Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ / В.В. Шайдуров

«_8_» _июня_ 2017 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Магистерская программа 02.04.01.01 Математическое и компьютерное моделирование

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
профессор _____ / В.Е. Распопов
8.06.2017

Выпускник _____ / А.Н. Соболев
8.06.2017

Красноярск 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение…….. 3

1 Численное решение задачи для математической модели системы гарпактициды-диатомовы водоросли……... 6

1.1 Постановка задачи …….. 6

1.2 Алгоритм решения задачи…….. 7

1.3 Результаты вычислительных экспериментов……... 7

2 Численное решение обратной задачи…… 14

2.1 Постановка задачи……... 14

2.2 Алгоритм решения задачи……. 15

2.3 Тестовые расчёты для обратной задачи……... 16

Заключение…….. 28

Список использованных источников…… 29

Приложения……..... 30

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система трофического сообщества гарпактициды-диатомовые водоросли. Это система основана на процессе трофотаксиса, т.е. перемещении микроорганизмов в направлении питательных веществ. В работе Тютюнова Ю.В.[1] была выведена математическая модель для системы такого рода. Полученная математическая модель является системой типа хищник жертва и в области Ω=[0,T]x[0,1] имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(t,x)}{\partial t} = R(t,x)(1-R(t,x)-aN(t,x)) + \delta_R \dfrac{\partial^2 R(t,x)}{\partial x^2} + f_R(t,x), \\ \dfrac{\partial N(t,x)}{\partial t} = -\dfrac{\partial (N(t,x)v(t,x))}{\partial x} + aN(t,x)R(t,x) - \mu N(t,x) + \delta_N \dfrac{\partial^2 N(t,x)}{\partial x^2} + f_N(t,x), \\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} = k\dfrac{\partial R(t,x)}{\partial x} + \delta_V \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_V(t,x), \end{cases}$$

$$N(0,x) = N_0(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$R(0,x) = R_0(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$\left.\frac{\partial R(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0,1} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial N(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0,1} = 0,$$

$$v(t,x)\big|_{x=0,1} = 0,$$

В этой система коэффициент k – коэффициент трофотаксиса. Этот коэффициент отображает поисковую активность хищника, другими словами, то на сколько целенаправленно хищник ищет свою жертву. При $k=0$ поиск жертв происходит случайным образом. Коэффициент a – коэффициент поисковой эффективности хищника, характеризующий интенсивность атак хищника. Аналитически в работе [1] было получено что при $k \ge 0$, модель устойчива, пока коэффициент трофотаксиса не достигнет некоторого критического значения k^*, после которого модель теряет устойчивость.

Условия определения этого критического значения не было получено. Известно только то, что при различных входных параметрах критическое значение также различно. Так же важно отметить, что на практике редко случается, когда коэффициент трофотаксиса равен нулевому значению.

Так как не всегда есть возможность экспериментально провести необходимые замеры значения параметров математической модели таких, как начальные условия, граничные условия, коэффициент смертности, коэффициенты диффузии, коэффициент трофотаксиса, коэффициент поисковой эффективности хищника, возникает проблема нахождения этих коэффициентов. Существуют различные методы определения значения различных параметров математической модели, которые по каким-либо причинам могут быть неизвестны. Один из методов определения значения этих параметров, это решение обратной задачи. Обратные задачи – это такой тип задач, в случае которых некоторые значения параметров задач могут быть неизвестны.

Первые работы по исследованию обратных задач появились в первой половине 20-ого века. С появлением мощных вычислительных ресурсов область приложений обратных задач стала охватывать всё большее и большее количество научных дисциплин. И проблема разработки методов численного решения обратных задач становится всё более актуальной.

При решении прямых задач математической физики, исследователи стремятся найти функции, которые описывают различные физические явления, например, распространения различных примесей в жидкостях, распространения тепла в различных веществах и так далее. В ходе решения подразумевается, что требующиеся входные данные для математической модели являются известными. На практике это редко достижимо и различные значения параметров модели неизвестны. В следствии чего возникает необходимость ставить и решать обратные задачи. В большинстве случаем эти задачи некорректны[2][3][4][5], что означает нарушение хотя бы одного из свойств корректности (условие существования, условие единственности,

условие устойчивости решения по отношению к возмущениям во входных данных).

В проделанной работы численно решается задача для математической модели системы гарпактицид-диатомовых водорослей. Так же осуществляется постановка обратной задачи для рассматриваемой математической модели и её численное решение. И проводятся вычислительные эксперименты по исследованию поведения решения относительно возмущений во входных данных, а именно в условии переопределения.

Цель работы- численное решение прямой и обратной задачи для математической модели системы гарпактицид-диатомовых водорослей. Для выполнения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- численное решение прямой и обратной задачи.
- разработка алгоритма решения обратной задачи.
- разработка программы для реализации численных методов при помощи пакета прикладных программ Matlab[6].
-проведение вычислительных экспериментов.

1 Численное решение задачи для математической модели системы гарпактициды-диатомовые водоросли

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу.

В области $D = \{(t,x)/0 < t < 1,\ 0 < x < 1\}$, требуется найти $R(t,x), N(t,x)$ и $v(t,x)$, удовлетворяющие следующей задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(t,x)}{\partial t} = R(t,x)(1 - R(t,x) - aN(t,x)) + \delta_R \dfrac{\partial^2 R(t,x)}{\partial x^2} + f_R(t,x), & (1) \\ \dfrac{\partial N(t,x)}{\partial t} = -\dfrac{\partial (N(t,x)v(t,x))}{\partial x} + aN(t,x)R(t,x) - \mu N(t,x) + \delta_N \dfrac{\partial^2 N(t,x)}{\partial x^2} + f_N(t,x), & (2) \\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} = k\dfrac{\partial R(t,x)}{\partial x} + \delta_V \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_V(t,x), & (3) \end{cases}$$

$$N(0,x) = N_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad (4)$$

$$R(0,x) = R_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad (5)$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad (6)$$

$$\left.\frac{\partial R(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0,1} = 0, \qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial N(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0,1} = 0, \qquad (8)$$

$$\left. v(t,x)\right|_{x=0,1} = 0, \qquad (9)$$

где *R(t,x), N(t,x)* плотности жертвы и хищника соответственно, *v(t,x)* скорость хищника, *k*- коэффициент трофотаксиса, a – коэффициент поисковой эффективности хищника, μ - коэффициент смертности хищника, (4)-(5) - начальное условие, (7)-(9) - краевые условия. Функции $N_0(x), R_0(x), v_0(x), f_R(t,x), f_N(t,x), f_v(t,x), a, k, \mu$ – заданы. Функции $f_R(t,x)$, $f_N(t,x)$, $f_v(t,x)$- это функции внешнего воздействия на систему.

Поставленную задачу будем решать численно.

Строим равномерную сетку:

$$D_h\{(t_n, x_i)/t_n = n\tau,\ n = 0,1,\ \ldots,\ N;\ x_i = ih,\ i = 0,1,\ \ldots,\ M\}$$

Задачу (1)-(9) аппроксимируем следующей неявной разностной схемой [7],[8],[9]:

$$\begin{cases} \dfrac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} = r_i^n(1 - r_i^n - a y_i^n) + \delta_R \dfrac{r_{i+1}^{n+1} - 2r_i^{n+1} + r_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_R(n\tau, ih), & (10) \\ \dfrac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = -((\dfrac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h})v_i^n + y_i^n(\dfrac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h})) + a y_i^n r_i^n - \mu y_i^n + \delta_N \dfrac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_N(n\tau, ih), & (11) \\ \dfrac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = (\dfrac{r_{i+1}^n - r_i^n}{h})k + \delta_V \dfrac{v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_V(n\tau, ih), & (12) \end{cases}$$

$$r_i^0 = R_0(ih), y_i^0 = N_0(ih), v_i^0 = v_0(ih), \quad 0 \le i \le M, \qquad (13)$$

$$\frac{-3r_0^{n+1} + 4r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{2h} = 0, \frac{r_{M-2}^{n+1} - 4r_{M-1}^{n+1} + 3r_M^{n+1}}{2h} = 0, \quad 0 \le n \le N-1, \qquad (14)$$

$$\frac{-3y_0^{n+1} + 4y_1^{n+1} - y_2^{n+1}}{2h} = 0, \frac{y_{M-2}^{n+1} - 4y_{M-1}^{n+1} + 3y_M^{n+1}}{2h} = 0, \quad 0 \le n \le N-1, \qquad (15)$$

$$v_0^n = 0, v_M^n = 0, \quad 0 \le n \le N, \qquad (16)$$

где (13) - аппроксимация начальных условий, (14)-(16) аппроксимация граничных условий.

Разностная схема (10)-(16) аппроксимирует задачу (1)-(9) с порядком аппроксимации $O(\tau + h)$.

1.2 Алгоритм решения

Разностную задачу (10)-(16) решаем последовательно по слоям повремени. На каждом слое по времени для каждого уравнения системы (10)-(12) получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). СЛАУ решаем при помощи метода Гаусса с выбором главного элемента[7],[8],[9] и при помощи метода Q/R разложения.

