Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________В.М. Левчук

"____"________ 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 ”Математика“

Нефинитарные алгебры Шевалле и ассоциированные группы

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ________________ В. М. Левчук
(подпись, дата)

Выпускник ________________ Е. А. Сотникова
(подпись, дата)

Красноярск 2017

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа "Нефинитарные алгебры Шевалле и ассоциированные группы" содержит 16 страниц текста, 10 использованных источников.

РАДИКАЛЬНОЕ КОЛЬЦО, КВАЗИОБРАТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ, АЛГЕБРА ЛИ, АЛГЕБРА ШЕВАЛЛЕ, НИЛЬТРЕУГОЛЬНАЯ ПОДАЛГЕБРА,ПРИСОЕДИНЕННАЯ ГРУППА, НИЛЬ-КОЛЬЦО, УНИПОТЕНТНАЯ ГРУППА, ФИНИТАРНАЯ МАТРИЦА.

Целью работы является построение финитарных и нефинитарных обобщений нильтреугольных подалгебр $N\Phi(K)$ алгебр Шевалле классических типов и их присоединенных групп.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В работе ставилось целью построение финитарных и нефинитарных обобщений нильтреугольных подалгебр $N\Phi(K)$ алгебр Шевалле над полем K, ассоциированных с системой корней Φ, и унипотентных подгрупп $U\Phi(K)$ групп Шевалле типа Φ над K.

Алгебра $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} представляется алгеброй Ли, ассоциированной с алгеброй $NT(n,K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц. Для этого случая задача о финитарных обобщениях решена в работах В.М. Левчука [1] и Ю.И. Мерзлякова [2]. Нефинитарные обобщения унитреугольных групп изучались в ряде работ R.Slovik, начиная с 2009 года.

Задачу о финитарных обобщениях алгебр $N\Phi(K)$ в работе решает теорема 3.5 в § 3. Финитарные обобщения построены с помощью специальных матриц $\|a_{uv}\|$ с индексами из произвольной бесконечной цепи Γ. Нефинитарные обобщения – алгебры Ли $\tilde{N}G(\Gamma,K)$ построены в теореме 4.1.

Аналогично рассматриваются (например [3]), финитарные обобщения унипотентных групп Шевалле классических типов, см. § 3. Они тесно связаны с нильтреугольными подалгебрами $N\Phi(K)$ алгебр Шевалле типа Φ над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей, а также их финитарными обобщениями A_Γ,B_Γ,C_Γ и D_Γ. (См. Сулейманова).

Финитарные обобщения унипотентных групп $U\Phi(K)$ классических типов были построены ранее в работе В.М.Левчука и Г.С. Сулеймановой (2009 г.). Нефинитарные обобщения мы рассматриваем в § 4.

Результаты представлялись на международной конференции молодых ученых (СФУ, 2017 г.).

1 Общие свойства. Кольца нильтреугольных матриц

Хорошо известно, что замена умножения ассоциативного кольца R новым $\alpha * \beta = \alpha\beta - \beta\alpha$ (коммутирование) дает *ассоциированное кольцо Ли* $R = (R; +, *)$.

Ассоциативное кольцо $R = (R, +, \cdot)$ относительно присоединенного умножения

$$\alpha \circ \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta \qquad (\alpha, \beta \in R)$$

всегда является полугруппой с единицей 0. Группу её обратимых элементов называют присоединенной группой кольца R. Элемент $\alpha' \in R$ с условием

$$\alpha + \alpha' + \alpha\alpha' = \alpha' + \alpha + \alpha'\alpha = 0,$$

называется *квазиобратным* к α. Кольцо R называется *радикальным*, если $(R, \circ)$ - группа, т.е. для любого элемента $\alpha \in R$ существует квазиобратный элемент $\alpha' \in R$. Для нильпотентного элемента $\alpha \in R$ (т.е. $\alpha^m = 0$ при некотором $m > 0$) имеем

$$\alpha' = \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha)^k. \qquad (1)$$

Кольцо R называется *ниль-кольцом*, если каждый его элемент нильпотентен.

