов

Реализация содержания элективных курсов в рамках предпрофильного и профильного обучения обеспечивается:

- программами курсов, рекомендованными Министерством образования Российской Федерации, а также программами, разработанными педагогами ОУ и утвержденные директором ОУ;
- учебными пособиями для обучающихся;
- методическими разработками для учителя.

Материалы элективных образовательных программ для предпрофильной подготовки обучающихся 8 – 9 классов и профильного обучения на старшей ступени общего образования должны быть оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к структуре рабочей программы педагогов.

Содержание знаний, которые включаются в программу, должно отвечать требованиям к подготовке выпускников, определяемым государственными образовательными стандартами и иметь практико – ориентированную направленность.

Определение методов обучения осуществляется в соответствии с целями и содержанием курсов по выбору. Методы организации и проведения элективных курсов определяются условиями, временем протекания процесса обучения, особенностями индивидуального стиля преподавания и восприимчивостью обучающихся.

В качестве учебной литературы по элективным курсам используются учебные пособия для факультативных курсов, для кружковой работы, а также научно – популярная литература, справочные издания, авторские разработки и пособия, имеющие рекомендации к использованию, образовательные ресурсы Интернета.

3.2 Программа элективного курса «Диофантовы уравнения»

Пояснительная записка

В предложенном элективном курсе освещаются вопросы, связанные с проблемой решения неопределенных уравнений первой и высших степеней в целых (натуральных) числах. Работа с учащимися на занятиях данного курса требует базового уровня знаний и умений по программе школьного курса математики, а также умения выполнять операции над числами. Особое внимание уделяется использованию знаний, связанных с вопросами делимости во множестве целых чисел.

Вопрос о нахождении целых (натуральных) решений линейного уравнения с двумя переменными, о возможных методах его решения остается за рамками школьного учебника. Однако многие практические задачи сводятся к решению линейного уравнения с двумя переменными, эти задачи часто встречаются в вариантах математических олимпиад. Знание общих методов решения таких уравнений, названных в математике диофантовыми, существенно расширяет математический кругозор учащихся, позволяет им осознать необходимость изучения математики, а как следствие ориентирует их на выбор математического (или естественно-научного) профиля в старших классах средней школы.

Элективный курс предназначен для учащихся 8 – 11 классов и разбит на два блока.

Первый блок посещают учащиеся 8 – 9 классов, а второй учащиеся 10 – 11 классов.

В 8 – 9 классах занятия проводятся раз в две недели по 1 часу, в 10 – 11 – раз в неделю по 1 часу.

Цель изучения курса: расширение и систематизация знаний по теме «Решение диофантовых уравнений».

Задачи курса:

Образовательные:

- познакомить учащихся с понятием диофантова уравнения и с историей его появления в математической науке;
- научить решать диофантовы уравнения с двумя переменными различными способами;
- научить решать текстовые задачи, описывающие реальные (практические) ситуации, математической моделью которых являются диофантовы уравнения или их системы.

Воспитательные:

- воспитание интереса к математике, стремления использовать полученные знания в междисциплинарных областях;
- воспитание информационной культуры учащихся.

Развивающие:

- развивать познавательный интерес к нестандартным и усложненным задачам, содержание которых выходит за пределы учебника;
- развитие логического мышления и умения находить нестандартный способ решения, алгоритмической культуры и интуиции;
- развить навыки самообразования, критического мышления, самоорганизации и самоконтроля, работы в команде, умения ставить, формулировать и решать проблемы.

Основные организационные формы реализации предлагаемой программы — лекционные, практические и семинарские занятия.

Методы обучения, применяемые в процессе проведения занятий — школьная лекция, рассказ, беседа, метод упражнений.

Формы обучения имеют как фронтальный, так и групповой, и индивидуальный характер.

Содержание курса

8 – 9 классы

1. Кто же такой Диофант? История развития теории диофантовых уравнений.

2. Определение диофантова уравнения первой степени с двумя неизвестными. Решение диофантовых уравнений способом перебора вариантов. Решение текстовых задач.

3. Решение диофантовых уравнений с использованием алгоритма Евклида. Актуализация знаний по теме «Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида». Решение задач.

4. Применение метода разложения на множители при решении диофантовых уравнений первой и высших степеней. Решение задач.

5.Применение арифметики остатка при нахождении целых решений диофантовых уравнений с двумя и более неизвестными. Решение задач.

10 – 11 класс

1. Метод рассеивания (измельчения) в решении диофантовых уравнений. Алгоритм решения диофантова уравнения методом измельчения коэффициентов. Решение уравнений. Решение текстовых задач.