1.3 Результаты вычислительных экспериментов

Произведены многочисленные вычислительные эксперименты с использованием таких функций, как произведение синусов и косинусов, произведение синусов и экспоненты, произведение полиномов различной степени, произведение экспоненты и полинома.

Далее приведены результаты вычислительных экспериментов (более подробные данные по вычислительным экспериментам представлены в (ПРИЛОЖЕНИИ А)).

В случае, когда точное решение имеет вид:

$$R(t,x) = e^{\alpha t}\left(x\left(x-L\right)\right)^2,$$
$$N(t,x) = 4t^2\left(x^2+x^3+x^4\right)\left(x-L\right)^2,$$
$$v(t,x) = 6x\left(x-L\right)^2 t$$
$$0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1.$$

Результаты вычислительных экспериментов представлены в виде таблиц максимальных абсолютных и относительных погрешностей по узлам сетки.

Для функции плотности жертв (*R(t,x)*) были получены следующие результаты:

Таблица 1- Результаты вычислений для функции плотности жертв.

Шаг сетки по τ и h	Коэфф. трофотаксиса *k*	Абс. погр. на *R(t,x)*	Отн. погр. на *R(t,x)*, *%*
0.01	0	7.9268e-05	0.0011
0.01	0.5	7.9498e-05	0.0012
0.01	1	7.9728e-05	0.0012
0.01	2	8.0206e-05	0.0012

Для функции плотности хищника (*N(t,x)*) были получены следующие результаты:

Таблица 2 - Результаты вычислений для функции плотности хищника.

Шаг сетки по τ и h	Коэфф. трофотаксиса k	Абс. погр. на $N(t,x)$	Отн. погр. на $N(t,x)$, %
0.01	0	0.0168	0.0369
0.01	0.5	0.0176	0.0387
0.01	1	0.0184	0.0405
0.01	2	0.0201	0.0442

Для функции скорости хищника ($v(t,x)$) были получены следующие результаты:

Таблица 3 - Результаты вычислений для функции скорости хищника.

Шаг сетки по τ и h	Коэфф. трофотаксиса k	Абс. погр. на $v(t,x)$	Отн. погр. на $v(t,x)$, %
0.01	0	7.7716e-15	8.7437e-15
0.01	0.5	0.0034	0.0039
0.01	1	0.0069	0.0077
0.01	2	0.0137	0.0154

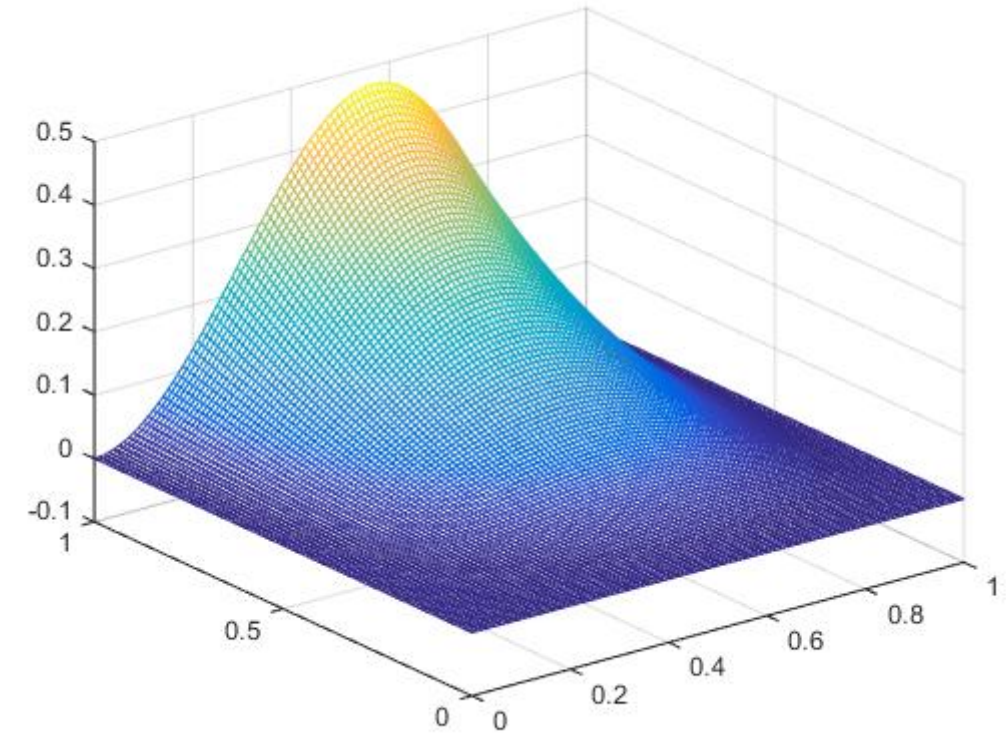

Рисунок 1- График решения для функции плотности хищника при $k=0$.

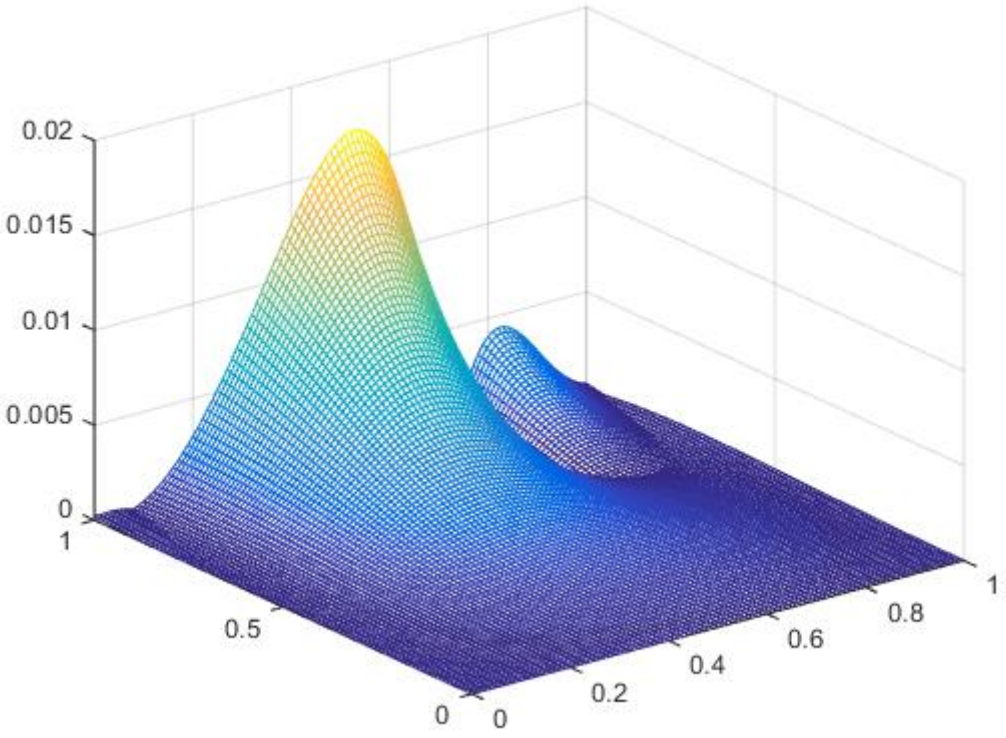

Рисунок 2- График погрешности для функции плотности хищника при $k=0$.

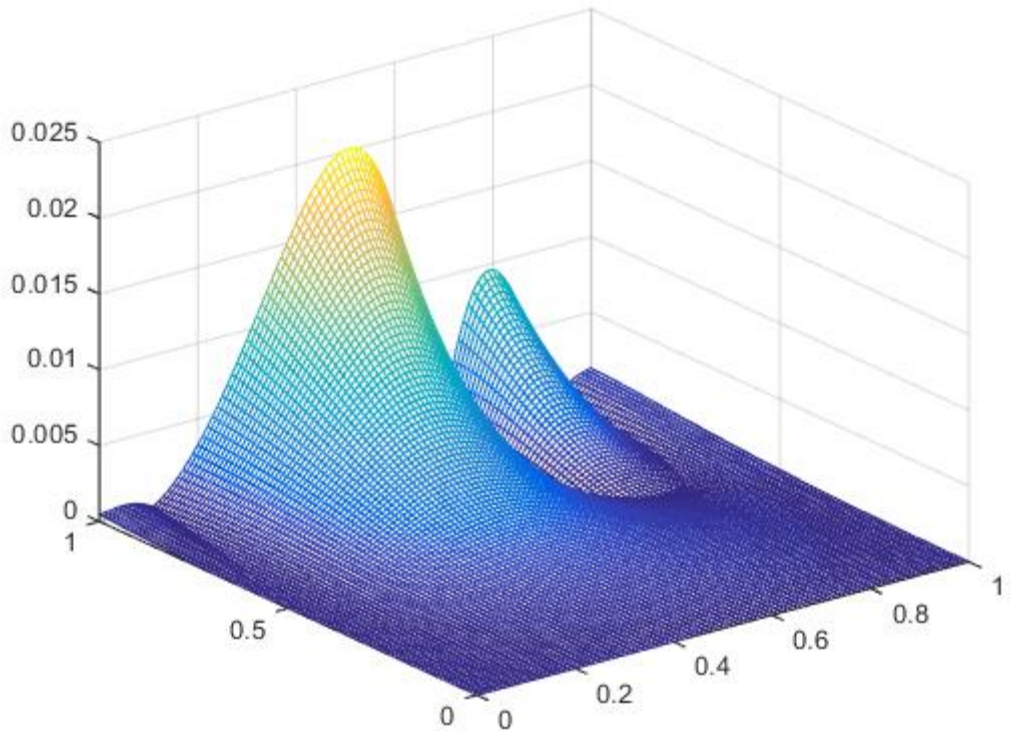

Рисунок 3- График погрешности для функции плотности хищника при $k=2$.