Кольцо $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над любым ассоциативным кольцом K с единицей нильпотентно (очевидно, $NT(n, K)^n = 0$) и поэтому есть ниль-кольцо. Его присоединенной группой представляется унитреугольная группа $UT(n, K)$; изоморфизм служит отображению $\alpha \to e + \alpha$ (e – единичная матрица).

В алгебре $NT(n, K)$ базис составляют *матричные единицы* e_{ij} (с единицей на месте (i, j) и нулем на остальных местах), причем $e_{uv}e_{ts} = 0$ при

$v \neq t$ и $e_{ut}e_{ts} = e_{us}$. Кроме того,

$$e_{uv} * e_{ts} = \begin{cases} e_{us}, & \text{если } u > v = t > s, \\ -e_{tv}, & \text{если } t > s = u > v, \\ 0 & \text{при } v \neq t,\ s \neq u. \end{cases}$$

Следующая лемма показывает возможность применения формулы (1) квазиобратного элемента для не нильпотентных элементов.

Лемма 1.1. *Для матрицы* $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} e_{k+1k}$ *определены степени* $\alpha^m = \sum_{k=1}^{\infty} e_{k+mk}, m > 0$. *Она не является нильпотентной, а квазиобратную к ней дает формула* (1).

Доказательство. Матрица α есть бесконечномерная клетка Жордана, имеющая единственный характеристический корень; он равен нулю. Прямые вычисления и формула А.И. Мальцева степеней (§ 16, стр.181) показывают, что каждая степень α^m $(m > 0)$ имеет единственную ненулевую диагональ и, следовательно, матрица α не является нильпотентной. Квазиобратный элемент α' к α корректно определяет формула (1). ■

Выберем в $NT(n, K)$ произвольные матрицы $\alpha = \|a_{uv}\|$ и $\beta = \|b_{uv}\|$, полагая

$$\alpha = \|a_{uv}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ & \dots\dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_{21} & & & \\ a_{31} & a_{32} & & \\ & \dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1}. \end{matrix}$$

Тогда $\alpha\beta = \gamma = \|c_{uv}\|$, где $c_{uv} = \sum_{k=v+1}^{u-1} a_{uk}b_{kv}$. В присоединенной группе

$$\alpha \circ \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta = \|c_{uv}\|, \quad c_{uv} = a_{uv} + b_{uv} + \sum_{k=v+1}^{u-1} a_{uk}b_{kv}.$$

Если сейчас $\alpha * \beta = \gamma = \|c_{uv}\|$, то

$$\alpha * \beta = \alpha\beta - \beta\alpha = \sum_{u>k} \sum_{j=k+1}^{u-1} \Big(a_{uj}b_{jk} - b_{uj}a_{jk}\Big) e_{uk}, \quad c_{uk} = \sum_{j=k+1}^{u-1} \Big(a_{uj}b_{jk} - b_{uj}a_{jk}\Big).$$

Финитарные обобщения кольца $NT(n, K)$ и группы $UT(n, K)$ рассматривались в [1].

Пусть Γ есть произвольное линейно-упорядоченное множество или, кратко, цепь с отношением порядка $\leq$. Для любой Γ-матрицы α над полем или кольцом K используем запись $\|a_{uv}\|_{u,v\in\Gamma}$ или кратко $\|a_{uv}\|$, где коэффициент $a_{uv} \in K$ в α на пересечении u-ой строчки и v-го столбца. Ясно, что все Γ-матрицы над K образуют K-модуль с по-координатным сложением. Условие ее нильтреугольности: $a_{uv} = 0$ для всех $v \leq u$.

