Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_________ / В.М. Левчук
«___» ________2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

О ЧИСЛЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ КОРНЕЙ СУММАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ____________/ С.Г. Колесников

Выпускник ____________/ И.Е. Зыков

Красноярск 2017

РЕФЕРАТ

Дипломная работа по теме «О числе представлений элементов систем корней суммами специального вида» содержит 21 страницу текста,1 рисунок, 7 таблиц, 5 использованных источников.

Цель работы – найти число представлений произвольного корня r системы корней Ф типа G_2 или F_4 в виде суммы корня s и фундаментальных корней, таких, что всякий начальный отрезок суммы является корнем, и вычислить числа $K_{r,s}$ и $M_{r,s}$.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известна (см, например ,[3], стр. 181) формула возведения в целую положительную степень Жордановой клетки порядка nxn

$$A = \begin{pmatrix} \rho & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \rho \end{pmatrix},$$

которая при $\rho = 1$ имеет следующий вид

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \binom{m}{n-1} \\ \vdots & \ddots & \binom{m}{n-2} \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

здесь $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ – биномиальный коэффициент.

В работе [2] рассматривалась задача нахождения аналогичных формул для возведения в натуральную степень элементов групп Шевалле вида

$$A = x_{r_1}(1) \dots x_{r_k}(1),$$

где $r_1, \dots, r_k \subseteq \Pi(\Phi)$. Для этого использовалась собирательная формула Холла, которая сводит вычисление степени A к вычислению различных коммутаторов от $x_{r_1}(1) \dots x_{r_k}(1)$ и их степеней. В [2] была доказана,

Теорема 1. *Пусть* R *– ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей 1;* Φ – приведенная *неразложимая система корней;* $\theta \in R$, $s \in \Phi^+$, $\Delta = \{r_1, \dots, r_k\} \subseteq \Pi$.

Положим $A = x_{r_k}(1) \dots x_{r_1}(1), B = x_s(\theta)$. *Тогда для любого натурального t имеем*

$$[B,\ {}_tA] = \prod_{r \in \Omega_{s,t}^{\Delta}} x_r\left(\theta K_{r,s}^{\Delta}\right) \left(mod\ U_{ht(s)+t+1}\right).$$

Здесь и далее произведение по пустому множеству индексов считаем равным единице.

В бакалаврской работе вычисляются константы $K_{r,s}^{\Delta}$, возникшие в теореме 1 для типов G_2 и F_4 .

1 Основные понятия, определения и теоремы

Всюду в этом параграфе: Φ – приведенная неразложимая система корней, Φ^+ и Φ^-, соответственно, подсистемы положительных и отрицательных корней, $\Pi = \Pi(\Phi)$ –подсистема фундаментальных корней.

Определение 1. *Пусть* $r, s \in \Phi$ и $\Delta \subseteq \Pi$, $\Delta \neq \emptyset$. *Если существует семейство фундаментальных корней* $q_1, \dots, q_t \in \Delta$ *такое , что*

$$r = s + q_1 + \dots + q_t$$

и для любого целого $i, 1 \leq i \leq t-1$, *сумма* $s + q_1 + \dots + q_i$ *является корнем, то разложение (1) будем называть* s*-разложением корня* r *относительно* Δ. *Число* s*-разложений корня* r *обозначим через* $M_{r,s}$.

Множество $S^{\Delta}_{r,s}$ считаем пустым, если s-разложений r относительно Δ не существует. Определим число $K^{\Delta}_{r,s}$, полагая $K^{\Delta}_{r,s} = 0$, если $S^{\Delta}_{r,s} = \emptyset$, иначе считаем по формуле

$$K^{\Delta}_{r,s} = \sum_{(q_1,\dots,q_t)\in S^{\Delta}_{r,s}} N_{s,q1} N_{s+q_1,q_2} \dots N_{s+q_1+\dots+q_{t-1},q_t}. \quad (1)$$

Если $\Delta = \Pi$, то $K^{\Delta}_{r,s} = K_{r,s}$. Следующая теорема показывает как связаны константы $K^{\Delta}_{r,s}$ и $K^{\Delta}_{-s,-r}$.