При уменьшении шага по τ и h сетки абсолютные и относительные погрешности вычислений уменьшаются, при тех-же значениях коэффициента трофотаксиса.

Таблица 4 - Результаты вычислений для функции плотности хищника.

Шаг сетки по τ и h	Коэфф. трофотаксиса k	Абс. погр. на $N(t,x)$	Отн. погр. на $N(t,x)$, %
0.1	1	0.2435	0.5391
0.01	1	0.0184	0.0405
0.001	1	0.0018	0.0039

Результаты вычислительных экспериментов при переменном значении коэффициента трофотаксиса.

В случае точного решения вида:

$$R(t,x) = e^{\alpha t}\left(x\left(x-L\right)\right)^2,$$
$$N(t,x) = 4t^2\left(x^2+x^3+x^4\right)\left(x-L\right)^2,$$
$$v(t,x) = 6x\left(x-L\right)^2 t,$$
$$k(t) = t+1,$$
$$0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1.$$

Результаты вычислительных экспериментов представлены в виде таблиц максимальных абсолютных и относительных погрешностей по узлам сетки.

Для функции плотности жертв (*R(t,x)*) были получены следующие результаты:

Таблица 5- Результаты вычислений для функции плотности жертв.

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на *R(t,x)*	Отн. погр. на *R(t,x), %*
0.1	0.0139	0.2010
0.01	1.3867e-04	0.0020
0.001	5.7507e-06	8.3256e-05

Для функции плотности хищника (*N(t,x)*) были получены следующие результаты:

Таблица 6- Результаты вычислений для функции плотности хищника.

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на *N(t,x)*	Отн. погр. на *N(t,x), %*
0.1	0.1360	0.3012

Таблица 6- продолжение.

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на *N(t,x)*	Отн. погр. на *N(t,x), %*
0.01	0.0127	0.0278
0.001	0.0013	0.0028

Для функции скорости жертв (v*(t,x)*) были получены следующие результаты:

Таблица 7- Результаты вычислений для функции скорости хищника.

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на *v(t,x)*	Отн. погр. на *v(t,x), %*
0.1	0.1389	0.1574
0.01	0.0108	0.0121
0.001	0.0010	0.0011

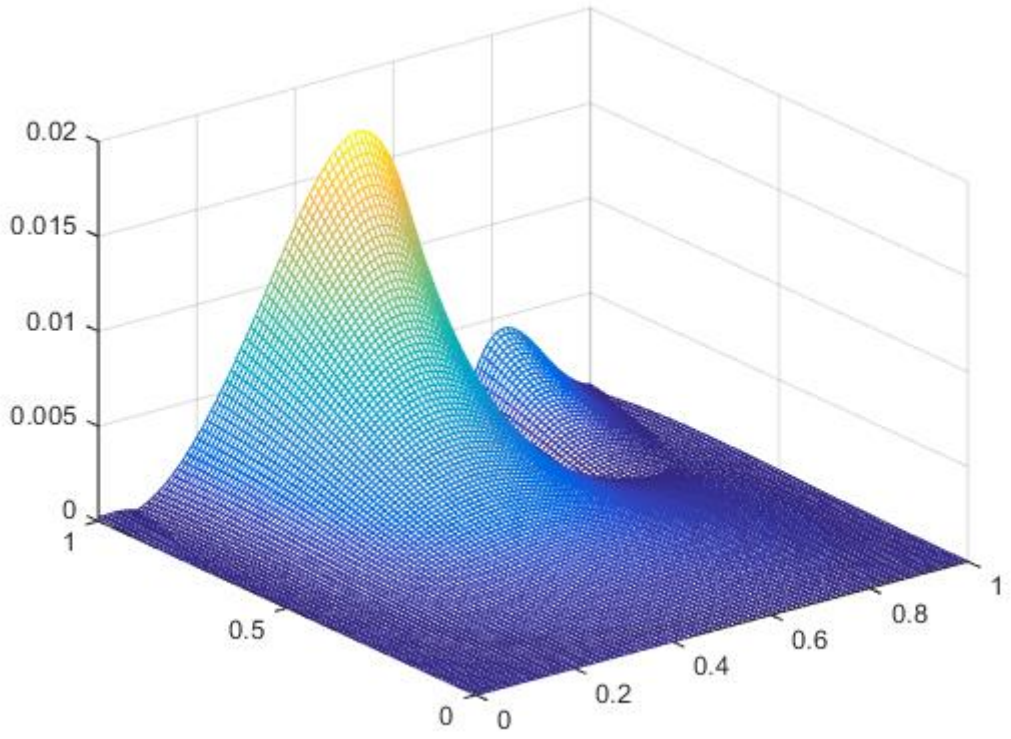

Рисунок 4- График погрешности для функции плотности хищника.

Результаты моих вычислительных экспериментов показали, что нет такого разумного коэффициента трофотаксиса (k) при котором модель (1)-(9) неустойчива на апробированных входных данных. Но это не означает, что при других функциях плотности хищника ($N(t,x)$), жертв ($R(t,x)$) и скорости ($v(t,x)$) модель будет показывать туже устойчивость. Также, в случае переменного значения трофотаксиса, модель демонстрирует устойчивость.

2 Численное решение обратной задачи

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу.

В области $D = \{(t,x)/0 < t < 1,\ 0 < x < 1\}$, требуется найти $R(t,x), N(t,x), v(t,x)$ и k, удовлетворяющие следующей задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(t,x)}{\partial t} = R(t,x)(1 - R(t,x) - aN(t,x)) + \delta_R \dfrac{\partial^2 R(t,x)}{\partial x^2} + f_R(t,x), & (17) \\ \dfrac{\partial N(t,x)}{\partial t} = -\dfrac{\partial (N(t,x)v(t,x))}{\partial x} + aN(t,x)R(t,x) - \mu N(t,x) + \delta_N \dfrac{\partial^2 N(t,x)}{\partial x^2} + f_N(t,x), & (18) \\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} = k\dfrac{\partial R(t,x)}{\partial x} + \delta_V \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_V(t,x), & (19) \end{cases}$$

$$N(0,x) = N_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad (20)$$

$$R(0,x) = R_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad (21)$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad (22)$$

$$\left.\frac{\partial R(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0,1} = 0, \qquad (23)$$

$$\left.\frac{\partial N(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0,1} = 0, \qquad (24)$$

$$v(t,x)\big|_{x=0,1} = 0, \qquad (25)$$

$$v(t,\xi) = v_1(t), \quad 0 \le t \le 1, \qquad (26)$$

где (20)-(22) – начальные условия, (23)-(25) – граничные условия, (26) – условие переопределения. Функции $N_0(t,x)$, $R_0(t,x)$, $v_0(t,x)$, $v_1(t)$, $f_R(t,x)$, $f_N(t,x)$,

$f_V(t,x), a, \mu, \xi$ - заданы. Данная задача является коэффициентной обратной задачей[5].

Поставленную задачу будем решать численно.

Строим равномерную сетку:

$$D_h\{(t_n, x_i)/t_n = n\tau,\ n = 0,1,\ \dots,\ N;\ x_i = ih,\ i = 0,1,\ \dots,\ M\}$$

Задачу (17)-(26) аппроксимируем следующей неявной схемой [3],[4],[5]:

$$\begin{cases} \dfrac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} = r_i^n(1 - r_i^n - a y_i^n) + \delta_R \dfrac{r_{i+1}^{n+1} - 2r_i^{n+1} + r_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_R(n\tau, ih), & (27) \\ \dfrac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = -\left(\left(\dfrac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h}\right)v_i^n + y_i^n\left(\dfrac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h}\right)\right) + a y_i^n r_i^n - \mu y_i^n + \delta_N \dfrac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_N(n\tau, ih), & (28) \\ \dfrac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = \left(\dfrac{r_{i+1}^n - r_i^n}{h}\right)k^{n+1} + \delta_V \dfrac{v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_V(n\tau, ih), & (29) \end{cases}$$

$$r_i^0 = R_0(ih),\ y_i^0 = N_0(ih),\ v_i^0 = v_0(ih),\quad 0 \le i \le M \qquad (30)$$

$$\frac{-3r_0^{n+1} + 4r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{2h} = 0,\ \frac{r_{M-2}^{n+1} - 4r_{M-1}^{n+1} + 3r_M^{n+1}}{2h} = 0,\quad 0 \le n \le N-1 \qquad (31)$$

$$\frac{-3y_0^{n+1} + 4y_1^{n+1} - y_2^{n+1}}{2h} = 0,\ \frac{y_{M-2}^{n+1} - 4y_{M-1}^{n+1} + 3y_M^{n+1}}{2h} = 0,\quad 0 \le n \le N-1, \qquad (32)$$

$$v_0^n = 0,\ v_M^n = 0, \qquad (33)$$

$$v_l^n = v(n\tau, \xi), \qquad (34)$$

где (30) - аппроксимация начальных условий, (31)-(33) - аппроксимация граничных условий, (34) – аппроксимация условия переопределения. Разностная схема (27)-(34) аппроксимирует задачу (17)-(26) с порядком аппроксимации $O(\tau + h)$.

