Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_________ / В.М. Левчук
«___» ________2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРУППЫ ПО НИЖНЕМУ СЛОЮ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ____________/ В.И. Сенашов

Выпускник ____________/ И.А. Паращук

Красноярск 2017

РЕФЕРАТ

Дипломная работа по теме «Восстановление группы по нижнему слою» содержит 18 страниц текста, 18 использованных источников.

ГРУППА, АБЕЛЕВА ГРУППА, НИЖНИЙ СЛОЙ, ПОРЯДОК ЭЛЕМЕНТА, ПОЛНАЯ ГРУППА, ЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА, КВАЗИЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА, ЦЕНТР ГРУППЫ, СЛОЙНО КОНЕЧНАЯ ГРУППА.

Цель работы – найти условия, при которых группу можно восстановить по нижнему слою.

В результате исследований доказаны теоремы о восстановлении групп по заданному нижнему слою и теоремы об однозначном восстановлении групп по нижнему слою.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория групп – раздел абстрактной алгебры, изучающий алгебраические структуры, называемые группами, и их свойства.

У теории групп три исторических корня: теория алгебраических уравнений, теория чисел и геометрия. Математики, стоящие у истоков теории групп, – это Леонард Эйлер, Карл Фридрих Гаусс, Жозеф Луи Лагранж, Нильс Хенрик Абель и Эварист Галуа. Галуа был первым математиком, связавшим теорию групп, с другой ветвью абстрактной алгебры – теорией полей, разработав теорию, ныне называемую теорией Галуа.

Одной из первых задач, приведших к возникновению теории групп, была задача получения уравнения степени m, которое имело бы корнями m корней данного уравнения степени n ($m < n$). Эту задачу в простых случаях рассмотрел Иоганн Худде (1659 г.). В 1740 г. Николас Сондерсон заметил, что нахождение квадратичных множителей биквадратных выражений сводится к решению уравнения 6 степени, а Ле Сёр (1748 г.) и Эдвард Вейринг (с 1762 по 1782 гг.) развили эту идею.

Общую основу для теории уравнений, строящуюся на теории перестановок, в 1770 – 1771 гг. нашёл Лагранж, и на этой почве в дальнейшем выросла теория подстановок. Он обнаружил, что корни всех резольвент, с которыми он сталкивался, являются рациональными функциями от корней соответствующих уравнений.

Мы будем изучать слойно конечные группы.

Группа называется слойно конечной, если она имеет конечное число элементов каждого порядка.

Это понятие впервые было введено С. Н. Черниковым в работе [1]. Оно появилось в связи с изучением бесконечных локально конечных p-групп в случае, когда центр группы имеет конечный индекс в ней. С. Н. Черников в 1948 году [2] описал строение произвольной группы, в которой бесконечно множество элементов каждого порядка, и в этой работе появился термин слойно конечных групп. Основной результат, описывающий строение слойно конечных групп был получен С. Н. Черниковым в 1948 г. в работе [2]. В нем говорится, что группа тогда и только тогда слойно конечна, когда ее можно представить в виде произведения двух поэлементно перестановочных подгрупп, из которых первая является слойно конечной полной абелевой группой, а вторая – слойно конечной группой с конечными силовскими подгруппами.

Слойно конечные группы исследовали С. Н. Черников [1–5], Р. Бэр [6], Х. Х. Мухамеджан [7,8], Я. Д. Половицкий [9,10]. Теория таких групп в развернутом виде изложена в монографиях [10,11]. Также привел результаты по данному исследованию В. И. Сенашов [12,13] и др.

Как указал С. Н. Черников в математической энциклопедии [14], слойно конечные группы оказались наиболее изученными среди групп с конечными классами сопряженных элементов.

В работе устанавливаются и доказываются результаты о восстановлении по нижнему слою группы информации на ее верхних слоях.

Объектом исследования служит класс бесконечных групп. Целью бакалаврской работы является найти условия, при которых группу можно восстановить по нижнему слою.

В. П. Шунков доказал, что 2-группа, обладающая только одной инволюцией, является либо локально циклической группой (циклической либо квазициклической), либо обобщенной группой кватернионов (конечной или бесконечной) [15].

Теорема Шункова является примером восстановления свойств группы по нижнему слою.

В книге Холла [16] доказана теорема, что конечная p-группа, содержащая только одну подгруппу порядка p, является циклической или обобщенной группой кватернионов.

Не всегда группа однозначно восстанавливается по нижнему слою.