Далее используем матричную единицу e_{uv} с нулями везде, кроме $a_{uv} = 1$. Матрицы вида xe_{iv} для всевозможных $x \in K$ называем элементарными. Γ-матрицу α называем *финитарной* , если число ее ненулевых элементов a_{uv} конечно; очевидно, это равносильно линейной порождаемости α матричными единицами. Таким образом, верна

Лемма 1.2. Γ*–матрица является финитарной тогда и только тогда, когда она аддитивно порождается элементарными* Γ*–матрицами.*

Умножение финитарных Γ–матриц над K определяем по правилу

$$\|a_{uv}\| \cdot \|b_{uv}\| = \|c_{uv}\|, \quad c_{uv} = \sum_{k\in\Gamma} a_{uk} \cdot b_{kv}. \tag{2}$$

Элемент c_{uv} определен формулой (2) корректно, так как сумма (2) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых, в силу финитарности α и β. Кроме того, произведение $\|c_{uv}\|$ есть также финитарная Γ–матрица, так как α и β имеют лишь конечное число ненулевых строк и конечное число ненулевых столбцов. В частности,

$$e_{uk}e_{kv} = e_{uv}; \qquad e_{uk}e_{mv} = 0, \quad k \neq m.$$

Таким образом, получаем финитарную ассоциативную алгебру $M(\Gamma, K)$ и ее нильтреугольную подалгебру $NT(\Gamma, K)$. Когда цепь Γ конечна и $|\Gamma| = n$, имеем $NT(\Gamma, K) \simeq NT(n, K)$. С другой стороны, справедлива

Лемма 1.3. *Для бесконечной цепи* Γ *финитарное кольцо* $NT(\Gamma, K)$ *есть ниль-кольцо и не является нильпотентным.*

Замечание 1. По предыдущей лемме, финитарное кольцо $NT(\Gamma, K)$ является радикальным. Его присоединенная группа дает финитарное обобщение унитреугольной группы и обозначается через $UT(\Gamma, K)$.

Замечание 2. Обобщая понятие финитарности матриц, назовем Γ–матрицу $\|a_{uv}\|$ над K *слабо-финитарной*, если у нее в каждой строке и в каждом столбце лишь конечное число ненулевых элементов. Произведение (2) таких матриц определено корректно и поэтому они образуют кольцо. Однако, квазиобратная к слабо-финитарной матрице, по лемме 1.1, не обязана быть слабо-финитарной.

2 Нефинитарный случай

Умножение Γ-матриц с произвольной бесконечной цепью Γ индексов не всегда определено: в кольце коэффициентов K определены лишь конечные суммы ненулевых слагаемых, а в сумме (2) может оказаться бесконечно много ненулевых слагаемых.

Зафиксируем в этом параграфе цепь $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots\}$ натуральных чисел. Тогда обычное умножение (2) всех нильтреугольных Γ-матриц остается корректным. Полученное кольцо обозначаем через $GNT(\Gamma, K)$. Ясно, что $GNT(\Gamma, K) \supset NT(\Gamma, K)$.

Как показывает лемма 1.1, кольцо $R = GNT(\Gamma, K)$ не является ниль-кольцом. В то же время, справедлива (см. также [4, Лемма 3.1])

Лемма 2.1. *Кольцо* $R = GNT(\Gamma, K)$ *является радикальным.*

Доказательство. В кольце $GNT(\Gamma, K)$ матрицы $\|a_{uv}\|$ с условием $a_{uv} =$

0 при $u-v<k$ образуют идеал L_k. Получаем убывающий центральный ряд

$$L_1 = GNT(\Gamma, K) \supset L_2 \supset \cdots \supset L_k \supset \cdots, \quad \cap_{k=1}^{\infty} L_k = 0, \quad L_k * L_m \subseteq L_{k+m}.$$

Все фактор-алгебры $L_1/L_k \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$ являются нильпотентными и, следовательно, радикальными. Выберем $\alpha = ||a_{uv}|| \in L_1$. Чтобы построить матрицу $\gamma = ||c_{uv}||$, квазиобратную к α, достаточно определить ее k-ую диагональ $\{c_{uv} \mid u - v = k\}$ для каждого номера $k = 1, 2, \cdots$. Пусть $c_{uv} = -a_{uv}$ при $u-v = 1$ и при любом $k \geq 1$ первые $k-1$ диагоналей матрицы γ выбраны так, что

$$\gamma = \sum_{m=1}^{k-1} (-\alpha)^m = -\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \cdots + (-\alpha)^k \mod L_{k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

Так как выбор диагоналей при возрастании k не изменяет диагонали с меньшими номерами, то указанный алгоритм построения дает матрицу $\gamma = ||c_{uv}|| \in L_1$. (Корректность записи $\sum_{m=1}^{k-1} (-\alpha)^m$ матрицы следует также из того, любой ее элемент есть сумма с конечным числом ненулевых слагаемых.)