2.2 Алгоритм решения для обратной задачи

Разностную задачу (27)-(34) решаем последовательно по слоям по времени. На каждом слое по времени для каждого уравнения системы (27)-(29) получаем СЛАУ. Для СЛАУ, соответствующих уравнениям (27) и (28), применяем метод Гаусса с выбором главного элемента и метод Q/R разложения. Для СЛАУ соответствующей уравнению (29) в системе уравнения (27)-(29) матрица коэффициентов будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{1,M-1} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{2,M-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{l-1,l-2} & a_{l-1,l-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{l-1,M-1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{l,l-1} & a_{l,l} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{l,M-1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{l+1,l} & a_{l+1,l+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{l+1,M-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{M-2,M-4} & a_{M-2,M-3} & a_{M-2,M-2} & a_{M-2,M-1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{M-1,M-3} & a_{M-1,M-2} & a_{M-1,M-1}
\end{pmatrix}$$

Матрица является сильно разряженной, но отличенной от трёхдиагональной, что не позволяет нам применить метод прогонки. По этой причине был разработан собственный метод решения, скорость которого порядка *O(Cn)*, где *C>0* константа, *n* - размерность матрицы коэффициентов.

Алгоритм заключается в следующем:

1) В СЛАУ в первом уравнении выражаем неизвестную с коэффициентом $a_{1,1}$.
2) Повторяем процедуру 1) для оставшихся уравнений в системе начиная со 2-ого до *l*-1.
3) В последнем уравнении выражаем неизвестную с коэффициентом $a_{M-1,M-2}$.
4) Повторяем процедуру 3) для уравнений системы начиная с *M-2* до *l+1* уравнения.
5) В результате *l*-е уравнение имеет всего одну неизвестную. Решаем его.
6) Совершаем обратный ход для процедур 1),2) и 3),4).

2.3 Вычислительные эксперименты

Были проведены вычислительные эксперименты для задачи (27)-(34) (более подробные данные по вычислительным экспериментам представлены в (ПРИЛОЖЕНИЕ Б)).

В качестве пробных функций для точного решения были взяты следующие функции:

$$R(t,x) = e^{\alpha t}\left(x\left(x-L\right)\right)^2,$$
$$N(t,x) = 4t^2\left(x^2+x^3+x^4\right)\left(x-L\right)^2,$$
$$v(t,x) = 6x\left(x-L\right)^2 t,$$
$$k_T = 1,$$
$$0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1.$$

Результаты вычислительных экспериментов представлены в виде таблиц максимальных абсолютных и относительных погрешностей по узлам сетки.

Таблица 8- Результаты вычислений для функции плотности жертв (*R(t,x)*).

Шаг сетки По τ и h	Абс. погр. на $R(t,x)$	Отн. погр. на $R(t,x)$, %
0.1	0.0900	1.3036
0.01	6.9052e-04	0.0100
0.001	7.0356e-06	7.1459e-06

Таблица 9- Результаты вычислений для функции плотности хищника (*N(t,x)*).

Шаг сетки По τ и h	Абс. погр. на $N(t,x)$	Отн. погр. на $N(t,x)$, %
0.1	0.2831	0.6269
0.01	0.0184	0.0403
0.001	0.0019	0.0042

Таблица 10- Результаты вычислений для функции скорости хищника (*v(t,x)*).

Шаг сетки По τ и h	Абс. погр. на $v(t,x)$	Отн. погр. на $v(t,x)$, %
0.1	0.0884	0.1002
0.01	0.0070	0.0078
0.001	6.2133e-04	1.1136e-04

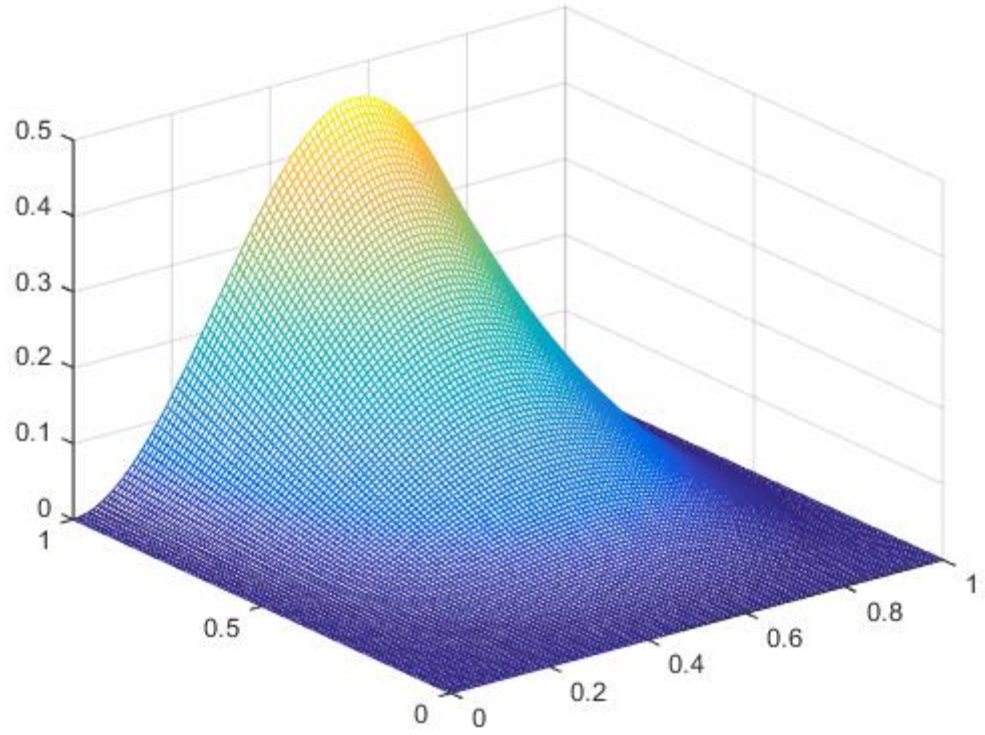

Рисунок 5- График точного решения для функции плотности хищника *N(t,x)*.

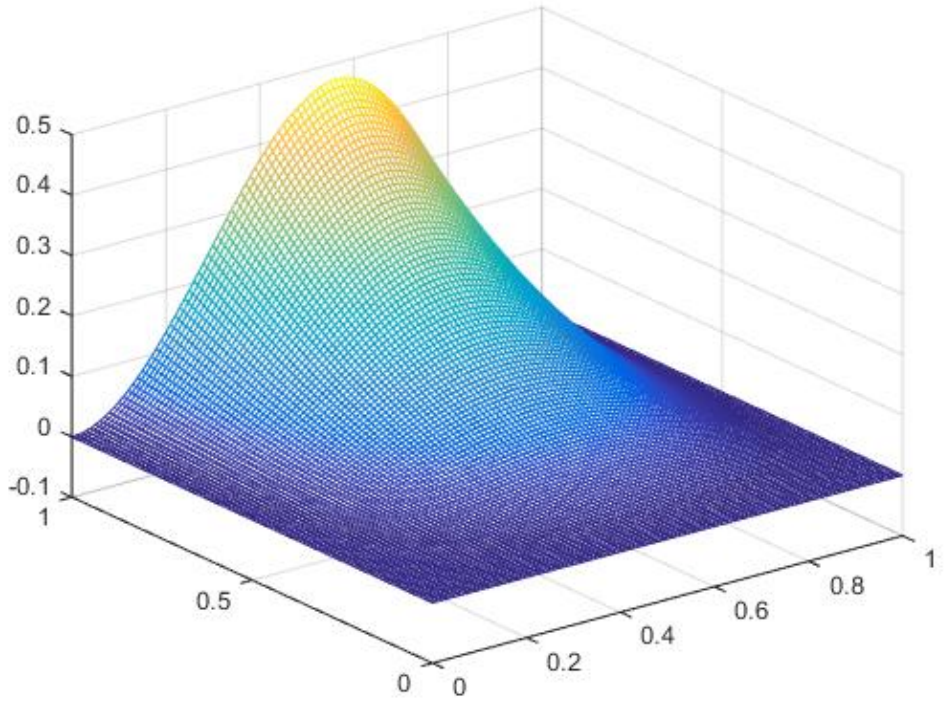

Рисунок 6- График вычисленного решения для функции плотности хищника *N(t,x)*.