2. Нахождение решения диофантовых уравнений с помощью цепных дробей. Введение понятия цепной дроби. Алгоритм получения цепной дроби. Формулы целых решений диофантова уравнения первой степени с двумя переменными на основе применения цепных дробей.

3. Применение метода оценки при решении диофантовых уравнений. Сущность метода. Решение уравнений

4. Решение диофантова уравнения с двумя переменными как квадратного относительно одной из переменных.

5. Решение диофантовых уравнений различными способами.

6. Решение задач, сводимых к диофантовым уравнениям или их системам.

Тематическое планирование занятий элективного курса

Таблица 2

Тематическое планирование

№ п/п	Тема занятия	Количество часов		
		Теория	Практика	Всего
8 – 9 класс				
1	Кто же такой Диофант?	1	0	1
2–4	Решение диофантовых уравнений способом перебора вариантов.	1	2	3
5–7	Применение метода разложения на множители при решении диофантовых уравнений первой и высших степеней.	1	2	3
8–10	Решение диофантовых уравнений с использованием алгоритма Евклида.	1	2	3
11–13	Применение арифметики остатка при нахождении целых решений диофантовых уравнений с двумя и более неизвестными.	1	2	3
	ИТОГО:	**5**	**8**	**13**
10 – 11 классы				
1–3	Метод рассеивания (измельчения) в решении диофантовых уравнений.	1	2	3
4–6	Решение диофантовых уравнений с использованием цепных дробей.	1	2	3
7–9	Применение метода оценки при решении диофантовых уравнений.	1	2	3
10–12	Решение диофантова уравнения с двумя переменными как квадратного относительно одной из переменных.	1	2	3

Окончание таблицы 2

13–16	Решение диофантовых уравнений различными способами.	0	4	4
17–20	Решение задач, сводимых к диофантовым уравнениям или их системам.	1	3	4
	ИТОГО	**5**	**15**	**20**

Данная программа рассчитана для учащихся 8 – 9 классов на 13 часов, 10 – 11 классов на 20 часов. Большую часть курса занимают занятия практического характера. Общее содержание описанного курса для учащихся является новым.

Учебно – методичческое обеспечение

1. Александров, В. А. Задачник – практикум по теории чисел: для студентов заочников физ. – мат. фак. пед. ин – тов / В. А. Александров, С. М. Горшенин. – Москва : Просвещение, 1972. – 80 с.

2. Баврин, И.И. Старинные задачи: книга для учащихся / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. – Москва : Просвещение, 1994. – 131 с.

3. Башмакова, И. Г. Диофант и диофантовы уравнения / И. Г. Башмакова. – Москва : Наука, 1972. – 68 с.

4. Бухштаб, А. А. Теория чисел : учебник для пед. вузов / А. А. Бухштаб. – Москва : Лань, 2008. – 384 с.

5. Власова, А. П. Решение уравнений в целых числах : учеб. пособие / А. П. Власова, Н. В. Евсеева, Н. И. Латанова. – Москва : издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. – 68 с.

6. Кожегельдинов, С. Ш. Некоторые элементы теории диофантовых уравнений в упражнениях и задачах : учеб. пособие / С. Ш. Кожегельдинов. – Семипалатинск : Семей, 2003. – 83 с.

7. Малинин, В. А. Подготовка учащихся 9-11 классов к математическим олимпиадам. Задачи с целыми числами : учеб. пособие / В. А. Малинин. – Нижний Новгород : Нижегор. гуманитар. центр, 2000. – 69 с.

8. Сборники задач по подготовке к ЕГЭ к заданиям С6 (до 2014 года), №21 (2015–2016 гг), №19(2017 г) различны авторов.

Программно – аппаратные ресурсы

Проектор, Microsoft Word, Microsoft Power Point.

Дидактические средства обучения, в том числе и на основе ИКТ

- Визуальные дидактические средства

1. Печатные текстовые средства: учебные пособия и сборники задач;
2. Простые визуальные средства: таблицы, схемы, алгоритмы и т.д.

- Технические визуальные средства

1. Проектор, а также используемые с ними носители информации и мультимедийные электронные средства (слайд-презентации).

- Универсальные дидактические средства

1. Компьютер.

Методические особенности организации учебно – познавательной деятельности

1.Объяснение нового материала;

2. Беседа;

3. Работа с электронными ресурсами.

Особенности организации взаимодействия на уроках (коммуникации)

1.Индивидуальные;

2. Коллективные.

