Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
__________ / В.М. Левчук
«___» ____________ 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

СЕТИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТРИЧНОЙ СЕТЬЮ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ____________ / Я.Н. Нужин

Выпускник ____________ / П.С. Бадин

Красноярск 2017

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа по теме "Сети, ассоциированные с элементарной матричной сетью" содержит 18 страниц текста, 4 использованных источника.

КОММУТАТИВНОЕ КОЛЬЦО, ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СЕТЬ АДДИТИВНЫХ ПОДГРУПП, СЕТЕВАЯ ПОДГРУППА, ПРОИЗВОДНАЯ СЕТЬ, ПОЛНАЯ СЕТЬ, ДОПОЛНЯЕМАЯ СЕТЬ, ЗАМКНУТАЯ СЕТЬ

По элементарной сети σ аддитивных подгрупп коммутативного кольца K строятся две новые элементарные дополняемые сети. Они были впервые построены В. А. Койбаевым в 2010 году.

Цель работы - построение производных элементарных сетей над различными кольцами, рассмотрение гипотезы о стабилизации производной сети над полем, построение примера дополняемой сети Ω, содержащую исходную сеть σ, приведение примеров незамкнутой (не допустимой) сети и замкнутой (допустимой), но не дополняемой сети.

В результате исследований были построены примеры производных элементарных сетей и выдвинута гипотеза о стабилизации производной сети над полем.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

По элементарной сети σ аддитивных подгрупп коммутативного кольца K строятся две новые элементарные дополняемые сети ω и Ω, удовлетворяющие включению

$$\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega \tag{1}$$

Эти сети впервые были построены В. А. Койбаевым (Владикавказский мат.журнал, 2010 [1]). Они нашли свое применение в статье В. А. Койбаева и Я.Н. Нужина (Сибирский мат. журнал, 2017 [2]). В данной работе строятся примеры сетей, ассоциированные с элементарной сетью σ.

Целью работы является решение следующих задач:

1. Построение примеров производных элементарных сетей над различными кольцами.

2. Рассмотрение гипотезы о стабилизации производной сети над полем.

3. Построение примера дополняемой сети Ω, содержащую исходную сеть σ, как в (1).

4. Приведение примеров незамкнутой (не допустимой) сети, замкнутой (допустимой), но не дополняемой сети.

1 Обозначения и определения

Нам потребуются следующие стандартные обозначения и определения.

Далее K — коммутативное кольцо с единицей, $GL_n(K)$ — общая линейная группа (множество матриц с определителем, не равным нулю), $SL_n(K)$ — специальная линейная группа (множество матриц с определителем единица). Через

$$t_{ij}(u) = e + ue_{ij}, \quad i \neq j$$

обозначается элементарная трансвекция, где e — единичная матрица, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных позициях нули, элементарная подгруппа $E_n(K)$ — это подгруппа, порождённая трансвекциями

$$t_{ij}(u), \;\; u \in K, \;\; 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Определение 1.1. Набор $\sigma = \{\sigma_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ называется *полной сетью*, если:

$$\sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij}, \;\; 1 \leq i, j, k \leq n. \tag{2}$$

Множество

$$M_n(\sigma) = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \sigma_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\},$$

является кольцом, относительно обычных матричных операций сложения, умножения и называется *сетевым кольцом.* Мультипликативная система

$$S_n(\sigma) = E_n + M_n(\sigma),$$

есть полугруппа с единицей. Максимальная подгруппа из $S_n(\sigma)$ называется *общей сетевой подгруппой* и обозначается через $GL_n(\sigma)$, а её подгруппа матриц $SL_n(\sigma)$ с определителем единица называется *специальной сетевой подгруппой.*

Определение 1.2. *Элементарная сеть* — это набор $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, аддитивных подгрупп кольца K таких, что

$$\sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij},\ i \neq j \neq k,\ i,j,k = 1,...,n \tag{3}$$

для любой тройки попарно различных чисел *i,k,j*. Элементарную сеть удобно изображать следующей таблицей:

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & \sigma_{12} & \sigma_{13} & ... & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & * & \sigma_{23} & ... & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & * & ... & \sigma_{3n} \\ . & . & . & ... & . \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & ... & * \end{pmatrix} \tag{4}$$

Определение 1.3. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца R таблица (4) с диагональю $\sigma_{ii}, 1 \leq i \leq n$ является полной сетью.