Теорема 2. *Для произвольного* $\Delta \subseteq \Pi(\Phi)$ *и любых* $r, s \in \Phi$ *имеет место равенство*

$$K^{\Delta}_{r,s} = (-1)^{ht(r)-ht(s)} \frac{|r|^2}{|s|^2} K^{\Delta}_{-s,-r}.$$

Таким образом, из теоремы 2 следует, что достаточно вычислить константы $K^{\Delta}_{r,s}$ для положительных r, s.

2 Числа $M_{r,s}$ и $K^{\Delta}_{r,s}$ для типа G_2

В трехмерном евклидовом пространстве с ортонормированной базой $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ выберем два вектора

$$a = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ \ b = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Тогда множество векторов

$$-3a - 2b, -3a - b, -2a - b, -a - b, -a, -b, a, b, 2a + b, 3a + b, 3a + 2b$$

образуют систему корней типа G_2, а корни

$$a, b, 2a + b, 3a + b, 3a + 2b$$

-её подсистему положительных корней. Корни a и bобразуют фундаментальную систему корней.

Структурные константы $N_{r,s}$ алгебры Ли типа G_2 , указанные в следующей таблице:

Таблица 1. Структурные константы $N_{r,s}$ алгебры Ли типа G_2.

$N_{r,s}$	a	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$3a+2b$
a		ϵ_1	$2\epsilon_2$	$3\epsilon_3$		
b	$-\epsilon_1$				ϵ_4	
$a+b$	$-2\epsilon_2$			$-3\epsilon_5$		
$2a+b$	$-3\epsilon_3$		$3\epsilon_5$			
$3a+b$		$-\epsilon_4$				
$3a+2b$						
$N_{r,s}$	$-a$	$-b$	$-a-b$	$-2a-b$	$-3a-b$	$-3a-2b$
$-a$		$-\epsilon_1$	$-2\epsilon_2$	$-3\epsilon_3$		
$-b$	ϵ_1				$-\epsilon_4$	
$-a-b$	$2\epsilon_2$			$3\epsilon_5$		
$-2a-b$	$3\epsilon_3$		$-3\epsilon_5$			
$-3a-b$						
$-3a-2b$						

Здесь $\varepsilon_i = \pm 1, \ i = 1 \dots 5.$

Таблица 2. Высоты r, s.

s	$-a$	$-b$	$-a-b$	$-2a-b$	$-3a-b$	$-3a-2b$
$\lvert s\rvert^2$	2	6	2	2	6	6

Вычислим константы $K_{r,s}$ для типа G_2.

Теорема 3. *Пусть* Ф *система корней типа* G_2*. Значения констант* $M_{r,s}$ *и* $K_{r,s}$ *приведены в таблицах 3 и 4 соответственно.*

Таблица 3. Константы $M_{r,s}$ для типа G_2.

$K_{r,s}$	a	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$3a+2b$
a						
b						
$a+b$	1	1				
$2a+b$	1	1	1			
$3a+b$	1	1	1	1		
$3a+2b$	1	1	1	1	1	
$K_{r,s}$	$-3a-2b$	$-3a-b$	$-2a-b$	$-a-b$	$-a$	$-b$
$-3a-2b$						
$-3a-b$	1					
$-2a-b$	1	1				
$-a-b$	1	1	1			
$-a$	1	1	1	1		
$-b$	1	1	1	1		

Таблица 4. Константы $K_{r,s}$ для типа G_2.