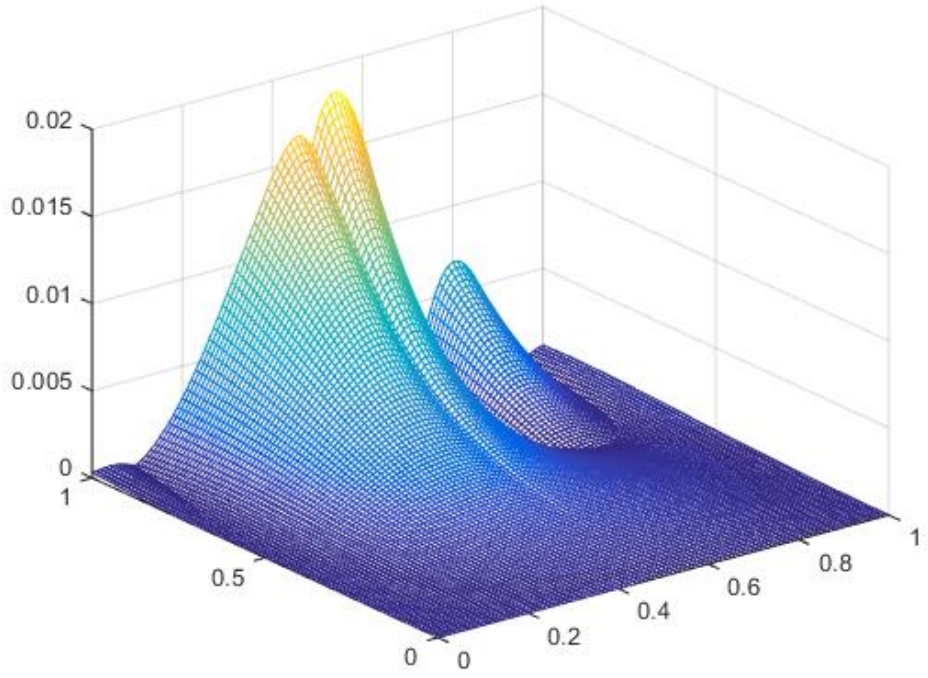

Рисунок 7- График погрешности вычисленного решения для функции плотности хищника *N(t,x)*.

Таблица 11- Результаты вычислений для коэффициента трофотаксиса (k).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на k
0.1	0.129
0.01	0.0120
0.001	0.0011

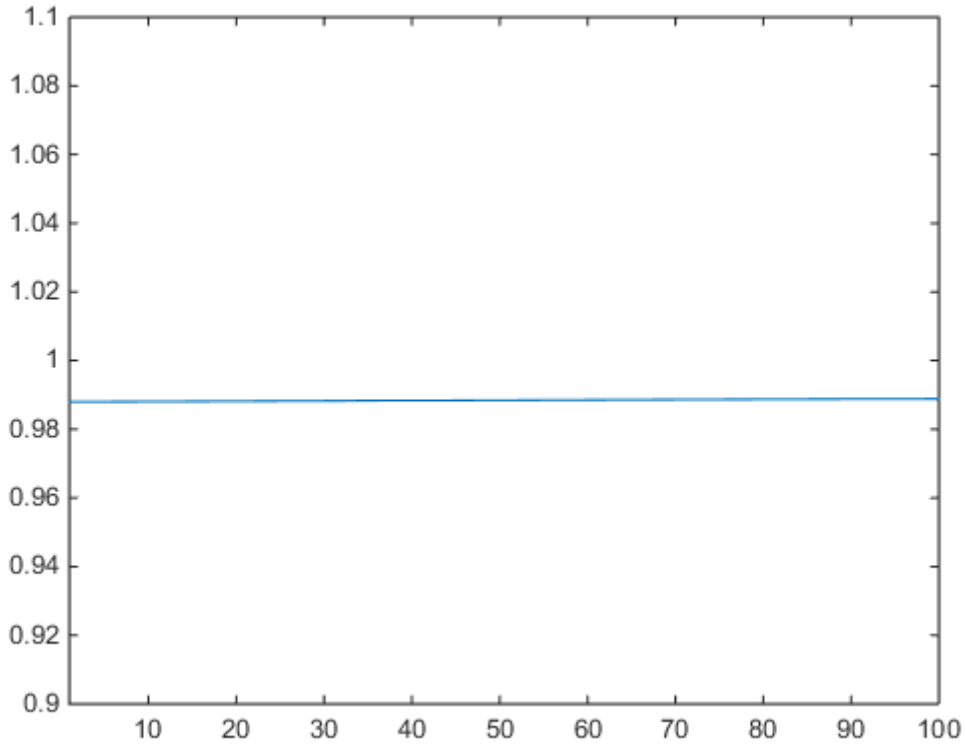

Рисунок 8- График вычисленного решения для коэффициента k с шагом сетки по τ,h=0.01.

Также были проведены вычислительные эксперименты для точного решения, при котором значение коэффициента трофотаксиса зависит от времени.

В качестве пробных функций для точного решения были взяты следующие функции:

$$R(t,x) = e^{\alpha t}\left(x\left(x-L\right)\right)^2,$$
$$N(t,x) = 4t^2\left(x^2+x^3+x^4\right)\left(x-L\right)^2,$$
$$v(t,x) = 6x\left(x-L\right)^2 t,$$
$$k_T(t) = t+1,$$
$$0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1.$$

Результаты вычислительных экспериментов представлены в виде таблиц максимальных абсолютных и относительных погрешностей по узлам сетки.

Таблица 12- Результаты вычислений для функции плотности жертв (*R(t,x)*).

Шаг сетки По τ и h	Абс. погр. на $R(t,x)$	Отн. погр. на $R(t,x)$, %
0.1	0.0900	1.3036
0.01	6.9052e-04	0.0100
0.001	7.0356e-06	7.1459e-06

Таблица 13- Результаты вычислений для функции плотности хищника (*N(t,x)*).

Шаг сетки По τ и h	Абс. погр. на $N(t,x)$	Отн. погр. на $N(t,x)$, %
0.1	0.3205	0.7096
0.01	0.0198	0.0434
0.001	0.002	0.0045

Таблица 14- Результаты вычислений для функции скорости хищника (*v(t,x)*).

Шаг сетки По τ и h	Абс. погр. на $v(t,x)$	Отн. погр. на $v(t,x)$, %
0.1	0.1252	0.1419
0.01	0.0099	0.0112
0.001	8.1456e-04	4.3255e-04

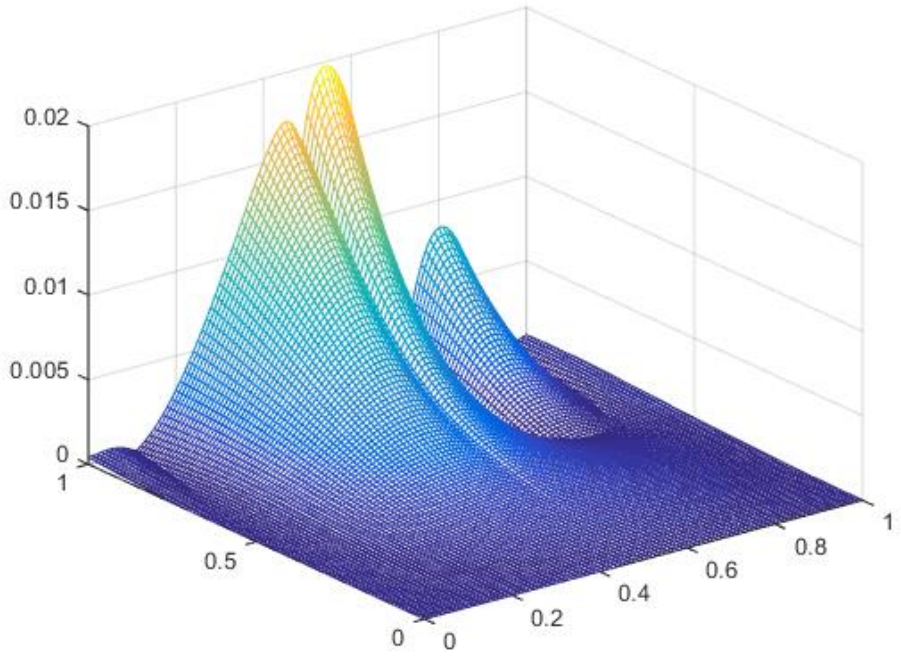

Рисунок 8- График погрешности вычисленного решения для функции плотности хищника *N(t,x)*.