Лемма 1.1. *(Критерий дополняемости [3]). Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ дополняема тогда и только тогда, когда*

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n. \tag{5}$$

Это дополнение можно получить, положив

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}. \triangleright \tag{6}$$

Определение 1.4. По элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ определяется *элементарная сетевая подгруппа*

$$E(\sigma) =< t_{ij}(\alpha) \mid \alpha \in \sigma_{ij}, 1 \leq i \neq j \leq n >$$

Для элементарной сети σ рассмотрим набор

$$\bar{\sigma}_{ij} = \{\alpha \in K \mid t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)\},\ i \neq j,\ i,j = 1,...,n.$$

Очевидно, что $\bar{\sigma}_{ij}$ - аддитивные подгруппы основного кольца K и в силу известного коммутаторного соотношения (для попарно различных *i,r,j*)

$$[t_{ir}(\alpha),\ t_{rj}(\beta)] = t_{ij}(\pm\alpha\beta)$$

мы имеем $\bar{\sigma}_{ir}\bar{\sigma}_{rj} \subseteq \bar{\sigma}_{ij}$, а потому набор $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{ij})$ является элементарной сетью.

Определение 1.5. Элементарная сеть σ называется *замкнутой* (в статье В. М. Левчука *допустимой*[4]), если её сетевая подгруппа не имеет новых корневых элементов, то есть $\sigma = \overline{\sigma}$.

2 Производная сеть $\omega = (\omega_{ij})$

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ - элементарная сеть порядка $n \geq 3$ над кольцом K. Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца K, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj}, \tag{7}$$

где, суммирование берется по всем k, отличным от i и j. В силу сетевого условия (2), для любой тройки попарно различных чисел i, r, j, мы имеем

$$\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \omega_{ij} \tag{8}$$

Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп $\omega_{ij}, i \neq j$, кольца K является элементарной сетью.

Определение 2.1. Элементарную сеть $\omega = (\omega_{ij})$ мы называем *производной элементарной сетью* для σ.

При $n = 2$ производная сеть не определяется.

Укажем явно производную элементарную сеть ω при n=3. Пусть,

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & * & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & * \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\omega_{12} = \sigma_{13}\sigma_{32},$$

$$\omega_{13} = \sigma_{12}\sigma_{23},$$

$$\omega_{21} = \sigma_{23}\sigma_{31},$$

$$\omega_{23} = \sigma_{21}\sigma_{13},$$

$$\omega_{31} = \sigma_{32}\sigma_{21},$$

$$\omega_{32} = \sigma_{31}\sigma_{12}$$

и производная сеть $\omega = (\omega_{ij})$ представляется таблицей

$$\omega = \begin{pmatrix} * & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & * & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & * \end{pmatrix}$$

Укажем три конкретных примера производных сетей.

Пусть $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. Тогда,

$$a)\ \text{Если}\ \sigma = \begin{pmatrix} * & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & * & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} & * \end{pmatrix},\ \text{то}\quad \omega = \begin{pmatrix} * & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix};$$

$$b)\ \text{Если}\ \sigma = \begin{pmatrix} * & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & * & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & * \end{pmatrix},\ \text{то}\quad \omega = \begin{pmatrix} * & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & * & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & * \end{pmatrix};$$

$$c)\ \text{Если}\ \sigma = \begin{pmatrix} * & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & * & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} & * \end{pmatrix},\ \text{то}\quad \omega = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Через $\sigma^{(1)}$ обозначим производную сеть от σ, через $\sigma^{(2)}$ — производную от $\sigma^{(1)}$, в общем случае $\sigma^{(i+1)}$ — производную от $\sigma^{(i)}$.