С другой стороны, при любом $k = 1, 2, \cdots$ фактор-алгебры L_1/L_{k+1} нильпотентны и $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha = 0 \mod L_{k+1}$. Таким образом, γ - квазиобратный элемент к α и кольцо L_1 – радикальное. $\blacksquare$

Отметим, что унитреугольная группа $UT_\infty(K)$ из работ R.Slowik ([5] и др.) изоморфна присоединенной группе кольца $GNT(\Gamma, K)$.

3 Обобщения нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ классических типов

Алгебру Шевалле над полем K характеризуют системой корней Φ и базой Шевалле, состоящей из элементов e_r $(r \in \Phi)$ и подходящей базы подалгебры Картана, [6, § 4.4]. Подалгебру с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ называем *нильтреугольной* и обозначаем через $N\Phi(K)$. Присоединенной группой на ней в [7] представлена унипотентная подгруппа $U\Phi(K)$ группы Шевалле типа Φ над K, порождаемая корневыми подгруппами X_r $(r \in \Phi^+)$.

Таблицу умножения элементов базиса Шевалле определяет теорема Шевалле о базисе [6], показывающая, что при всех $r, s \in \Phi^+$ имеем

$$e_r * e_s = N_{r,s}e_{r+s} = -e_s * e_r \ \ (r+s \in \Phi), \qquad\qquad e_r * e_s = 0 \ \ (r+s \notin \Phi),$$

где структурные константы $N_{r,s} = \pm 1, \pm 2$ или ± 3.

В [7] алгебра Ли $N\Phi(K)$ представлена алгеброй с базой из "матричных единиц" e_{iv} с ограничениями на индексы

$$1 \leq v < i \leq n, \quad -i < v < i \leq n, \quad -i \leq v < i \leq n,\ v \neq 0, \quad 1 \leq |v| < i \leq n,$$

соответственно типам A_{n-1}, B_n, C_n и D_n. По теореме Шевалле о базисе, $e_{ij} * e_{uv} = 0$ при $i \neq v,\ j \neq u, j \neq -v$. В силу [7, Лемма 1.1], верна

Лемма 3.1. *Знаки структурных констант базиса Шевалле можно выбрать так, что $e_{ij} * e_{jv} = e_{iv}$ и, кроме того,*

$$\Phi = B_n, D_n : \quad e_{jv} * e_{i,-v} = e_{i,-j} \ \ (i > j >| v |> 0);$$

$$\Phi = C_n : \ e_{jm} * e_{i,-m} = e_{im} * e_{j,-m} = e_{i,-j} \quad (i > j > m \geq 1);$$

$$\Phi = B_n : \ e_{i0} * e_{j0} = 2e_{i,-j}, \quad \Phi = C_n : \ e_{ij} * e_{i,-j} = 2e_{i,-i} \quad (i > j \geq 1).$$

Каждый элемент $\alpha \in N\Phi(K)$ представляем суммой $\alpha = \sum a_{iv}e_{iv}$ и Φ^+-матрицей $||a_{iv}||$ соответствующего типа. Прямыми вычислениями находим

$$\gamma = \|c_{ij}\| = \alpha * \beta = \Big(\sum_{(u,v)} a_{uv}e_{uv}\Big) * \Big(\sum_{(j,k)} b_{jk}e_{jk}\Big) = \sum_{(u,v)}\sum_{(j,k)} a_{uv}b_{jk}(e_{uv} * e_{jk}) =$$

$$= \sum_{(k<j<u)} a_{uj}b_{jk}e_{uk} - \sum_{(v,j,k)} a_{kv}b_{jk}e_{jv} + \sum_{(u,j,k)} a_{u,-k}b_{jk}(e_{u,-k} * e_{jk}). \tag{3}$$