$K_{r,s}$	a	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$3a+2b$
a						
b						
$a+b$	ϵ_1	$-\epsilon_1$				
$2a+b$	$-2\epsilon_1\epsilon_2$	$2\epsilon_1\epsilon_2$	$-2\epsilon_2$			
$3a+b$	$6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3$	$-6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3$	$6\epsilon_2\epsilon_3$	$-3\epsilon_3$		
$3a+2b$	$-6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4$	$6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4$	$-6\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4$	$3\epsilon_3\epsilon_4$	$-\epsilon_4$	
$K_{r,s}$	$-3a-2b$	$-3a-b$	$-2a-b$	$-a-b$	$-a$	$-b$
$-3a-2b$						
$-3a-b$	ϵ_4					
$-2a-b$	$\epsilon_3\epsilon_4$	ϵ_3				
$-a-b$	$2\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4$	$2\epsilon_2\epsilon_3$	$2\epsilon_2$			
$-a$	$-2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4$	$-2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3$	$-2\epsilon_1\epsilon_2$	$-\epsilon_1$		
$-b$	$6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4$	$6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3$	$6\epsilon_1\epsilon_2$	$3\epsilon_1$		

Доказательство (для положительных r, s).

Случай 1. Пусть $s = a$. Если $r = a$ или $r = b$, то $S_{r,s} = \emptyset$ и поэтому $K_{r,s} = 0$. Далее, $S_{a+b,a} = \{(b)\}$, $S_{2a+b,a} = \{(b,a)\}$, $S_{3a+b,a} = \{(b,a,a)\}$, $S_{3a+2b,a} = \{(b,a,a,b)\}$ и, следовательно,

$$K_{a+b,a} = N_{a,b} = \epsilon_1,$$

$$K_{2a+b,a} = N_{a,b}N_{a+b,a} = (\epsilon_1)(-2\epsilon_2) = -2\epsilon_1\epsilon_2,$$

$$K_{3a+b,a} = N_{a,b}N_{a+b,a}N_{2a+b,a} = (\epsilon_1)(-2\epsilon_2)(-3\epsilon_3) = 6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3,$$

$$K_{3a+2b,a} = N_{a,b}N_{a+b,a}N_{2a+b,a}N_{3a+b,b} = (\epsilon_1)(-2\epsilon_2)(-3\epsilon_3)(-\epsilon_4) =$$
$$= -6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4.$$

Случай 2. Пусть $s = b$. Если $r = a$ или $r = b$, то $S_{r,s} = \emptyset$ и поэтому $K_{r,s} = 0$. Далее, $S_{a+b,b} = \{(a)\}$, $S_{2a+b,b} = \{(a,a)\}$, $S_{3a+b,b} = \{(a,a,a)\}$, $S_{3a+2b,a} = \{(a,a,a,b)\}$ и, следовательно,

$$K_{a+b,b} = N_{b,a} = -\epsilon_1,$$

$$K_{2a+b,b} = N_{b,a}N_{a+b,a} = (-\epsilon_1)(-2\epsilon_2) = 2\epsilon_1\epsilon_2,$$

$$K_{3a+b,b} = N_{b,a}N_{a+b,a}N_{2a+b,a} = (-\epsilon_1)(-2\epsilon_2)(-3\epsilon_3) = -6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3,$$

$$K_{3a+2b,b} = N_{b,a}N_{a+b,a}N_{2a+b,a}N_{3a+b,b} = (-\epsilon_1)(-2\epsilon_2)(-3\epsilon_3)(-\epsilon_4) = \\ = 6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4.$$

Случай 3. Пусть $s = a + b$. Если $r = a$, $r = b$ или $r = a + b$ то $S_{r,s} = \emptyset$ и поэтому $K_{r,s} = 0$. Далее, $S_{2a+b,a+b} = \{(a)\}$, $S_{3a+b,a+b} = \{(a, a)\}$, $S_{3a+2b,a+b} = \{(a, a, b)\}$ и, следовательно,

$$K_{2a+b,a+b} = N_{a+b,a} = -2\epsilon_2,$$

$$K_{3a+b,a+b} = N_{a+b,a}N_{2a+b,a} = (-2\epsilon_2)(-3\epsilon_3) = 6\epsilon_2\epsilon_3,$$

$$K_{3a+2b,a+b} = N_{a+b,b}N_{2a+b,a}N_{3a+b,a} = (-2\epsilon_2)(-3\epsilon_3)(-\epsilon_4) = -6\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4,$$