Пример неоднозначного восстановления: в группах $C_{p^\infty} \times C_q$, $C_{q^\infty} \times C_p$ одинаковый нижний слой. Нижний слой в этих группах состоит из *p-1* элемента порядка *p* и *q-1* элемента порядка *q*. Далее в работе будет исследоваться однозначное восстановление группы по нижнему слою.

Остановимся более подробно на содержании бакалаврской работы.

Работа состоит из трех разделов.

В первом разделе устанавливаются результаты о восстановлении групп по заданному нижнему слою. Приведены результаты восстановления групп по нижнему слою, состоящему из элементов простого порядка, затем из элементов двух простых порядков и, наконец, из произвольного заданного множества элементов простых порядков.

Во втором разделе доказываются теоремы об однозначном восстановлении групп по нижнему слою. В нем рассмотрены различные условия на группы, с помощью которых группа однозначно восстанавливается.

Для удобства читателя имеется специальный третий раздел с определениями специальных терминов и известными результатами, на которые приводятся ссылки при доказательствах теорем.

1 Восстановление группы по заданному нижнему слою

В этом разделе мы рассмотрим восстановление группы по заданному нижнему слою. Сначала докажем теорему о восстановлении группы по заданному нижнему слою, состоящему из элементов простого порядка *p*.

Теорема 1. *Пусть G – полная группа, в которой существует слойно конечная подгруппа S в центре G такая, что G/S – слойно конечная группа. Если в нижнем слое группы G p^n-1 элемент порядка p, то G – прямое произведение n квазициклических p-групп.*

Доказательство. Пусть группа *G* удовлетворяет условиям теоремы. Так как в центре *G* существует слойно конечная подгруппа *S* такая, что *G/S* – слойно конечная группа, то по предложению 1 группа *G* слойно конечна. Поскольку по предложению 4 каждая полная подгруппа слойно конечной группы *G* содержится в центре группы *G*, то т.к. *G* – полная, то она является абелевой. По предложению 2 полная абелева группа *G* разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел или квазициклическим группам, быть может, по различным простым числам. В этом разложении групп рациональных чисел быть не может, поскольку *G* – слойно конечная группа и поэтому в ней нет элементов бесконечного порядка. Т.к. на нижнем слое группы *G* только элементы порядка *p*, то квазициклические группы C_{p^∞} могут быть только по одному числу *p*. У прямого произведения *n* квазициклических *p*-групп p^n-1 элемент порядка *p*. Т.к. в нижнем слое группы *G* p^n-1 элемент порядка *p*, то этих множителей *n* штук. Теорема доказана.

Для доказательства следующей теоремы напомним, что если порядки всех элементов группы конечны, то группа называется периодической.

Теорема 2. *Пусть G – полная группа, в которой Z(G) слойно конечен и G/Z(G) – периодическая группа, содержащая для каждого простого p только* *конечное число p-элементов. Если в нижнем слое группы G p^n-1 элемент порядка p, то G – прямое произведение n квазициклических p-групп.*

Доказательство. Пусть группа *G* удовлетворяет условиям теоремы. Так как *Z(G)* слойно конечен и *G/Z(G)* – периодическая группа, содержащая для каждого простого *p* только конечное число *p*-элементов, то по предложению 1 группа *G* слойно конечна. Повторяя дальше заключительную часть доказательства теоремы 1, получим доказательство теоремы. Теорема доказана.

Докажем теорему о восстановлении группы по заданному нижнему слою, состоящему из элементов простых порядков *p*, *q*.

Теорема 3. *Пусть G – полная группа, в которой существует слойно конечная подгруппа S в центре G такая, что G/S – слойно конечная группа. Если в нижнем слое группы G p^n-1 элемент порядка p, q^m-1 элемент порядка q, то G – прямое произведение n квазициклических p-групп и m квазициклических q-групп.*

Доказательство. Пусть группа *G* удовлетворяет условиям теоремы. Так как в центре *G* существует слойно конечная подгруппа *S* такая, что *G/S* – слойно конечная группа, то по предложению 1 группа *G* слойно конечна. Поскольку по предложению 4 каждая полная подгруппа слойно конечной группы *G* содержится в центре группы *G*, то т.к. группа *G* – полная, то она является абелевой. По предложению 2 полная абелева группа *G* разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел или квазициклическим группам, быть может по различным простым числам. В этом разложении групп рациональных чисел быть не может, поскольку *G* – слойно конечная группа и поэтому в ней нет элементов бесконечного порядка. Т.к. на нижнем слое группы *G* p^n-1 элемент порядка *p* и q^m-1 элемент порядка *q,* то квазициклические группы C_{p^∞} и C_{q^∞} могут быть только по простым числам *p, q*. Т.к. в нижнем слое группы G p^n-1 элемент порядка p, q^m-1 элемент порядка q, то этих множителей n и m соответственно. Теорема доказана.