Формулы умножения Φ^+- матриц $\alpha = ||a_{iv}||$ и $\beta = ||b_{iv}||$ в $N\Phi(K)$ выпишем отдельно для каждого типа. Напомним, что B_n^+-матрица имеет вид

a_{10}

$$a_{2,-1}\ a_{20}\ a_{21}$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$a_{n,-n+1}\ \dots\ a_{n,-1}\ a_{n0}\ a_{n1}\ \dots\ a_{n,n-1}.$$

С учетом (3) получаем следующие формулы умножения B_n^+-матриц

$$c_{uk} = \sum_{j=k+1}^{u-1} \Big(a_{uj}b_{jk} - b_{uj}a_{jk}\Big), \quad 0 \le k < u, \tag{4}$$

и, при $k > 0$,

$$c_{u,-k} = 2\Big(a_{u0}b_{k0} - b_{u0}a_{k0}\Big) + \sum_{j=k+1}^{u-1} \Big(b_{j,-k}a_{uj} - a_{j,-k}b_{uj}\Big) +$$

$$+ \sum_{j>0} \Big(a_{kj}b_{u,-j} - b_{kj}a_{u,-j}\Big). \tag{5}$$

Лемма 3.2. *Формулы* (4) *и* (5) *определяют лиево произведение* $\alpha * \beta = \gamma = \|c_{ij}\|$ *любых двух* B_n*-матриц* $\alpha = \|a_{ij}\|$ *и* $\beta = \|b_{ij}\|$.

Отбрасывая в B_n^+-матрице нулевой столбец, получаем D_n^+-матрицу. При $k > 0$ находим элемент c_{uk} произведения двух D_n^+-матриц по формуле (4) и, кроме того,

$$c_{u,-k} = \sum_{j=k+1}^{u-1} \Big(b_{j,-k}a_{uj} - a_{j,-k}b_{uj}\Big) + \sum_{j>0} \Big(a_{kj}b_{u,-j} - b_{kj}a_{u,-j}\Big). \tag{6}$$

Лемма 3.3. *Формулы* (4) *и* (6) *определяют лиево произведение* $\alpha * \beta = \gamma = \|c_{ij}\|$ *любых двух* D_n*-матриц* $\alpha = \|a_{ij}\|$ *и* $\beta = \|b_{ij}\|$.

Далее выписываем произвольную C_n^+-матрицу $\alpha = \|a_{uv}\|$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a_{1,-1} & & & \\ & & a_{2,-2} & a_{2,-1} & a_{21} & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n,-n} & \cdots & a_{n,-2} & a_{n,-1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1}. \end{array}$$

С помощью формулы (3) аналогично получаем:

$$c_{uk} = \sum_{j=k}^{u-1}\Big(a_{uj}b_{jk} - b_{uj}a_{jk}\Big) + \sum_{j>0}\Big(a_{kj}b_{u,-j} - b_{kj}a_{u,-j}\Big), k \geq 1; \tag{7}$$

$$c_{u,-k} = \sum_{j=k}^{u-1}\Big(b_{j,-k}a_{uj} - a_{j,-k}b_{uj}\Big) + \sum_{j>0}\Big(a_{kj}b_{u,-j} - b_{kj}a_{u,-j}\Big) +$$

$$+ \sum_{j<0}\Big(a_{u,-j}b_{kj} - b_{u,-j}a_{kj}\Big); \tag{8}$$

$$c_{u,-u} = 2\sum_{j=1}^{u-1}\Big(a_{uj}b_{u,-j} - b_{u,-j}a_{uj}\Big). \tag{9}$$

Лемма 3.4. *Формулы* (7), (8) *и* (9) *определяют лиево произведение* $\alpha * \beta = \gamma = \|c_{ij}\|$ *любых двух* C_n*-матриц* $\alpha = \|a_{ij}\|$ *и* $\beta = \|b_{ij}\|$.