Случай 4. Пусть $s = 2a + b$. Если $r = a$, $r = b$, $r = a + b$ или $r = 2a + b$ то $S_{r,s} = \emptyset$ и поэтому $K_{r,s} = 0$. Далее, $S_{3a+b,2a+b} = \{(a)\}$, $S_{3a+2b,2a+b} = \{(a, b)\}$ и, следовательно,

$$K_{3a+b,2a+b} = N_{2a+b,a} = -3\epsilon_3,$$

$$K_{3a+2b,2a+b} = N_{2a+b,a}N_{3a+b,b} = (-3\epsilon_3)(-\epsilon_4) = 3\epsilon_3\epsilon_4.$$

Случай 5. Пусть $s = 3a + b$. Если $r = a$, $r = b$, $r = a + b$, $r = 2a + b$ или $r = 3a + b$ то $S_{r,s} = \emptyset$ и поэтому $K_{r,s} = 0$. Далее, $S_{3a+2b,3a+b} = \{(b)\}$ и, следовательно,

$$K_{3a+2b,3a+b} = N_{3a+b,b} = -\epsilon_4.$$

Доказательство (для отрицательных $\boldsymbol{r, s}$).

Случай 1. Пусть $s = -3a - 2b$. Если $r = -3a - 2b$ то $K_{r,s} = 0$. Далее,

$$K_{-b,-3a-2b} = K_{3a+2b,b} = 6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4 ,$$

$$K_{-a,-3a-2b} = \frac{1}{3}K_{3a+2b,a} = -2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4 ,$$

$$K_{-a-b,-3a-2b} = \left(-\frac{1}{3}\right)K_{3a+2b,a+b} = 2\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4 ,$$

$$K_{-2a-b,-3a-2b} = \frac{1}{3}K_{3a+2b,2a+b} = \epsilon_3\epsilon_4 ,$$

$$K_{-3a-b,-3a-2b} = (-1)K_{3a+2b,3a+b} = \epsilon_4 .$$

Случай 2. Пусть $s = -3a - b$. Если $r = -3a - 2b$ или $r = -3a - b$ то $K_{r,s} = 0$. Далее,

$$K_{-2a-b,-3a-b} = \tfrac{1}{3}K_{3a+b,2a+b} = \epsilon_3 \,,$$

$$K_{-a-b,-3a-b} = \frac{1}{3}K_{3a+b,a+b} = 2\epsilon_2\epsilon_3 \,,$$

$$K_{-a,-3a-b} = \left(-\frac{1}{3}\right)K_{3a+b,a} = -2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \,,$$

$$K_{-b,-3a-b} = K_{3a+b,b} = 6\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3.$$

Случай 3. Пусть $s = -2a - b$. Если $r = -3a - 2b$, $r = -3a - b$ или $r = -2a - b$ то $K_{r,s} = 0$. Далее,

$$K_{-a-b,-2a-b} = (-1)K_{2a+b,a+b} = 2\epsilon_2 \,,$$

$$K_{-a,-2a-b} = K_{2a+b,a} = -2\epsilon_1\epsilon_2 \,,$$

$$K_{-b,-2a-b} = 3K_{2a+b,b} = 6\epsilon_1\epsilon_2.$$

Случай 4. Пусть $s = -a - b$. Если $r = -3a - 2b$, $r = -3a - b$, $r = -2a - b$ или $r = -a - b$ то $K_{r,s} = 0$. Далее,

$$K_{-a,-a-b} = (-1)K_{a+b,a} = -\epsilon_1 \,,$$

$$K_{-b,-a-b} = (-3)K_{a+b,b} = 3\epsilon_1.$$

3 Числа $\boldsymbol{M_{r,s}}$ и $\boldsymbol{K^{\Delta}_{r,s}}$ для типа $\boldsymbol{F_4}$

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ выберем ортонормированный базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. Множество векторов

$$\pm\varepsilon_i\,(1 \le i \le 4), \quad \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\,(1 \le i \le j \le 4), \quad \frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$$

образуют в $\mathbb{R}^4$ систему корней типа F_4 , а корни

$$a = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ b = \varepsilon_3 - \varepsilon_4,\ c = \varepsilon_4,\ d = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4).$$

образуют фундаментальную систему корней.

В линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ с базой a, b, c, d определим линейны порядок, считая

$$x = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c + \alpha_4 d \succ \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c + \beta_4 d = y,$$

если первый отличный от нуля коэффициент разности

$$x - y = (\alpha_1 - \beta_1)a + (\alpha_2 - \beta_2)b + (\alpha_3 - \beta_3)c + (\alpha_4 - \beta_4)d$$

является положительным. В соответствие с этим порядком корни системы корней F_4 упорядочатся следующим образом:

$$d \prec c \prec c + d \prec b \prec b + c \prec b + c + d \prec b + 2c \prec b + 2c + d \prec b + 2c + 2d \prec a \prec a + b \prec a + b + c \prec a + b + c + d \prec a + b + 2c \prec a + b + 2c + d \prec a + b + 2c + 2d \prec a + 2b + 2c \prec a + 2b + 2c + d \prec a + 2b + 3c + d \prec a + 2b + 2c + 2d \prec a + 2b + 3c + 2d \prec a + 2b + 4c + 2d \prec a + 3b + 4c + 2d \prec 2a + 3b + 4c + 2d.$$

Знаки структурных констант, отвечающих экстра-специальным парам, выберем как указано ниже:

$$N_{d,c} = 1,\ N_{d,\ b+c} = 1, N_{d,b+2c} = 1,\ N_{d,b+2c+d} = 2,\ N_{d,a+b+c} = 1,\ N_{d,a+b+2c} = 1,\ N_{d,a+2b+2c} = 1,\ N_{d,a+b+2c+d} = 2,\ N_{d,a+2b+2c+d} = 2, N_{d,a+2b+3c+d} = 1,\ N_{c,d} = 1,\ N_{c,b+c} = 2, N_{c,a+b} = 1,\ N_{c,a+b+c} = 2,\ N_{c,a+2b+2c+d} = 1,\ N_{c,a+2b+3c+2d} = 2,\ N_{b,a} = 1,\ N_{b,a+b+2c} = 1,\ N_{b,a+2b+4c+2d} = 1,\ N_{a,a+3b+4c+2d} = 1.$$

Значения остальных структурных констант приведены в таблице ниже. Здесь корню d присвоен номер 1, и далее номера присваиваются по возрастанию, в соответствии с упорядочением.

Таблица 5.1. Структурные константы $N_{r,s}$ алгебры Ли типа F_4.

$N_{r,s}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1			1		1	2				1
2	-1			1	2	1					1	2
3				1	1	2					1	1
4		-1	-1							1		
5	-1	-2	-1							1		-2
6		-1	-2							1		-1
7	-1									1	1	
8	-2									1	1	1
9										1	1	1
10				-1	-1	-1	-1	-1	-1			
11		-1	-1				-1	-1	-1			
12	-1	-2	-1		2	1		-1	-1			
13		-1	-2		1	2	1	1				
14	-1			-1		1			-1			
15	-2			-1	-1	1		2				
16				-1	-1		-1					
17	-1		1						-1			
18	-2	-1	1					2				
19	-1		2			-2						
20		-1					-1					
21		-2			2							-2
22				-1							1	
23										-1		
24												

Таблица 5.2. Структурные константы $N_{r,s}$ алгебры Ли типа F_4.

$N_{r,s}$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1		1	2		2	2	1					
2	1					1		1	2			
3	1				-1	-1	-2					
4		1	1	1						1		
5	-1		1	1					-2			
6	-2	-1	-1				2					
7	-1			1				1				
8	1		-2			-2						
9		1			1							
10											1	
11										-1		
12									2			
13							-2					
14								-1				
15						2						
16					-1							
17				1								
18			-2									
19	2											
20		1										
21												
22												
23												
24												

Теорема 4. *Значения констант $M_{r,s}$ и $K_{r,s}$ для типа F_4 приведены в таблицах 6 и 7 соответственно.*

Таблица 6.1. Константы $M_{r,s}$ для типа F_4.