Данный элективный курс позволит учителю донести до учащихся основные методы и способы решения диофантовых уравнений, которые в дальнейшем пригодятся учащимся при подготовке к ЕГЭ по математике и олимпиадам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведя анализ периодической и учебно – методической литературы, мы пришли к выводу, что в настоящее время существуют различные способы решения диофантовых уравнений, алгоритмы которых несложно запомнить.

При решении диофантовых уравнений первой степени чаще всего используют следующиее методы и способы:

- Осуществление перебора вариантов;
- Применение метода остатков;
- Применение способа рассеивания (измельчения).

А для решения диофантовых уравнений высших степеней существуют другие методы, а именно: применение метода разложения на множители, метод оценки, решение уравнения с двумя переменными как квадратного относительно одной из переменных.

Изучив контрольно – измерительные материалы ЕГЭ по математике, сборники заданий для подготовки к экзамену следующих авторов: Л. Д. Лаппо, А. Я. Савельев, Ю. В. Садовничий, А. В. Шевкин, И. В. Ященко и др., мы обнаружили, что уравнения в целых числах часто встречаются в заданиях ЕГЭ, при решении которых учащимся необходимо показать полноту своих знаний и умение применять на практике теорию по теме «Диофантовы уравнения». Также, задания, сводящиеся к решению неопределенных уравнений, часто встречаются на различных школьных олимпиадах по математике.

Следует отметить, что исследование алгоритмов решения диофантовых уравнений может помочь при решении такого рода заданий, которые оцениваются в значительное количество баллов.

В связи с тем, что многие практические задачи сводятся к решению уравнений с двумя переменными, а диофантовы уравнения и методы их решения не изучаются в школьном курсе математики, поэтому нами был разработан элективный курс «Диофантовы уравнения» для учащихся 8 – 9 и

10 – 11 классов. Цель курса – расширение и систематизация знаний по теме «Решение диофантовых уравнений». Он может использоваться учителями при подготовке учащихся к сдаче ЕГЭ по математике.

В приложении представлены задания, подобранные нами, для самостоятельной работы учащихся, которые можно использовать при подготовке к сдаче ЕГЭ по математике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абакумова, С. И. Диофантовы уравнения / С. И. Абакумова, А. Н. Гусева // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире. – 2014. – Т. 1, №6. – С. 133–137.

2. Александров, В. А. Задачник – практикум по теории чисел: для студентов заочников физ. – мат. фак. пед. ин – тов / В. А. Александров, С. М. Горшенин. – Москва : Просвещение, 1972. – 80 с.

3. Баврин, И.И. Старинные задачи: книга для учащихся / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. – Москва : Просвещение, 1994. – 131 с.

4. Барабанов, Е.А. Задачи заключительного тура минской городской математической олимпиады школьников / Е.А. Барабанов, И.И. Воронович, В.И. Каскевич, С.А. Мазаник. – Минск : Ковчег, 2006. – 352 с.

5. Башмакова, И. Г. Диофант и диофантовы уравнения / И. Г. Башмакова. – Москва : Наука, 1972. – 68 с.

6. Белкин, Е. Л. Теоретические предпосылки создания эффективных методик обучения / Е. Л. Белкин // Начальная школа. – Москва, 2001. – № 4. – С. 11–20.

7. Берлов, С. Л. Петербургские математические олимпиады / С. Л. Берлов, С. В. Иванов, К.П. Кохась. – Москва : Лань, 2003. – 532 с.

8. Бокарев, Н. Л. Некоторые классические диофантовы уравнения / Н. Л. Бокарев, Е. В. Буякова // Научно-методический электронный журнал концепт. – 2014. – Т. 26. – С. 56–60.

9. Брюно, А. Д. От диофантовых приближений до диофантовых уравнений / А. Д. Брюно // Чебышевский сборник. – 2016. – Т. 17, №3. – С. 38–52.

10. Бухштаб, А. А. Теория чисел : учебник для пед. вузов / А. А. Бухштаб. – Москва : Лань, 2008. – 384 с.

11. Васильев, Н. Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – Москва : Наука, 1998. – 288 с.

12. Васильев, Н. Б. Заочные математические олимпиады / Н. Б. Васильев, В. Л. Тутенмахер. – Москва : Наука, 1986. – 175 с.

13. Виленкин, Н. Я. За страницами учебника математики : учеб. пособие для учащихся средней школы / Н. Я. Виленкин, И. Я. Депман. – Москва : Просвещение, 1996. – 320 с.