По аналогии с финитарным обобщенным кольцом Ли $(NT(\Gamma, K), +, *)$ с произвольной цепью Γ (тип A_Γ), построим обобщенные кольца Ли $NB_\Gamma(K)$, $NC_\Gamma(K)$ и $ND_\Gamma(K)$.

Определение 3.1. Изометрией $' : \Gamma \to \Gamma'$ двух цепей, называем биективное соответствие между ними, сохраняющее отношение порядка (т.е если $i \leq j$, то $i' \leq j'$). Аналогично определяем антиизометрию $'$, но она не сохраняет порядок, а меняет его на противоположный (т.е если $i \leq j$, то $i' \geq j'$). Как пример рассмотрим случай цепи N натуральных чисел. Очевидно, отображение $i \to i' = -i (i \in N)$ является её антиизометрией.

При $\Gamma' \cap \Gamma \neq \emptyset$ обозначим через $NB_\Gamma(K)$ K-модуль с базисом

$$\{e_{im} \mid i \in \Gamma, m \in \widetilde{\Gamma}, i' < m < i\}. \tag{10}$$

При $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$ обозначим K-модуль с такой же записью базиса через $ND_\Gamma(K)$, а K-модуль с базисом $\{e_{im} \mid i \in \Gamma, m \in \widetilde{\Gamma}, i' \leq m < i\}$ — через

$NC_\Gamma(K)$. Лемму 3.1 переносим на финитарный случай с произвольной цепью Γ индексов, используя вместо B_n-, C_n- и D_n- матриц, соответственно, B_Γ -, C_Γ -, D_Γ - матрицы $\|a_{uv}\|_{u,v\in\Gamma}$.

Умножение $*$ определяем произведениями базисных элементов [3]:

$$e_{ij} * e_{jv} = e_{iv}; \quad e_{ij} * e_{kt} = 0,\ j \neq k,\ i \neq t,\ t \neq j';$$

$$e_{i0} * e_{j0} = 2e_{ij'}\ (G = B_\Gamma);\ e_{ij} * e_{ij'} = 2e_{ii'}\ (G = C_\Gamma),\ i > j \in \Gamma;$$

$$e_{im} * e_{jm'} = e_{ij'},\ j' < m < j < i, j \neq 0, \quad e_{im} * e_{im'} = 0\ (G = B_\Gamma,\ D_\Gamma);$$

$$e_{jk} * e_{ik'} = e_{ik} * e_{jk'} = e_{ij'},\ i > j > k \in \Gamma\ (G = C_\Gamma).$$

(В формуле $e_{im} * e_{jm'} = e_{ij'}$ берем ограничение $j' < m < j < i$, основываясь на первой формуле леммы 3.1; это уточняет в [3] формулу для типов $G = B_\Gamma,\ D_\Gamma$ перед леммой 1.)

Сейчас замечаем, что полученные в леммах 3.2, 3.3 и 3.4 формулы умножения Φ^+-матриц корректно обобщаются на матрицы типа $G = B_\Gamma, C_\Gamma$ и D_Γ для произвольной цепи Γ с условием $\Gamma' \cap \Gamma = \{0\}$ для типа B_Γ и с условием $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$ для типа D_Γ и C_Γ. Таким образом, приходим к обобщенным кольцам Ли $NB_\Gamma(K)$, $NC_\Gamma(K)$ и $ND_\Gamma(K)$.

Предложение 3.5. *Формулы умножения обобщенных матриц в кольцах Ли $NB_\Gamma(K)$, $ND_\Gamma(K)$ и $NC_\Gamma(K)$ определяются корректно формулами из лемм 3.2, 3.3 и 3.4 соответственно.*

4 Нефинитарные обобщения

В этом параграфе мы строим (нефинитарную) алгебру $\tilde{NG}(\Gamma, K)$, на множестве всех Γ- матриц типа $G = B_\Gamma$, C_Γ и D_Γ, считая всюду, что Γ – цепь неотрицательных целых чисел для типа B_Γ и $\Gamma = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ для типов C_Γ и D_Γ, причем $i' = -i$.