$K_{r,s}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3	1	1										
4												
5	1	1		1								
6	1	2	1	1	1							
7		3		1	1							
8	1	3	1	2	2	1	1					
9	1		1	2	2	1	1	1				
10												
11				1						1		
12		1		2	1					1	1	
13	1	3	1	3	2	1				1	1	1
14		2		3	2		1			1	1	1
15	2	5	2	8	4	2	2	1		2	2	1
16	3	8	3	10	6	3	3	1	1	2	2	1
17		2		3	2		1			1	1	1
18	2	7	2	11	6		3	1		3	3	3
19	2	7	2	11	6	2	3	1		3	3	3
20	5	15	5	21	12	5	6	1	1	5	5	2
21	7	22	7	32	18	7	9	2	1	8	8	5
22	7	22	7	32	18	7	9	2	1	8	8	5
23	7	22	7	32	18	7	9	2	1	8	8	5
24	7	22	7	32	18	7	9	2	1	8	8	5

Таблица 6.2. Константы $M_{r,s}$ для типа F_4.

$K_{r,s}$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15	1	1										
16	1	1	1									
17		1										
18	1	1	1		1							
19	1	1	1		1	1						
20	1	2	2	1	1	1						
21	2	2	3	1	2	2	1	1				
22	2	2	3	1	2	2	1	1	1			
23	2	2	3	1	2	2	1	1	1	1		
24	2	2	3	1	2	2	1	1	1	1	1	

Таблица 7.1. Константы $K_{r,s}$ для типа F_4.

$K_{r,s}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3	1	1										
4												
5	1	1		1								
6	1	-1	1	-1	-1							
7		1		1	1							
8	-1	1	-1	1	1	-1	1					
9	1		1	1	1	1	1	-1				
10												
11				1						-1		
12										1	-1	
13	1		1	-1	1	1				-1	1	-1
14										-2	2	-2
15	-2		-2			-2		1		3	-3	3
16	4		4			4		-1	1	-6	6	-6
17										2	-2	2
18								-1		-5	5	-4
19	-1		-1			-1		1		5	-5	4
20	-2		-2			-2		2	-1	16	-16	6
21	-2		-2			-2		-3	1	-21	21	11
22	-8		-8			-8		6	-2	42	-42	22
23	8		8			8		-6	2	-42	42	-22
24	-8		-8			-8		6	-2	42	-42	22

Таблица 7.2. Константы $K_{r,s}$ для типа F_4.

$K_{r,s}$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15	-1	-1										
16	2	2	-2									
17		-1										
18	1	1	-1		-1							
19	-1	-1	1		1	-1						
20	-2	-2	3	-1	2	-2						
21	3	3	-5	1	-3	4	-1	-1				
22	-6	-6	10	-2	8	-8	2	2	-2			
23	8	6	-10	2	-8	8	-2	-2	2	-1		
24	-8	-6	10	-2	8	-8	2	2	-2	1	-1	

Доказательство (для положительных r, s)

Зафиксируем положительные корни r и s. Для того, чтобы определить число слагаемых в сумме (1) для $K_{r,s}$ и их вид, построим следующий граф G. Вершинами графа G будут положительные корни системы F_4. Процесс построения ребер графа G следующий. На первом шаге смотрим какие из корней высоты $ht(s)+1$ могут быть получены из S прибавлением простого корня из F_4 и соединяем ребром от S к данном корню и присвоим вершине 1. Если на $-м$ шаге все корни высоты $ht(s)+i$ просмотрены, то на $i+1-м$ шаге определяем какие корни высоты $ht(s)+i+1$ могут быть получены из корней высоты $ht(s)+i$ прибавлением простого корня, и соединяем их ребрами. Пометка корня высоты $ht(s)+i+1$ вычисляется как сумма пометок корней высоты $ht(s)+i$, концы ребер которых входят в данную вершину.