14. Власова, А. П. Решение уравнений в целых числах : учеб. пособие / А. П. Власова, Н. В. Евсеева, Н. И. Латанова. – Москва : издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. – 68 с.

15. Галламов, М. М. Линейные диофантовы уравнения с дополнительными условиями / М. М. Галламов // Математическое образование. – 2012. –№2. – С. 9–23.

16. Давыдов, В. В. Принципы обучения в школе будущего : хрестоматия по возрастной и педагогической психологии / В. В. Давыдов. – Москва : Педагогика, 2002. – 138 с.

17. Дендеберян, Н. Г. Проектирование элективного курса по решению математических задач с практическим содержанием в средней школе / Н. Г. Дендеберян, Е. В. Кострыкина // Методический поиск: проблемы и решения. – 2016. – №1. – С. 39–43.

18. Жмурова, И. Ю. Диофантовы уравнения: от древности до наших дней / И. Ю. Жмурова, А. В. Ленивова // Молодой ученый. – 2014. – №9. – С. 1–5.

19. Избранные задачи по математике из журнала «American Mathematical Monthly» для школьных и студенческих олимпиад : сборник задач / Пер. с англ. / Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева. – Москва : Едиториал УРСС, 2004. – 600 с.

20. Кирин, К. И. Цепные (непрерывные) дроби и диофантовы уравнения : материалы XXII Всероссийской (с международным участием) научно-практической конференции «Инновации. Интеллект. Культура» / К. И. Кирин. – Тюмень : издательство Тюменского индустриального университета, 2015. – С. 279–281.

21. Кожаев, Ю. П. Греческий математик Диофант и диофантовы уравнения : материалы IV Всероссийской научно – практической конференции «Культура и общество: история и современность» / Ю. П. Кожаев, Ю. О. Новицка – Ставрополь : АГРУС. – 2015. – С. 150–154.

22. Кожегельдинов, С. Ш. Некоторые элементы теории диофантовых уравнений в упражнениях и задачах : учеб. пособие / С. Ш. Кожегельдинов. – Семипалатинск : Семей, 2003. – 83 с.

23. Кордемский, Б. А. Этому виду задач более 1600 лет / Б. А. Кордемский // Квант. – 1973. – №4. – С. 38 – 41.

24. Корянов, А. Г. Задачи на целые числа (от учебных задач до олимпиадных) : пособие по решению заданий типа С6 / А. Г. Корянов, А. А. Прокофьев. – Брянск, Москва : Просвещение, 2012. – 66 с.

25. Котлярова, Е. А. Методические особенности проведения спецкурса по теме «Диофантовы уравнения» / Е. А. Котлярова, О. Д. Роженко // Обучение и воспитание: методика и практика. – 2015. – №20. – С. 62–65.

26. Кузнецова, Л. В. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс / Л. В. Кузнецова, Е. А. Бунимович, Б. П. Пигарев, С. Б. Суворова. – Москва : Дрофа, 2002. – 192 с.

27. Курбатова, Н. Н. Программа внеурочной деятельности по математике «Математика после уроков» / Н. Н. Курбатова // Молодой ученый. – 2016. – №16. – С. 343–351.

28. Лаппо, Л. Д. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Самостоятельная подготовка к ЕГЭ. Универсальные материалы с методическими рекомендациями, решениями и ответами : учебное пособие / Л. Д. Лаппо, М. А. Попов. – Москва : ЭКЗАМЕН, 2016. – 352 с.

29. Малинин, В. А. Подготовка учащихся 9-11 классов к математическим олимпиадам. Задачи с целыми числами : учеб. пособие / В. А. Малинин. – Нижний Новгород : Нижегор. гуманитар. центр, 2000. – 69 с.

30. Мамедяров, Д. М. Оригинальное решение одного уравнения / Д. М. Мамедяров // Естественные и математические науки в современном мире. – 2014. – №24. – С. 30–36.

31. Мельников, Р. А. Краткий обзор этапов развития диофантовых уравнений : материалы международной научно-практической конференции «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования» / Р. А. Мельников. – Рязань : издательство РГУ им. С. А. Есенина, 2016. – С. 429–435.

32. Московские математические олимпиады 1993 – 2005 г. : сборник заданий / Р.М. Федоров и др./ Под ред. В.М. Тихомирова. – Москва : МЦНМО, 2006. – 456 с.