Таблица 15- Результаты вычислений для коэффициента трофотаксиса (*k*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на k
0.1	0.0877
0.01	0.0112
0.001	0.001

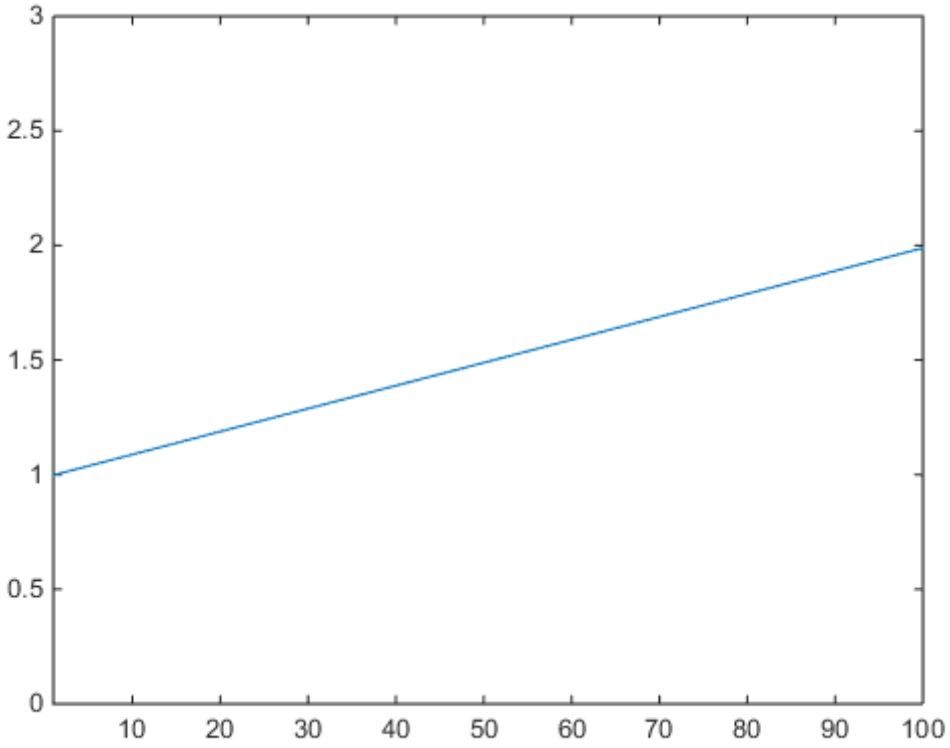

Рисунок 9- График вычисленного решения для коэффициента k с шагом сетки по τ,h=*0.01*.

Сравнение результатов вычислительных экспериментов численного решения прямой и обратной задач для функции плотности хищника при постоянном значении коэффициента трофотаксиса.

Таблица 16- Результаты вычислений численного решения прямой и обратной задач для функции плотности хищника (*N(t,x)*), где k=1.

Шаг сетки По τ и h	Абс. погр. обратной задачи на $N(t,x)$	Отн. погр. обратной задачи на $N(t,x)$	Абс. погр. прямой задачи на $N(t,x)$	Отн. погр. прямой задачи на $N(t,x)$
0.1	0.2831	0.6269	0.2435	0.5391

Таблица 16- продолжение.

Шаг сетки По τ и h	Абс. погр. обратной задачи на $N(t,x)$	Отн. погр. обратной задачи на $N(t,x)$	Абс. погр. прямой задачи на $N(t,x)$	Отн. погр. прямой задачи на $N(t,x)$
0.01	0.0184	0.0406	0.0184	0.0405
0.001	0.0019	0.0042	0.0018	0.0039

Был разработан алгоритм для решения обратной задачи и проведены вычислительные эксперименты. В результате вычислительные эксперименты показали, что погрешность вычислений при численном решении обратной задачи уменьшается при уменьшении шага сетки по τ и h. Также можно наблюдать из сравнения результатов для плотности хищника (*N(t,x)*), что погрешность аппроксимации при численном решении обратной задачи несколько выше, чем при решение прямой.

Также, были проведены вычислительные эксперименты, при которых в условие переопределения искусственно вводилась погрешность. В случае точного решения вида:

$$R(t,x) = e^{\alpha t}\left(x(x-L)\right)^2,$$
$$N(t,x) = 4t^2\left(x^2 + x^3 + x^4\right)(x-L)^2,$$
$$v(t,x) = 6x(x-L)^2 t,$$
$$k_T = 1,$$
$$0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1.$$

При величине введённой погрешности в условие переопределения более 5% были получены следующие результаты.

Результаты вычислительных экспериментов представлены в виде таблиц максимальных абсолютных и относительных погрешностей по узлам сетки.

Таблица 17- Результаты вычислений для функции плотности жертв (*R(t,x)*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $R(t,x)$	Отн. погр. на $R(t,x)$, %
0.1	0.0900	1.3036
0.01	9.4391e-04	0.0100
0.001	7.0356e-06	7.1459e-06

Таблица 18- Результаты вычислений для функции плотности хищника (*N(t,x)*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $N(t,x)$	Отн. погр. на $N(t,x)$, %
0.1	0.2147	0.7096
0.01	2.5815	5.6695
0.001	20.2387	58.3892

Таблица 19- Результаты вычислений для функции скорости хищника (*v(t,x)*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $v(t,x)$	Отн. погр. на $v(t,x)$, %
0.1	0.2321	0.2632

Таблица 19- продолжение.

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $v(t,x)$	Отн. погр. на $v(t,x)$, %
0.01	1.7347	1.9517
0.001	21.7359	23.1940

При величине введённой погрешности в условие переопределения менее 5% были получены следующие результаты.

Результаты вычислительных экспериментов представлены в виде таблиц максимальных абсолютных и относительных погрешностей по узлам сетки.

Таблица 20- Результаты вычислений для функции плотности жертв (*R(t,x)*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $R(t,x)$	Отн. погр. на $R(t,x)$, %
0.1	0.0900	1.3036
0.01	6.9170e-04	0.0100
0.001	8.2316e-06	8.2147e-06

Таблица 21- Результаты вычислений для функции плотности хищника (*N(t,x)*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $N(t,x)$	Отн. погр. на $N(t,x)$, %
0.1	0.3979	0.8810

Таблица 21-продолжение.

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $N(t,x)$	Отн. погр. на $N(t,x)$, %
0.01	0.0217	0.0478
0.001	0.003	0.0054

Таблица 22- Результаты вычислений для функции скорости хищника (*v(t,x)*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $v(t,x)$	Отн. погр. на $v(t,x)$, %
0.1	0.1437	0.1511
0.01	0.0500	0.0563
0.001	0.0034	0.0047

Из моих вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что при малых возмущениях в условии переопределения, погрешность вычислений для численного решения обратной задачи уменьшается с уменьшением шагов сетки по τ и h. А в случаях, когда погрешность в условии переопределения превышает 5%, погрешность вычислений растёт с уменьшением шагов сетки по τ и h.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. Численно решена прямая и обратная задачи для математической модели системы гарпактицид-диатомовых водорослей.
2. Был разработан алгоритм решения обратной задачи.
3. Для реализации численных методов разработана программа при помощи использования пакета прикладных программ Matlab[6].
4. Проведены вычислительные эксперименты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тютюнов, Ю.В. Построение, исследование и приложения математических моделей пространственно временной динамики популяционных систем: автореф. дис. … док. физ.-мат. наук : 03.00.02 / Тютюнов Юрий Викторович. – Красноярск, 2009. -50 с.

2. Кучунова, Е.В. Численная идентификация коэффициентов параболических уравнений / Е.В. Кучунова, В.Е. Распопов – Вестник КрасГУ. Серия Физ.-мат. науки, 2004г. №5/2 с. 7-14.

3. Мандрик, Ю.В. Численная идентификация коэффициентов одномерного параболического уравнения/ Ю.В.Мандрик, В.Е. Распопов- Вестник КрасГУ, 2006г., №1.

4. Жак, Т.Ю. Численная идентификация свободного члена специального вида в параболическом уравнении/ Т.Ю. Жак, В.Е. Распопов// Международная конференция Алгебра и её приложения: Тезисы докладов. Красноярск, 200г. – 186 с.

5.Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики/ А.А. Самарский, П.Н.Вабищевич-Москва, 2009г.

6. Дьяконов, В. П. MATLAB. Полный самоучитель: учеб. пособие / В.П. Дьяконов. – Москва: ДМК Пресс, 2012.-768 с.

7. Бахвалов, Н.С. Численные методы: учебное пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков; Издание 7-е, Бином. Лаборатория знаний, 2012. – 636с.

8. Самарский, А.А. Численные методы: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика»/ А.А. Самарский, А.В. Гулин; Москва: Наука, 1989. – 432 с.

9. Зализняк, В.Е. Теория и практика по вычислительной математике: учебное пособие/ В.Е. Зализняк, Г.И. Щепановская.- Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. – 174 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Результаты вычислительных экспериментов прямой задачи для функций:

$$R(t,x) = e^{\alpha t}\left(x\left(x-L\right)\right)^2,$$
$$N(t,x) = 4t^2\left(x^2+x^3+x^4\right)\left(x-L\right)^2,$$
$$v(t,x) = 6\sin(x)\left(x-L\right)^2 t$$
$$0 \le t \le 1{,}0 \le x \le 1.$$

(В приведённых таблицах взяты максимальные погрешности по узлам сетки.)

Таблица 23- Результаты вычислений для функции плотности жертв *R(t,x)*.

Шаг сетки по τ и h	Коэфф. трофотаксиса k	Абс. погр. на R(t, x)	Отн. погр. на R(t,x)
0.01	0	7.9087e-05	0.0011
0.01	0.5	1.3864e-04	0.0020
0.01	1	1.3866e-04	0.0020
0.01	2	1.3871e-04	0.0012

Таблица 24 - Результаты вычислений для функции плотности хищника.

Шаг сетки по τ и h	Коэфф. трофотаксиса k	Абс. погр. на N(t,x)	Отн. погр. на N(t, x)
0.01	0	0.0164	0.0360
0.01	0.5	0.0114	0.0251
0.01	1	0.0119	0.0262
0.01	2	0.0129	0.0284

Таблица 25 - Результаты вычислений для функции скорости хищника.