Приведем пример для случая $r=2a+3b+4c+2d$, $s=a$. Граф G изображен на рис 1.

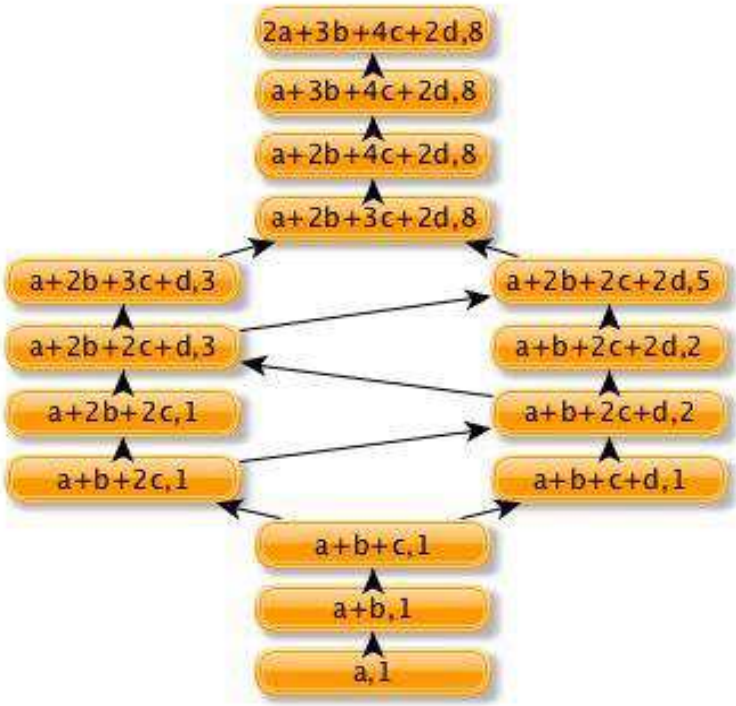

рис 1.

Из графа видно, что сумма (1) для $K_{r,s}$ содержит 8 слагаемых, которые соответствуют специальным разложениям (пути в графе G соединяют "a" c "$2a+3b+4c+2d$")

$$r = a+b+c+d+c+d+b+c+c+b+a.$$

$$r = a+b+c+c+d+d+b+c+c+b+a.$$

$$r = a+b+c+d+c+b+c+d+c+b+a.$$

$$r = a+b+c+d+c+b+d+c+c+b+a.$$

$$r = a+b+c+c+b+d+c+d+c+b+a.$$

$$r = a+b+c+c+d+b+c+d+c+b+a.$$

$$r = a+b+c+c+b+d+d+c+c+b+a.$$

$$r = a+b+c+c+d+b+d+c+c+b+a.$$

Произведение структурных констант алгебры Ли типа F_4 для соответствующих представлений приведены ниже

1)$N_{a,b}N_{a+b,c}N_{a+b+c,d}N_{a+b+c+d,c}N_{a+b+2c,d}N_{a+b+2c+2d,b}N_{a+2b+2c+2d,c}N_{a+2b+3c+2d,c}$

$$N_{a+2b+4c+2d,b}N_{a+3b+4c+2d,a} =$$

$$(-1)(-1)(-1)(-1)(-2)(-1)(-1)(-2)(-1)(-1) = 4.$$

2)$N_{a,b}N_{a+b,c}N_{a+b+c,c}N_{a+b+2c,d}N_{a+b+2c+d,d}N_{a+b+2c+2d,b}N_{a+2b+2c+2d,c}N_{a+2b+3c+2d,c}$

$$N_{a+2b+4c+2d,b}N_{a+3b+4c+2d,a}$$

$$= (-1)(-1)(-2)(-1)(-2)(-1)(-1)(-2)(-1)(-1) = 8.$$

3)$N_{a,b}N_{a+b,c}N_{a+b+c,d}N_{a+b+c+d,c}N_{a+b+2c,b}N_{a+2b+2c+d,c}N_{a+2b+3c+d,d}N_{a+2b+3c+2d,c}$