33. Письмо Министерства образования и науки Российской Федерации «О методических рекомендациях по реализации элективных курсов» [Электронный ресурс] : федер. приказ от 04. 03. 2010 № 03–413 // Справочная правовая система «КонсультантПлюс». – Режим доступа: http://www.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc&base=EXP&n=505578#0.

34. Письмо Минобразования России «Об элективных курсах в системе профильного обучения на старшей ступени общего образования» [Электронный ресурс] : федер. приказ от 13.11.2003г. № 14–51–277/13 // Справочная правовая система «КонсультантПлюс». – Режим доступа: http://www.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc&base=EXP&n=450589#0.

35. Приказ Минобразования РФ «Об утверждении федерального базисного учебного плана и примерных учебных планов для образовательных учреждений Российской Федерации, реализующих программы общего образования» [Электронный ресурс] : федер. приказ от 09.03.2004 № 1312 (ред. от 01.02.2012) // Справочная правовая система «КонсультантПлюс». – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_47213/.

36. Петраков, И. С. Математические кружки в 8–10 классах / И. С. Петраков. – Москва : Просвещение. – 1987. – 135 с.

37. Рябухо, Е. Н. Формирование познавательной компетентности учащихся на факультативных занятиях по математике : материалы V Международной научно-практической конференции «Инновационные тенденции развития системы образования» / Е. Н. Рябухо, В. П. Батутина. – Чебоксары : ООО Центр научного сотрудничества «Интерактив плюс», 2016. – С. 57–61.

38. Савельев, А. Я. Решение задач С6 ЕГЭ по математике [Электронный ресурс] / А. Я. Савельев // Центр Москва – Подготовка к ЕГЭ. – 2015. – Режим доступа: http://egecentr.com/ege-po-matematike/zadachi-c-6-po-matematike-ege-2014-reshenie.

39. Садовничий, Ю. В. ЕГЭ 2017 по математике. Профильный уровень: задание 19. Решение задач и уравнений в целых числах / Ю. В. Садовичий. – Москва : ЭКЗАМЕН, 2017. – 129 с.

40. Симонов, Ф. Я. Система тренировочных задач и упражнений по математике / Ф. Я. Симонов, Д. С. Бакаев, А. Г. Экельман. – Москва : Просвещение, 2001. – 256 с.

41. Сканави, М. Н. 2500 задач по математике с решениями для поступающих в вузы / М. Н. Сканави, В. К. Егерев, В. В. Зайцев и др. – Москва : ОНИКС 21 век, Мир и образование, 2002. – 400 с.

42.Федеральный Закон «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс] : федер. закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ (с изменениями) // Справочная правовая система «КонсультантПлюс». – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/.

43. Фоминых, Ю. Ф. Диофантовы уравнения / Ю. Ф. Фоминых // Математика в школе. – 1996. – №6. – С. 15–21.

44. Хамов, Г. Г. Диофантовы уравнения как средство способствующее формированию мотивационно-ценностного компонента математического образования будущего учителя математики : материалы международной научной конференции «Теория и методика обучения и воспитания в России и за

рубежом» / Г. Г. Хамова Л. Н. Тимофеева. – Киров : Международный центр научно-исследовательских проектов, 2014. – С. 118–124.

45. Хамов, Г. Г. Использование теории многочленов для составления и решения диофантовых уравнений / Г. Г. Хамова, Л. Н. Тимофеева // Ярославский педагогический вестник, 2014. – Т. 2, №4. – С. 36–40.

46. Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике : учеб. пособие / И. Ф. Шарыгин. – Москва : Просвещение, 1987. – 113 с.

47. Шевкин, А. В. ЕГЭ задание С6 с решениями и ответами / А. В. Шевкин, Ю. О. Пукас. – Москва : ЭКЗАМЕН, 2012. – 62 с.

48. Яковлев, Г. Н. Всесоюзные математические олимпиады школьников / Г. Н. Яковлев. – Москва : Просвещение, 1992. – 100 с.

49. Яковлева, Е.Н. Элективный курс «Диофантовы уравнения» как предпрофильная подготовка учащихся 8-9 классов: материалы Международной научно-практической конференции «Концепции фундаментальных и прикладных научных исследований» / Е. Н. Яковлева, В.С. Яричина. – Казань : НИЦ АЭТЕРНА, 2017. – Т.4, С. 13–15.

50. Якушева, Н. Э. О диофантовых уравнениях / Н. Э. Якушева, С. В. Корнев // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. – 2015. – №3. – С. 189–192.

51. Яричина, В. С. Диофантовы уравнения : материалы международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образовании» / В. С. Яричина. – Барнаул : издательство Алтайского университета, 2014. – С. 1843–1845.