Определение 2.2. Будем говорить, что последовательность производных сетей $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, ...$ *стабилизируется*, когда существует такое k, что $\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)}$.

Пример 2.1. Найти производные сети $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, ...$ от элементарной сети σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & 2Z & 2Z \\ 2Z & * & 2Z \\ 2Z & 2Z & * \end{pmatrix}.$$

В старых обозначениях

$$\sigma^{(1)} = \omega = \begin{pmatrix} * & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & * & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & * \end{pmatrix}$$

По определению,

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} * & 4Z & 4Z \\ 4Z & * & 4Z \\ 4Z & 4Z & * \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} * & 16Z & 16Z \\ 16Z & * & 16Z \\ 16Z & 16Z & * \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sigma^{(k)} = \begin{pmatrix} * & 2^{2^n} & 2^{2^n} \\ 2^{2^n} & * & 2^{2^n} \\ 2^{2^n} & 2^{2^n} & * \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Пример 2.2. Найти производные сети $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, ...$ от элементарной сети σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & 2Z & 4Z \\ Z & * & 2Z \\ Z & Z & * \end{pmatrix}.$$

В старых обозначениях

$$\sigma^{(1)} = \omega = \begin{pmatrix} * & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & * & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & * \end{pmatrix}$$

По определению,

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} * & 4Z & 4Z \\ 2Z & * & 4Z \\ Z & 2Z & * \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} * & 8Z & 16Z \\ 4Z & * & 8Z \\ 4Z & 4Z & * \end{pmatrix}$$

....

....

....

$$\sigma^{(k)} = \begin{pmatrix} * & 2^{n+1} & 4^n \\ 2^n & * & 2^{n+1} \\ 4^n & 2^n & * \end{pmatrix}$$

....

....

....

В связи с примерами 1 и 2 возникает гипотеза 1.

Гипотеза 1. Если последовательность производных сетей $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, ...$ над полем стабилизируется, то она стабилизируется на первом шаге.

Определение 2.3. Назовем элементарную или полную сеть *константной*, если все ее аддитивные подгруппы σ_{ij} совпадают с некоторым подкольцом R основного кольца K.

Элементарную константную сеть можно изобразить следующей таблицей

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & R & R \\ R & * & R \\ R & R & * \end{pmatrix}$$

Следующая гипотеза является более сильным утверждением, чем гипотеза 1.

Гипотеза 2. Последовательность производных сетей $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, ...$ стабилизируется тогда и только тогда, когда все σ_{ij} совпадают с некоторым фиксированным подкольцом с единицей основного кольца, в частности, когда исходная элементарная сеть σ является константной.

3 Сеть Ω, ассоциированная с элементарной группой $E(\sigma)$

Пусть A,B - подгруппы аддитивной группы кольца R. Рассмотрим элементарную сеть σ_0 второго порядка

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} * & A \\ B & * \end{pmatrix}$$

Положим

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\beta)^k = AB + (AB)^2 + (AB)^3 + ...$$

Предложение 3.1. *Пусть A,B — подгруппы аддитивной группы кольца R. Положим*

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} * & A \\ B & * \end{pmatrix}, \quad E(\sigma_0) =< t_{21}(B), t_{12}(A) > .$$

Если

$$a \in E(\sigma_0), \qquad a = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix}, \textit{mo}$$

$$a_{11}, a_{22} \in \gamma, \quad a_{12} \in A + A_\gamma, \quad a_{21} \in B + B_\gamma.$$

Доказательство. Достаточно доказать (индукцией по $k \geq 1$) следующую формулу. Положим γ_0— нулевая подгруппа и

$$\gamma_k = AB + (AB)^2 + ... + (AB)^k, (k \geq 1).$$

Тогда имеет место формула

$$t_{21}(B) \cdot t_{12}(A)^k = \begin{pmatrix} 1 + \gamma_{k-1} & A + A_{\gamma k-1} \\ B + B_{\gamma k-1} & 1 + \gamma_k \end{pmatrix}, \quad (k \geq 1). \ \triangleright$$