$$N_{a+2b+4c+2d,b}N_{a+3b+4c+2d,a} =$$

$$(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-2)(-1)(-1) = 2.$$

4)$N_{a,b}N_{a+b,c}N_{a+b+c,d}N_{a+b+c+d,c}N_{a+b+2c,b}N_{a+2b+2c+d,d}N_{a+2b+2c+2d,c}N_{a+2b+3c+2d,c}$

$$N_{a+2b+4c+2d,b}N_{a+3b+4c+2d,a}$$

$$= (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-2)(-1)(-2)(-1)(-1) = 4.$$

5)$N_{a,b}N_{a+b,c}N_{a+b+c,c}N_{a+b+2c,b}N_{a+2b+2c,d}N_{a+2b+2c+d,c}N_{a+2b+3c+d,d}N_{a+2b+3c+2d,c}$

$$N_{a+2b+4c+2d,b}N_{a+3b+4c+2d,a}$$

$$= (-1)(-1)(-2)(-1)(-1)(-1)(-1)(-2)(-1)(-1) = 4.$$

$$6) N_{a,b}N_{a+b,c}N_{a+b+c,c}N_{a+b+2c,d}N_{a+b+2c+d,b}N_{a+2b+2c+d,c}N_{a+2b+3c+d,d}N_{a+2b+3c+2d,c}$$

$$N_{a+2b+4c+2d,b}N_{a+3b+4c+2d,a}$$

$$= (-1)(-1)(-2)(-1)(-1)(-1)(-1)(-2)(-1)(-1) = 4.$$

$$7) N_{a,b}N_{a+b,c}N_{a+b+c,c}N_{a+b+2c,b}N_{a+2b+2c,d}N_{a+2b+2c+2d,d}N_{a+2b+2c+2d,c}N_{a+2b+3c+2d,c}$$

$$N_{a+2b+4c+2d,b}N_{a+3b+4c+2d,a}$$

$$= (-1)(-1)(-2)(-1)(-1)(-2)(-1)(-2)(-1)(-1) = 8.$$

$$8) N_{a,b}N_{a+b,c}N_{a+b+c,c}N_{a+b+2c,d}N_{a+b+2c+d,b}N_{a+2b+2c+d,d}N_{a+2b+2c+2d,c}N_{a+2b+3c+2d,c}$$

$$N_{a+2b+4c+2d,b}N_{a+3b+4c+2d,a}$$

$$= (-1)(-1)(-2)(-1)(-1)(-2)(-1)(-2)(-1)(-1) = 8.$$

В итоге, получаем

$$K_{2a+3b+4c+2d,a} = 4 + 8 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8 = 42.$$

Аналогично вычислены константы $K_{r,s}$ для остальных пар $r, s \in F_4^+$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. Вычислены константы $M_{r,s}$ и $K_{r,s}$ для типа G_2 (для положительных и отрицательных r, s) .
2. Вычислены констант $M_{r,s}$ и $K_{r,s}$ для типа F_4 (для положительных r, s) .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли : учебное пособие для вузов / Н.Бурбаки. – Москва : Мир, 1972. –336 с.
2. Колесников, С. Г. Числа $K^{\Delta}_{r,s}$: приложения, свойства и вычисление, рукопись.
3. Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры : учебник / А. И. Мальцев. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1970. – 400 с.
4. Холл, М. Теория групп : учебное пособие для вузов / М. Холл. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1962. – 467 с.
5. Carter, R. W. Simple groups of Lie type : textbook for high schools / R. W. Carter. – New York: Wiley and Sons, 1972. – 458с.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ / В.М. Левчук
«14» 06 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

О ЧИСЛЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ КОРНЕЙ СУММАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ________ / С.Г. Колесников
14.06.2017

Выпускник ________ / И.Е. Зыков
14.06.2017

Красноярск 2017