52. Яричина, В. С. Применение диофантовых уравнений при решении олимпиадных задач и задач С6 в ЕГЭ по математике : материалы VII Международной научно-методической конференции «Преподавание естественных наук (биологии, физики, химии), математики и информатики в вузе и школе» / В. С. Яричина. – Томск : издательство ФГБОУ ВПО ТГПУ, 2014. – С.59–63.

53. Ященко, И. В. ЕГЭ 2015. Математика. Задача 21. Арифметика и алгебра / И. В. Ященко, Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич – Москва : Издательство МЦНМО, 2015. – 102 с.

54. Ященко, И. В. ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 / И. В. Ященко. – Москва : Экзамен, 2016. – 157 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите в целых числах уравнение
   а. $127x - 52y + 1 = 0;$
   б. $107x + 84y = 1;$
   в. $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13;$
   г. $17x + 13y = 5;$
   д. $(x + y)(x - 2y) = 7;$
   е. $x^2 + 4xy + 13y^2 = 59;$
   ж. $x(x + 1) = 4y(y + 1);$
   з. $3x^2 + 1 = 5y;$
   и. $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y;$
   к. $3^x + 7 = 2^y;$
2. Решите в натуральных числах уравнение
   а. $x^2y^2 + x^2 + y^2 = 1969;$
   б. $xy(x + y) = 120;$
   в. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{239};$
   г. $x + y = x^2 - xy + y^2;$
   д. $3^x + 55 = y^2;$
   е. $2^x + 3^x + 4^x = y^2;$
   ж. $x^3 + 7y = y^3 + 7x;$
   з. $3x^2 + 12xy + 10y^2 = 2012;$
   и. $x^y = y^x;$
   к. $x^2 + 10xy - 5y^2 = 2012.$

3. Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна пяти.

4. Найдите три подряд идущих целых числа, сумма кубов которых равна кубу следующего за ними числа.

5. Докажите, что прямая $4x + 6y - 7 = 0$ не проходит через точки, обе координаты которых – целые числа.

6. Найдите все пары натуральных чисел, сумма которых равна их удвоенному произведению.

7. Найдите все пары натуральных чисел, которые являются решениями уравнения:

а) $x + y = 11$; б) $3x + 5y = 17$.

8. Учащиеся 9 класса выполняли тест, содержащий задания по алгебре и геометрии. За каждый верный ответ на алгебраический вопрос выставлялось 3 балла, а на геометрический – 4 балла. Ученик верно ответил на все вопросы теста и получил 100 баллов. Сколько в тесте было заданий по алгебре и сколько по геометрии?

9. Ученики начальной школы на уроке математики выкладывают из палочек пятиугольники и шестиугольники. Всего в наборе 100 палочек. Сколько пятиугольников и сколько шестиугольников можно выложить, чтобы использованными оказались все палочки?

10. На неделю учащимся 9 класса было предложено для решения два списка задач: по алгебре и по геометрии. За каждую правильно решенную задачу по алгебре выставлялось 4 балла, а по геометрии – 5 баллов. Николай за выполненную им работу получил 80 баллов. Сколько задач по алгебре и сколько по геометрии решил Николай, если известно, что в каждом списке было 15 задач?

11. Из двух рублевых и пятирублевых монет составлена сумма в 23 рубля. Сколько среди этих монет двухрублевых?

12. Решить уравнение на множестве целых чисел:

а) $7x + 11y = 69$; в) $5x + 29y = 39$;

б) $3x + 17y = 143$; г) $7x + 31y = 90$.

13. Представьте дробь в виде цепной дроби:

а) 7/11; б) 3/8; в) 9/5; г) 17/3.

14. Решить способом измельчения в целых числах уравнение:

а) $5x + 8y = 39$; б) $7x + 11y = 43$.

15. Найти целые решения уравнения $10x + 21y = 23$ с помощью алгоритма Евклида.

16. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x^2 - y^3 = 7, \\ z^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$ не имеет решений в целых числах.

17. Найти число, которое при делении на 3 дает остаток 2 , при делении на 5 – остаток 3, а при делении на 7 – остаток 2.

18. Найдите четыре таких различных целых числа, чтобы сумма любых двух из них была квадратом целого числа.

То есть, решите систему, состоящую из следующих уравнений:

$x + y = a^2$,

$x + z = b^2$,

$x + t = c^2$,

$y + z = d^2$,

$y + t = e^2$,

$z + t = f^2$.