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$— элементарная сеть над кольцом R порядка n. Для произвольных $i \neq j$ положим

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij},$$

где

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m.$$

Заметим, что ($i \neq j$)

$$\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij} \subseteq \Omega_{ij}.$$

Предложение 3.2. *a) Для любых попарно различных натуральных чисел i,r,j мы имеем*

$$\Omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}\Omega_{ij},$$

таким образом, таблица $\Omega = (\Omega_{ij})$ является элементарной сетью; b) Для любых $i \neq j$ справедливы включения

$$\Omega_{ij}\Omega_{ji}\Omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij},$$

следовательно, элементарная сеть $\Omega = \Omega_{ij}$ является дополняемой.

Доказательство. a) Пусть i,r,j — попарно различные натуральные числа. Заметим в начале, что

$$\sigma_{ir}(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s \subseteq \sigma_{ir}, \sigma_{rj}(\sigma_{ir}\sigma_{ri})^k \subseteq \sigma_{rj}.$$

(первое включение очевидно, второе следует из того, что $\sigma_{rj}(\sigma_{ri}\sigma_{ir}) = \sigma_{ir}(\sigma_{ir}\sigma_{rj}) \subseteq \sigma_{rj}$).

Поэтому

$$(\sigma_{ir} + \sigma_{ir}(\sigma_{ir}\sigma_{ri})^k(\sigma_{rj} + \sigma_{rj}(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s) = \sigma_{ir}\sigma_{rj} + \sigma_{ir}\sigma_{rj}(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s +$$

$$+(\sigma_{ir}\sigma_{rj})(\sigma_{ir}\sigma_{ri})^k(\sigma_{jr}\sigma_{rj})^s + (\sigma_{ir}\sigma_{ir})(\sigma_{ri})^k = \sigma_{ir}\sigma_{rj} +$$

$$+[\sigma_{ir}(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^s]\sigma_{rj} + [\sigma_{ir}(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^s][(\sigma_{ri}\sigma_{ir})^k\sigma_{rj}] + \sigma_{ir}[(\sigma_{ri}\sigma_{ir})^k\sigma_{rj}] \subseteq$$

$$\subseteq \sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij}.$$

б) Покажем справедливость включений пункта b). Действительно,

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^k(\sigma_{ji} + \sigma_{ji}(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^s)(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^p) \subseteq \sigma_{ij}(\sigma_{ij}\sigma_{ji}) +$$

$$+\sigma_{ij}(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^{p+1} + \sigma_{ij}(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^{s+1} + \sigma_{ij}(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^{p+s+1} + \sigma_{ij}(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^{k+1} +$$

$$+\sigma_{ij}(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^{p+k+1} + \sigma_{ij}(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^{k+s+1} + \sigma_{ij}(\sigma_{ij}\sigma_{jij})^{k+s+p+1} \subseteq \Omega_{ij}. \ \triangleright$$

Пример 3.1. Пусть $M = \frac{F}{x} + R_5$. Рассмотрим элементарную сеть σ по ней построим элементарную сеть Ω и дополним ее диагональю:

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & M & R_3 \\ M & * & R_3 \\ R_3 & R_3 & * \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \frac{F}{x^2} + \frac{F}{x^4} + R_6 & \frac{F}{x} + \frac{F}{x^3} + R_5 & R_3 \\ \frac{F}{x} + \frac{F}{x^3} + R_5 & \frac{F}{x^2} + \frac{F}{x^4} + R_6 & R_3 \\ R_3 & R_5 & R_6 \end{pmatrix}$$