Всякий элемент $\alpha \in \tilde{N}G(\Gamma, K)$ по-прежнему представляем (бесконечной) суммой $\alpha = \sum a_{iv}e_{iv} = \|a_{iv}\|$, с матричными единицами e_{iv} из (10) для типов B_Γ и D_Γ и, аналогично, из $\{e_{iv} \mid i \in \Gamma, v \in \widetilde{\Gamma}, i' \leq v < i\}$ для типа C_Γ.

Полученное множество $\tilde{N}G(\Gamma, K)$ является K-модулем относительно естественных линейных операций (сложение по-координатное). Далее замечаем, что формулы умножения матриц в леммах 3.2, 3.3 и 3.4 корректно обобщаются, поскольку каждая строка в любой матрице из K-модуля $\tilde{N}G(\Gamma, K)$ имеет конечное число ненулевых элементов. Таким образом, K-модуль $\tilde{N}G(\Gamma, K)$ превращается в (нефинитарную) алгебру Ли.

Предложение 4.1. *Лиево произведение $\alpha * \beta = \gamma = \|c_{ij}\|$ любых двух обобщенных матриц $\alpha = \|a_{ij}\|$ и $\beta = \|b_{ij}\|$ типа B_Γ (аналогично, типа D_Γ или C_Γ) корректно определяют формулы* (4) *и* (5) *(соответственно,* (4) *и* (6)*,или* (7)*,* (8) *и* (9)*).*

5 Обобщения унипотентных подгрупп групп Шевалле

Финитарные обобщения унипотентных групп $UG(K)$ классических типов (по аналогии с обобщениями унитреугольных групп) рассматривались в [3]. Они представляются как присоединенные группы на финитарных алгебрах $NG(K)$ типа B_Γ, D_Γ и C_Γ.

Подгруппа $U\Phi(K)$ тесно связана с подалгеброй $N\Phi(K)$ с базисом e_r ($r \in \Phi^+$) алгебры Шевалле типа Φ над K [6, § 4.4]. Далее используем каноническое разложение [6, теорема 5.3.3], [10, лемма 18]: *Всякий элемент α группы $U\Phi(K)$ однозначно представляется в виде произведения корневых элементов $x_r(t_r)$, $r \in \Phi^+$, расположенных соответственно фиксированному (произвольно) упорядочению корней.* Положим

$$\pi(\alpha) = \sum_{r \in \Phi^+} t_r e_r, \qquad \alpha \circ \beta = \pi(\pi^{-1}(\alpha)\pi^{-1}(\beta)) \qquad (\alpha, \beta \in U\Phi(K)).$$

Тогда π есть изоморфизм унипотентной подгруппы $U\Phi(K)$ группы Шевалле на присоединенную группу $(N\Phi(K), \circ)$.

При построении финитарных обобщений унипотентных подгрупп как присоединенных групп финитарных алгебр $NG(K)$ учитываем порождаемость последних элементарными элементами. Основные соотношения в этих терминах ранее были выписаны.[3]

Предложение 5.1. *Всякое соотношение в присоединенной группе $\langle NG(K), \circ \rangle$ типа $G = B_\Gamma, C_\Gamma$ или D_Γ есть следствие соотношений в K и следующих соотношений:*

$$xe_{iv} \circ ye_{iv} = (x + y)e_{iv};$$

$$[xe_{ik}, ye_{jt}] = 0, \quad j \neq k,\ i \neq t,\ t \neq k';$$

$$[xe_{ij}, ye_{jv}] = xye_{iv}, \quad v \neq 0,\ v \neq j';$$

$$G = B_\Gamma, D_\Gamma : \quad [xe_{jv}, ye_{i,v'}] = \begin{cases} xye_{i,j'}, & i > j,\ v \neq 0, \\ 0, & i = j; \end{cases}$$