В следующей теореме рассмотрим восстановление группы по заданному нижнему слою, состоящему из элементов простых порядков p_1, p_2, … , p_n.

Теорема 4. *Пусть G – полная группа, в которой существует слойно конечная подгруппа S в центре G такая, что G/S – слойно конечная группа. Если в нижнем слое группы G $p_1^{m_1}-1$ элемент порядка p_1, $p_2^{m_2}-1$ элемент порядка p_2, ... , $p_n^{m_n}-1$ элемент порядка p_n, то G – прямое произведение m_1 квазициклических p_1-групп, m_2 квазициклических p_2-групп, ... , m_n квазициклических p_n-групп.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Так как существует в центре G слойно конечная подгруппа S такая, что G/S – слойно конечная группа, то по предложению 1 группа G слойно конечна. Поскольку по предложению 4 каждая полная подгруппа слойно конечной группы G содержится в центре группы G, то т.к. группа G – полная, то она является абелевой. По предложению 2 полная абелева группа G разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел или квазициклическим группам, быть может по различным простым числам. В этом разложении групп рациональных чисел быть не может, поскольку G – слойно конечная группа и поэтому в ней нет элементов бесконечного порядка. Т.к. на нижнем слое группы G $p_1^{m_1}-1$ элемент порядка p_1, $p_2^{m_2}-1$ элемент порядка p_2 , … , $p_n^{m_n}-1$ элемент порядка p_n , то квазициклические группы $C_{p_1^\infty}$, $C_{p_2^\infty}$, … , $C_{p_n^\infty}$ могут быть по разным простым числам p_1, p_2, … , p_n. У квазициклических p_1, p_2, … , p_n – групп $p_1^{m_1}-1$ элемент порядка p_1, $p_2^{m_2}-1$ элемент порядка p_2, … , $p_n^{m_n}-1$ элемент порядка p_n. Т.к. в нижнем слое группы G

$p_1^{m_1}-1$ элемент порядка p_1, $p_2^{m_2}-1$ элемент порядка p_2, … , $p_n^{m_n}-1$ элемент порядка p_n, то этих множителей m_1, m_2, … , m_n штук соответственно. Теорема доказана.

2 Однозначное восстановление группы по нижнему слою

В этом разделе исследуются однозначные восстановления групп по нижнему слою.

Теорема 5. *Пусть G – полная группа, в которой существует слойно конечная подгруппа S в центре $Z(G)$ такая, что G/S – слойно конечная группа. Тогда группа G однозначно восстанавливается по нижнему слою.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Так как существует слойно конечная подгруппа S в центре G такая, что G/S – слойно конечная группа, то по предложению 1 группа G слойно конечна. Поскольку по предложению 4 каждая полная подгруппа слойно конечной группы G содержится в центре группы G, то т.к. группа G – полная, то она является абелевой. По предложению 2 полная абелева группа G разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел или квазициклическим группам, быть может по различным простым числам. В этом разложении групп рациональных чисел быть не может, поскольку G – слойно конечная группа и поэтому в ней нет элементов бесконечного порядка. Т.е. G разлагается в прямую сумму квазициклических p-групп, а такая группа однозначно восстанавливается по нижнему слою. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть G – полная слойно конечная группа, тогда она однозначно восстанавливается по нижнему слою.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. По предложению 4 каждая полная подгруппа слойно конечной группы G содержится в центре группы G, то т.к. группа G – полная, то она является абелевой. Повторяя дальше заключительную часть теоремы 5, получим доказательство теоремы. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть G – p-группа, в которой $Z(G)$ слойно конечен и фактор группа $G/Z(G)$ конечна. Тогда группа G однозначно восстанавливается по нижнему слою.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Т.к. G – p-группа, в которой $Z(G)$ слойно конечен и фактор группа $G/Z(G)$ конечна, то по предложению 7 группа G слойно конечна. По теореме 6 получаем доказательство теоремы. Теорема доказана.

Перед следующей теоремой напомним, что группа, обладающая центральными рядами, называется нильпотентной.