Шаг сетки по τ и h	Коэфф. трофотаксиса k	Абс. погр. на N	Отн. погр. на N
0.01	0	2.2909e-07	2.6249e-07
0.01	0.5	0.0035	0.0040
0.01	1	0.0069	0.0079
0.01	2	0.0139	0.0159

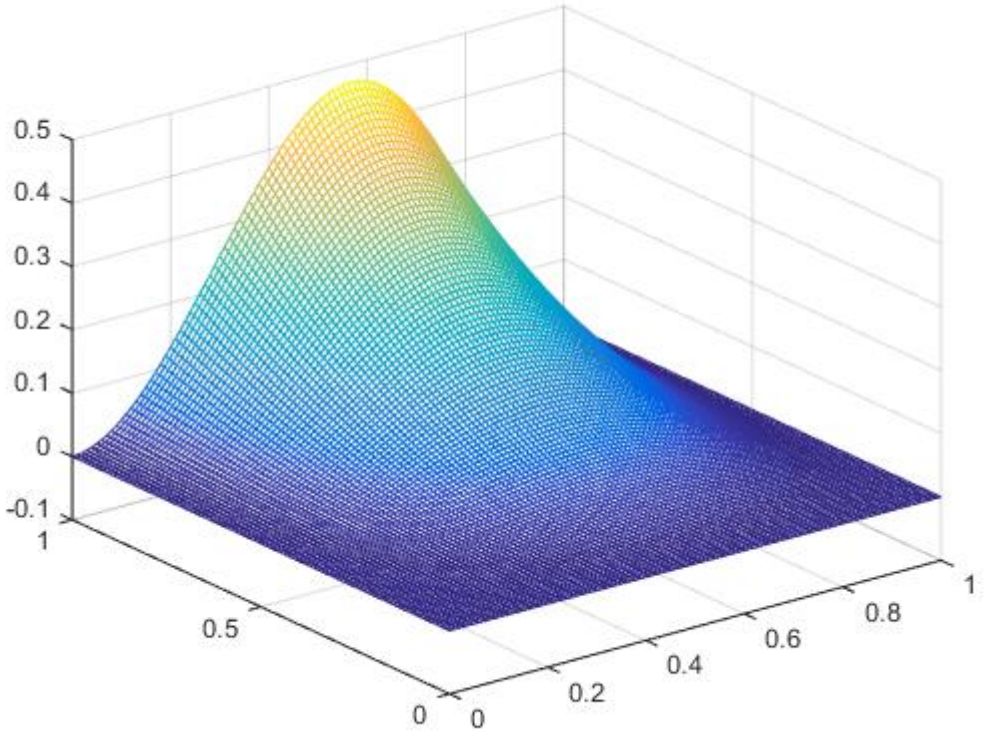

Рисунок 10- График решения для функции плотности хищника при $k=0$.

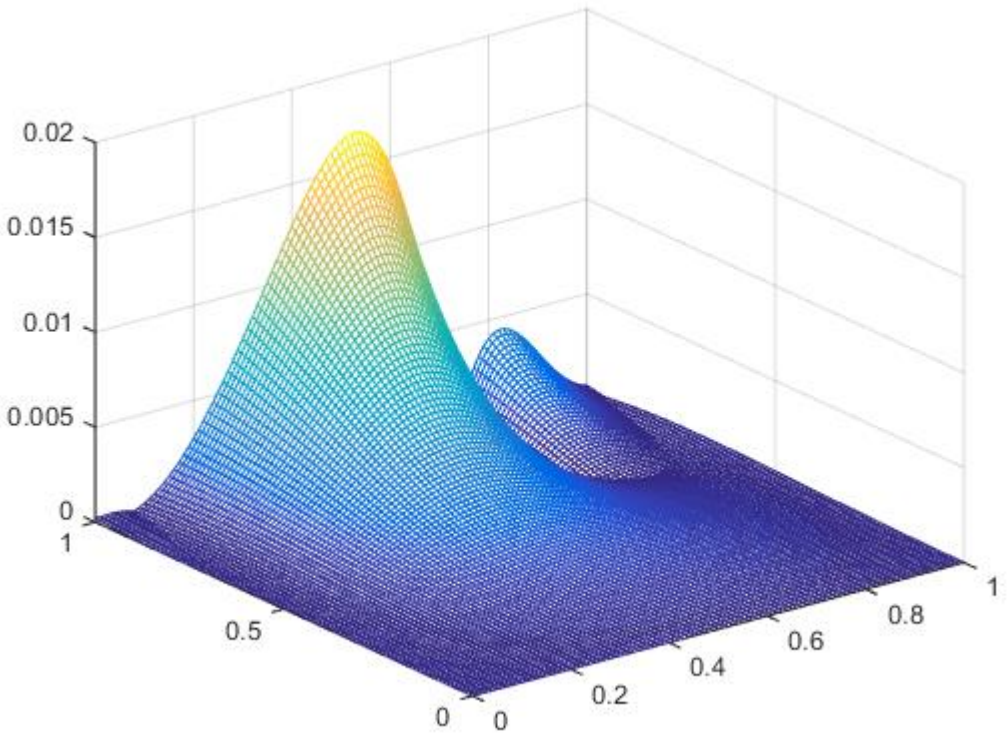

Рисунок 11- График погрешности для функции плотности хищника при *k=0*.

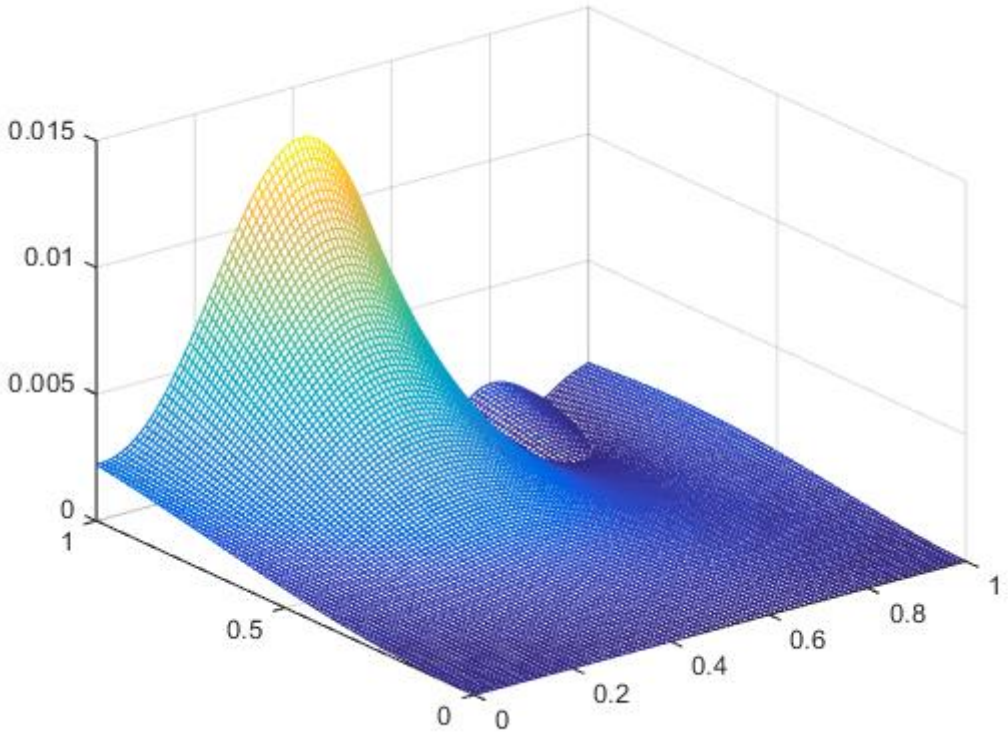

Рисунок 12- График погрешности для функции плотности хищника при *k=2*.

Таблица 26 - Результаты вычислений для функции плотности хищника при уменьшении шага и неизменном коэффициенте трофотаксиса.

Шаг сетки по τ и h	Коэфф. трофотаксиса k	Абс. погр. на N	Отн. погр. на N
0.1	1	0.1312	0.2906
0.01	1	0.0119	0.0262
0.001	1	0.0012	0.0026

Результаты вычислительных экспериментов прямой задачи для функций:

$$R(t,x) = e^{\alpha t}\left(x(x-L)\right)^2,$$
$$N(t,x) = 4t^2\left(x^2 + x^3 + x^4\right)\left(x-L\right)^2,$$
$$v(t,x) = 6\sin(x)\left(x-L\right)^2 t,$$
$$k(t) = t+1,$$
$$0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1.$$

(В приведённых таблицах взяты максимальные погрешности по узлам сетки.)

Для функции плотности жертв (*R(t,x)*) были получены следующие результаты:

Таблица 27- Результаты вычислений для функции плотности жертв.

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на *R(t,x)*	Отн. погр. на *R(t,x), %*
0.1	0.0139	0.2010
0.01	1.3868e-04	0.0020
0.001	5.7375e-06	8.3065e-05

Для функции плотности хищника (*N(t,x)*) были получены следующие результаты:

Таблица 28- Результаты вычислений для функции плотности жертв.