$$G = B_\Gamma : \quad [xe_{ij}, ye_{j0}] = xye_{i0} + xy^2e_{i,j'}, \quad [xe_{i0}, ye_{j0}] = 2xye_{i,j'};$$

$$G = C_\Gamma : \quad [xe_{ik}, ye_{j,k'}] = [xe_{jk}, ye_{i,k'}] = xye_{i,j'}, \quad i > j > k \in \Gamma,$$

$$[xe_{ij}, ye_{j,j'}] = xye_{i,j'} - x^2ye_{i,i'}, \quad [xe_{ij}, ye_{i,j'}] = 2xye_{i,i'}, \quad i > j \in \Gamma.$$

Нефинитарные обобщения типа $G = B_\Gamma, D_\Gamma$ и C_Γ здесь получаем как присоединенные группы нефинитарных алгебр Ли $\tilde{NG}(K, \circ)$, где

$$\alpha \circ \beta = \gamma = \|c_{ij}\| \quad (\alpha, \beta \in \tilde{NG}(K)).$$

Элемент c_{uv} матрицы γ выражается в кольце K через коэффициенты лиевых произведений вида $a_{km}e_{km} * b_{st}e_{st}$ для определенных позиций (k, m) и (s, t), лежащих в строках с номерами $\leq u$. Поскольку в α и β число ненулевых элементов в таких строках конечно, то каждый коэффициент c_{uv} определен корректно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе исследовались задачи построения финитарных и нефинитарных обобщений нильтреугольных подалгебр $N\Phi(K)$ алгебр Шевалле над полем K, ассоциированных с системой корней Φ, и унипотентных подгрупп $U\Phi(K)$ групп Шевалле типа Φ над K. Получены следующие результаты :

1. Решена задача о финитарных обобщениях алгебр $N\Phi(K)$ (теорема 3.5).

2. Построены нефинитарные алгебры Ли $\tilde{N}G(\Gamma, K)$ симплектического типа $G = C_\Gamma$ и ортогональных типов $G = B_\Gamma$ и D_Γ (теорема 4.1).

3. Нефинитарные обобщения унипотентных групп $U\Phi(K)$ классических типов построены как присоедниненные группы нефинитарных алгебр $\tilde{N}G(\Gamma, K)$.

В дальнейшем, предполагается изучить автоморфизмы построенных аномальных (нефинитарных) алгебр Ли.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **В. М. Левчук** *Некоторые локально нильпотентные кольца и их присоединенные группы.* Математические заметки. 1987. Т.42. №5. С. 631-641

2 **Мерзляков Ю.И.** *Эквиподгруппы унитреугольных групп: критерий самонормализуемости.* Докл. РАН. 1994. Т. 339, № 6. С. 732–735.

3 **В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова**, *Автоморфизмы и нормальное строение унипотентных подгрупп финитарных групп Шевалле.* Труды Инс. Мат. и Мех. УрО РАН, т. 15 (2009), № 2, с. 1-10.

4 **В. М. Левчук, А. В. Литаврин, Н. Д. Ходюня, В. В. Цыганков**, *Нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле и их обобщения.* Владикав. мат. журнал, т. 17(2015), Вып. 2,С.37-46 .

5 **Roksana Slowik**, *Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators.* Linear and Multilinear Algebra. 2013. Vol. 61. 8. P. 1028-1040.

6 **R. Carter**, *Simple Groups of Lie type.* Wiley and Sons, New York, 1972.

7 **В. М. Левчук**, *Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле.* Алгебра и Логика, 29 (1990), No. 3, 315–338.

8 **Н. Бурбаки**, *Группы и алгебры Ли (Главы IV-VI).* М.: Мир, 1972.

9 **В. М. Левчук**, *Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов.* Сиб. матем. журн. 1983. Т.24. №4. С.543-557.

10 **Стейнберг Р.** *Лекции о группах Шевалле.* М.: Мир,1975. 264 с.