Теорема 8. *Пусть G – полная нильпотентная p-группа с конечным нижним слоем. Тогда группа G однозначно восстанавливается по нижнему слою.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Так как G – полная нильпотентная p-группа с конечным нижним слоем, то по предложению 3 группа G является слойно конечной. По теореме 6 получаем доказательство теоремы. Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть G – полная группа, в которой $Z(G)$ слойно конечен и $G/Z(G)$ – периодическая группа, содержащая для каждого простого p только конечное число p-элементов. Тогда группа G однозначно восстанавливается по нижнему слою.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Так как $Z(G)$ слойно конечен и $G/Z(G)$ – периодическая группа, содержащая для каждого простого p только конечное число p-элементов, то по предложению 1 группа G слойно конечна. По теореме 6 получаем доказательство теоремы. Теорема доказана.

Напомним, что тонкими слойно конечными группами называются такие слойно конечные группы, в которых все силовские примарные подгруппы конечны.

Теорема 10. *Пусть G – группа, в которой центр содержит такую полную слойно конечную подгруппу R, что фактор группа G/R – тонкая слойно конечная группа. Тогда группа G однозначно восстанавливается по нижнему слою.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Т.к. G – группа, в которой центр содержит такую полную слойно конечную подгруппу R, что фактор группа G/R – тонкая слойно конечная группа, то по предложению 8 группа G является слойно конечной. По теореме 6 получаем доказательство теоремы. Теорема доказана.

Для доказательства следующей теоремы введем определение силовской p-подгруппы. Максимальные p-подгруппы групп называются силовскими p-подгруппами.

Теорема 11. *Пусть G – группа, в которой выполняются условия:*

а) G – периодическая группа;

б) для каждого простого числа p существует только конечное число силовских p-подгрупп;

в) для каждого простого числа p существует, по крайней мере одна силовская p-подгруппа в G, которая является слойно конечной группой.

Тогда группа однозначно восстанавливается по нижнему слою.

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Т.к. G – группа, в которой выполняются условия: G – периодическая группа, для каждого простого числа p существует только конечное число силовских p-подгрупп, для каждого простого числа p существует, по крайней мере одна силовская p-подгруппа в G, которая является слойно конечной группой, то по предложению 9 группа G является слойно конечной. Тогда по теореме 6 получим доказательство теоремы.

3 Определения, известные результаты

Приведем известные результаты, на них в работе будем ссылаться, как на предложения с соответствующим номером.

Предложение 1. (*Р. Бэр* [6]). *Следующие свойства эквивалентны;*

а) G – слойно конечная группа;

б) Z(G) слойно конечен и G/Z(G) – периодическая группа, содержащая для каждого простого p только конечное число p-элементов;

в) существует подгруппа S в центре G такая, что S и G/S – слойно конечные группы [6].

Предложение 2. (М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков [17]). *Полная группа является прямым слагаемым любой содержащей её абелевой группы G. Полная абелева группа G разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел или квазициклическим группам, быть может по различным простым числам* [17].

Предложение 3. (С. Н. Черников [3]). *Если нильпотентная p-группа G содержит лишь конечное множество элементов, какого-нибудь отличного от единицы порядка, то она слойно конечна* [3].

Предложение 4. (С. Н. Черников [5]). *Каждая полная подгруппа локально нормальной (в частности, слойно конечной) группы G содержится в центре группы G* [5].

Предложение 5. (Теорема Шункова [15]). *2-группа, обладающая только одной инволюцией, является либо локально циклической группой (циклической либо квазициклической), либо обобщенной группой кватернионов (конечной или бесконечной)* [15].

Предложение 6. (Теорема 12.5.2 из [16]). *Конечная p-группа, содержащая только одну подгруппу порядка p, является циклической или обобщенной группой кватернионов* [16].

Предложение 7. (Р. Бэр [6]). *p-группа G слойно конечна тогда и только тогда, когда Z(G) слойно конечен и фактор группа G/Z(G) конечна* [6].

Предложение 8. (С. Н. Черников [2]). *Группа G тогда и только тогда слойно конечна, когда ее центр содержит такую полную слойно конечную подгруппу R, что фактор группа G/R – тонкая слойно конечная группа* [2].

Предложение 9. (*Р. Бэр* [6]). *Группа G является слойно конечной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

а) G – периодическая группа;

б) для каждого простого числа p существует только конечное число силовских p-подгрупп;

в) для каждого простого числа p существует, по крайней мере одна силовская p-подгруппа в G, которая является слойно конечной группой [6].

Напомним некоторые определения, используемые в работе.

Определение. *Группа G называется абелевой (коммутативной), если ab=ba для всех* $a, b \in G$ [17].

Определение. *Группа G называется полной или делимой, если для всякого целого числа n>0 и любого элемента* $g \in G$ *уравнение* $nx = g$ *имеет в группе G хотя бы одно решение* [17].