Действительно, по определению $\Omega_{12} = \sigma_{12} + \sigma_{12}(\sigma_{12}\sigma_{21}) + \ldots = M + T^3 + M^5 + \ldots = \frac{F}{x} + \frac{F}{x^3} + R_5 = \Omega_{21}$. Далее, $\Omega_{23} = \sigma_{23} + \sigma_{23}(\sigma_{23}\sigma_{32}) + \ldots = R_3 = \Omega_{32}$. Аналогично, $\Omega_{13} = \Omega_{31} = R_3$. Теперь дополняем диагональ. По определению, очевидно, что $\Omega_{33} = \Omega_{13}\Omega_{31} + \Omega_{23}\Omega_{32} = R_6$. Наконец $\Omega_{11} = \Omega_{12}\Omega_{21} + \Omega_{13}\Omega_{31} = (\frac{F}{x} + \frac{F}{x^3} + R_5)(\frac{F}{x} + \frac{F}{x^3} + R_5) + R_6 = \frac{F}{x^2} + \frac{F}{x^4} + R_6 = \Omega_{22}$.

Определение 3.1. Сеть Ω мы назовем сетью, ассоциированной с элементарной группой $E(\sigma)$ для элементарной сети σ. Ясно, что $\sigma^{(1)} = \omega \le \Omega$ и (для недиагональных позиций) $\sigma^{(1)} = \omega \le \sigma \le \Omega$.

Лемма 3.3. *Для любых различных i, j положим $\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$, где суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Набор $\omega = (\omega_{ij})$ является элементарной дополняемой сетью.*

Доказательство. Элементарная сеть $\omega = \omega_\sigma$ является дополняемой, т.е. дополняется до полной сети. Другими словами, для любых $i \neq j$

$$\omega_{ij}\omega_{ji}\omega_{ij} \subseteq \omega_{ij},$$

где суммирование ведется по всем $k = 1, 2, \ldots, n, k \neq i$. Однако мы предлагаем другой (необходимый нам для дальнейшей работы с элементарными группами) способ дополнения элементарной сети *omega* до полной. Для любых $i \neq j$ положим (прямая сумма)

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{ji}\sigma_{ij}^{m}.$$

Тогда диагональные элементы ω_{ii}, $\quad 1 \le i \le n$, определим следующим образом:

$$\omega_{ii} = \sum_{k \ne s} (\gamma_{ik} \cap \gamma_{is} \cap \gamma_{ks}),$$

где суммирование ведется по всем $1 \le k \ne s \le n$ (ясно, что $k \ne i, s \ne i$).

Лемма 3.4. *Для любых различных i, j положим $\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij}$, где $\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m$. Набор $\Omega = (\Omega_{ij})$ является элементарной дополняемой сетью.*

Доказательство. Таблица $\Omega^{\sigma} = \Omega = \Omega_{ij}$ является элементарной сетью, причем дополняемой, т.е. справедливы включения

$$\Omega_{ij}\Omega_{ji}\Omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$$

для любых $i \ne j$. В силу (данного предложения) дополним элементарную сеть Ω до (полной) сети, положив

$$\Omega_{ii} = \sum_{k \ne i} (\Omega_{ik}\Omega_{ki}),$$

где суммирование берется по $k = 1, 2, ..., n, k \ne i$. Нетрудно видеть, что

$$\Omega_{ii} = \sum_{k=1, k \ne i} (\gamma_{ik}).$$

Лемма 3.5. *Пусть $\omega = (\omega_{ij})$ и $\Omega = (\Omega_{ij})$ такие, как и в леммах 1 и 2. Тогда $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ и, кроме того, справедливы включения $\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$ и $\Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$ для $i \ne j$, $1 \le i, j, r \le n$.*

4 Примеры сетей

Пусть F— произвольное поле. Рассмотрим *F(x)* рациональных функций $\frac{f}{g}, f, g \in F[x]$, с коэффициентами из F. Введем в рассмотрение кольцо

$$R = R_4 = \frac{f}{g} \in F(x) : degg - degf \geq 4,$$

и подгруппы

$$A = \frac{F}{x} + F + R, \quad A_1 = \frac{F}{x_2} + F + R, \quad B = \frac{F}{x} + R.$$

Пример незамкнутой (не допустимой) сети.

Определим элементарную сеть $\rho = (\rho_{ij})$ *n-го* порядка над *F(x)* следующим образом: $\sigma_{12} = A, \sigma_{21} = A_1$ и $\sigma_{ij} = R$ для всех остальных $i \neq j$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & A & R & ... & R \\ A_1 & * & R & ... & R \\ R & R & * & ... & R \\ . & . & . & ... & . \\ R & R & R & ... & * \end{pmatrix}$$

Так как $RA \subseteq R, RA_1 \subseteq R, R^2 \subset R \subset A, R^2 \subset A_1$, то σ— элементарная сеть. Далее, $\frac{1}{x^3} \in (AA_1A) \backslash A$, следовательно, $AA_1A \nsubseteq A$, а потому элементарная сеть ρ не является дополняемой. Сеть σ не является замкнутой (допустимой). Действительно, положим $b = t_{12}\frac{1}{x}t_{21}(1)t_{12}(-1)$. Тогда

$$b = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{x} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 + \frac{1}{x} \end{pmatrix}, \quad b^{-1}t_{12}(\frac{1}{x})b = t_{21}(-\frac{1}{x}),$$

поэтому $t_{21}(-\frac{1}{x}) \in E(\sigma)$, откуда $\frac{1}{x} \in (\bar{\sigma})_{21}$, но $\frac{1}{x}$ не содержится в группе $A_1 = \sigma_{21}$. Поэтому $\sigma \neq \bar{\sigma}$, то есть σ не является замкнутой.

Пример замкнутой (допустимой), но не дополняемой сети.

Пусть $F = \mathbb{F}_2$—поле из двух элементов, $K = \mathbb{F}_2(x), B = \frac{F}{x} + R$. Определим элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})n$-го порядка в поле $\mathbb{F}_2(x)$ следующим образом: $\sigma_{12} = \sigma_{21} = B = \frac{F}{x} + R$ и $\sigma_{ij} = R = R_4$ для всех остальных $i \neq j$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & B & R & ... & R \\ B & * & R & ... & R \\ R & R & * & ... & R \\ . & . & . & ... & . \\ R & R & R & ... & * \end{pmatrix}$$

Так как $RB \subseteq R, R^2 \subset R \subset B$, то σ— элементарная сеть.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе получены следующие результаты:

1. Построены различные примеры производных элементарных сетей. На основе этих примеров были выдвинуты две гипотезы о стабилизации производной сети над полем.

2. Построен пример дополняемой сети Ω, содержащую исходную сеть σ.

3. Приведены примеры незамкнутой (не допустимой) сети и замкнутой (допустимой), но не дополняемой сети.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Койбаев, В. А. Сети, ассоциированные с элементарными сетями./ В. А. Койбаев//— Владикавказ: Владикавказский матем. журн. — 2010 — Т. 12, № 4. — С. 39—43.

2 Койбаев, В. А., Нужин, Я. Н. k-инвариантные сети над алгебраическим расширением поля k./ В. А. Койбаев, Нужин Я.Н.// Сибирский матем. журн. — 2017 — Т. 58, № 1. — С. 143—147

3 Койбаев, В. А. Элементарные сети в линейных группах/ В. А. Койбаев.// Труды ИММ УрО РАН.— Ижевск — 2011.—Т. 17, № 4.— С. 134—141.

4 Левчук, В. М. Параболические подгруппы некоторых ABA-групп. / В. М. Левчук // Матем. заметки.—Красноярск — 1982.—Т. 31, № 4.—С. 509—525.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ / В.М. Левчук
«14» 06 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

СЕТИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТРИЧНОЙ СЕТЬЮ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор _______ / Я.Н. Нужин
14.06.2017 г.

Выпускник _______ / П.С. Бадин
14.06.2017 г.

Красноярск 2017