Определение. *Центром Z(G) группы G называется множество элементов* $\langle x \in G \mid xg = gx, \forall g \in G \rangle$, *т.е. перестановочен с каждым элементом из G* [16].

Определение. *Порядком элемента a группы G называют наименьшее целое число* $m > 0$, *такое что* $a^m = e$ [16].

Определение. *Если порядки всех элементов группы конечны, то группа называется периодической* [18].

Определение. *Периодическая группа, порядки элементов которой являются степенями числа p, называется p-группой* [17].

Определение. *Подгруппа <a>, порожденная одним элементом a, называется циклической* [17].

Определение. *Нижний слой – множество элементов простых порядков.*

Определение. *Максимальные p-подгруппы конечных (а часто и бесконечных) групп называются силовскими p-подгруппами* [17].

Определение. *Обобщенная группа кватернионов – группа, порожденная элементами a, b, с определяющими соотношениями* $a^{2^{(n-1)}}=1$, $b^2=a^{2^{(n-2)}}$, $ba=a^{-1}b$; $n\geq 3$ [16].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. Доказаны результаты о восстановлении групп по заданному нижнему слою, состоящему из элементов простого порядка p, затем из элементов двух простых порядков p, q и, наконец, из произвольного заданного множества элементов простых порядков p_1, p_2, … , p_n.

2. Получены результаты однозначного восстановления групп по нижнему слою.

Полученные результаты могут быть использованы в учебном процессе при изучении курса теории групп.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Черников, С. Н. К теории бесконечных специальных *p*-групп / С. Н. Черников // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 50, №1. – С. 71-74.
2. Черников, С. Н. Бесконечные слойно конечные группы / С. Н. Черников // Мат. сб. – 1948. – Т. 22, №1. – С. 101-133.
3. Черников, С. Н. О специальных *p*-группах / С. Н. Черников // Мат. сб. – 1950. – Т. 27, №2. – С. 185-200.
4. Черников, С. Н. О группах с конечными классами сопряженных элементов / С. Н. Черников // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114, №6. – С. 1177-1179.
5. Черников, С. Н. О слойно конечных группах / С. Н. Черников // Мат. сб. – 1958. – Т. 45, №3. – С. 415-416.
6. Baer, R. Finiteness properties of groups / R. Baer // Duke Math. J. – 1948. – Vol. 15, №4. – P. 1021-1032.
7. Мухаммеджан, Х. Х. О группах с возрастающим центральным рядом / Х. Х. Мухаммеджан // Мат. сб. – 1951. – Т. 28, №1. – С. 185-196.
8. Мухаммеджан, Х. Х. О группах обладающих, разрешимым возрастающим инвариантным рядом / Х. Х. Мухаммеджан // Мат. сб. – 1956. – Т. 39, №2. – С. 201-218.
9. Половицкий, Я. Д. Слойно экстремальные группы / Я. Д. Половицкий // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 134, № 3. – С. 533-535.
10. Половицкий, Я. Д. О локально экстремальных и слойно экстремальных группах / Я. Д. Половицкий // Мат. сб. – 1962. – Т. 58, №2. – С. 685-694.
11. Черников, С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп : учебник / С. Н. Черников. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 384 с.
12. Сенашов, В. И. Характеризация слойно конечных групп / В. И. Сенашов // Алгебра и логика. – 1989. – Т. 28, № 6. – С. 687-704.

13. Сенашов, В. И. Слойно конечные группы : монография / В. И. Сенашов. – Новосибирск : ВО Наука, 1993. – 158 с.
14. Математическая энциклопедия. / И. М. Виноградов [и др.]. – Т.1. – Москва : Советская энциклопедия, 1977. – 1152 с.
15. Шунков, В. П. Об одном классе *p*-групп / В. П. Шунков // Алгебра и логика. – 1970. – Т. 9, №4. – С. 484-496.
16. Холл, М. Теория групп : учебное пособие для вузов / М. Холл. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1962. – 467 с.
17. Каргаполов, М. И. Основы теории групп : учебное пособие для вузов / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков ; под общ. ред. Ф. И. Кизнера ; Главная редакция физико-математической литературы. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – Москва : 1982. – 288 с.
18. Сенашов, В. И. Взаимоотношения почти слойно конечных групп с близкими классами / В. И. Сенашов // Вестник СибГАУ. – 2014. – №1. – С. 76-79.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ / В.М. Левчук
«14» 06 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРУППЫ ПО НИЖНЕМУ СЛОЮ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ________ / В.И. Сенашов
14.06.2017

Выпускник ________ / И.А. Паращук
14.06.2017

Красноярск 2017