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на *N(t,x)*	Отн. погр. на *N(t,x), %*
0.1	0.1385	0.3067
0.01	0.0124	0.0271
0.001	0.0012	0.0027

Для функции скорости жертв (v*(t,x)*) были получены следующие результаты:

Таблица 29- Результаты вычислений для функции плотности жертв.

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на *v(t,x)*	Отн. погр. на *v(t,x), %*
0.1	0.1388	0.1598
0.01	0.0108	0.0123
0.001	0.0010	0.0012

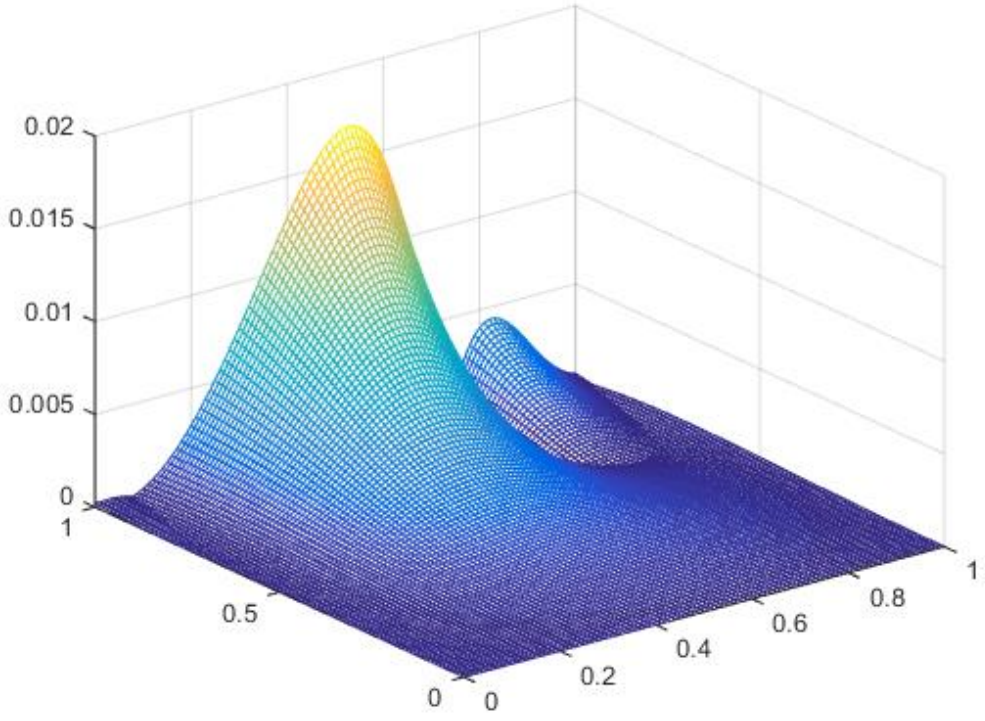

Рисунок 13- График погрешности для функции плотности хищника.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Результаты вычислительных экспериментов прямой задачи для функций:

$$R(t,x) = e^{\alpha t}\left(x\left(x-L\right)\right)^2,$$
$$N(t,x) = 4t^2\left(x^2+x^3+x^4\right)\left(x-L\right)^2,$$
$$v(t,x) = 6\sin(x)\left(x-L\right)^2 t$$
$$0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1.$$

(В приведённых таблицах взяты максимальные погрешности по узлам сетки.)

Таблица 30- Результаты вычислений для функции плотности жертв (*R(t,x)*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $R(t,x)$	Отн. погр. на $R(t,x)$
0.1	0.0900	1.3036
0.01	6.9107e-04	0.0100
0.001	8.1421e-06	1.3418e-05

Таблица 31- Результаты вычислений для функции плотности хищника (*N(t,x)*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $N(t,x)$	Отн. погр. на $N(t,x)$
0.1	0.3108	0.6881
0.01	0.0201	0.0441
0.001	0.0021	0.0044

Таблица 32- Результаты вычислений для функции скорости хищника (*v(t,x)*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $v(t,x)$	Отн. погр. на $v(t,x)$
0.1	0.0883	0.1016
0.01	0.0309	0.0354
0.001	0.003	0.0025

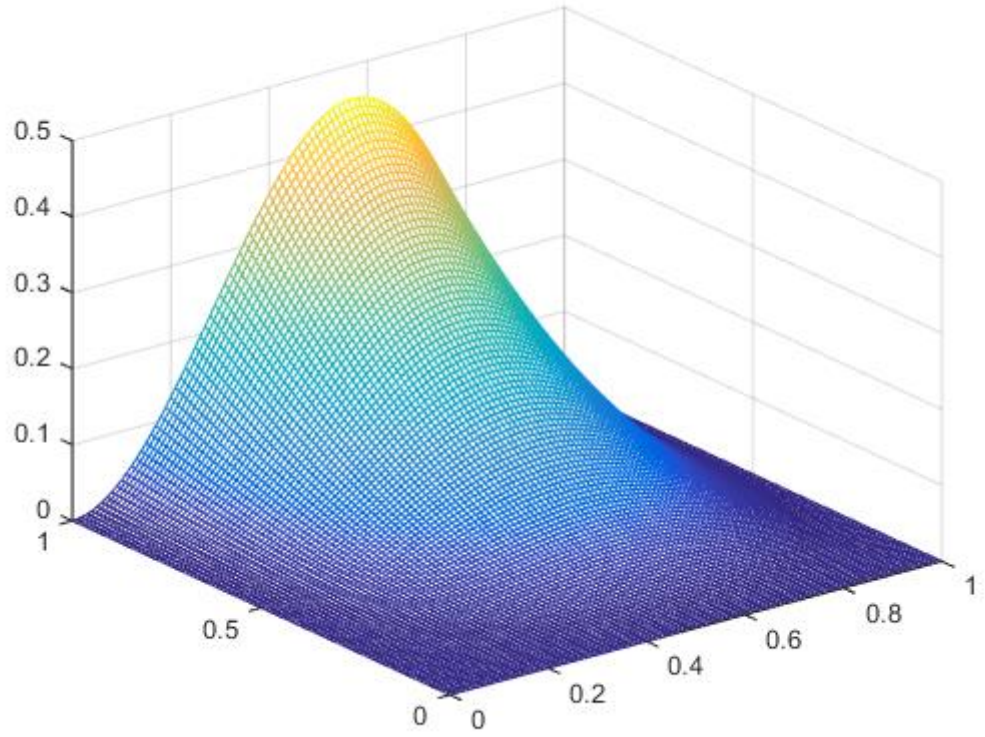

Рисунок 14- График вычисленного решения для функции плотности хищника *N(t,x)*.

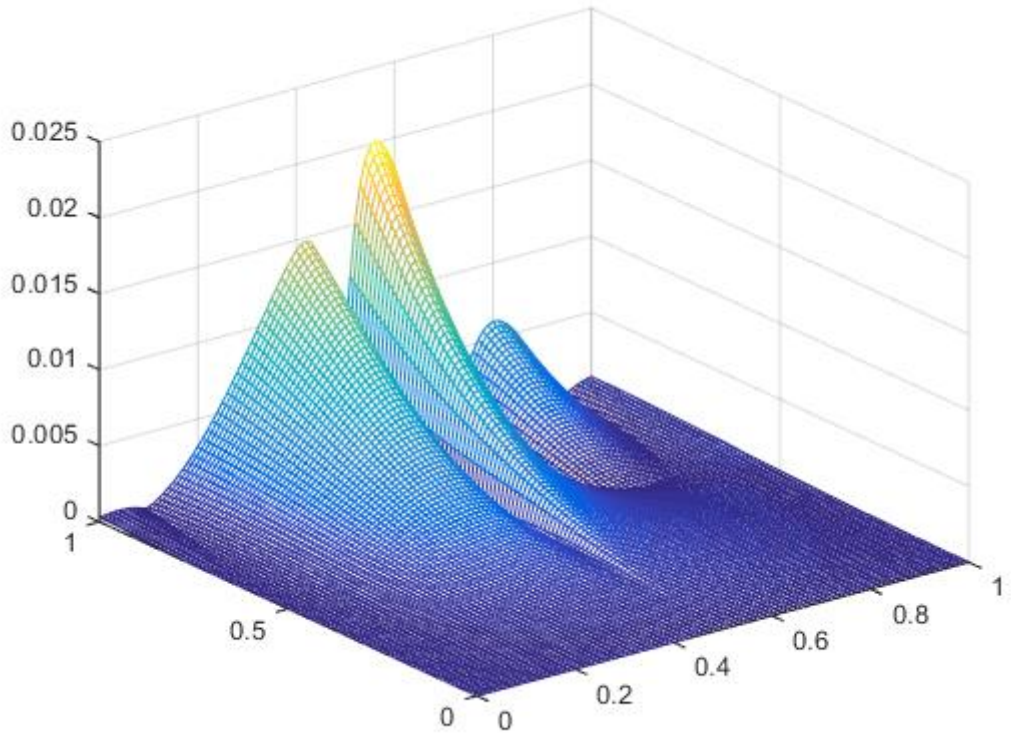

Рисунок 15- График погрешности вычисленного решения для функции плотности хищника *N(t,x)*.

Таблица 33- Результаты вычислений для коэффициента трофотаксиса (k).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на k
0.1	0.119
0.01	0.0110
0.001	0.0012

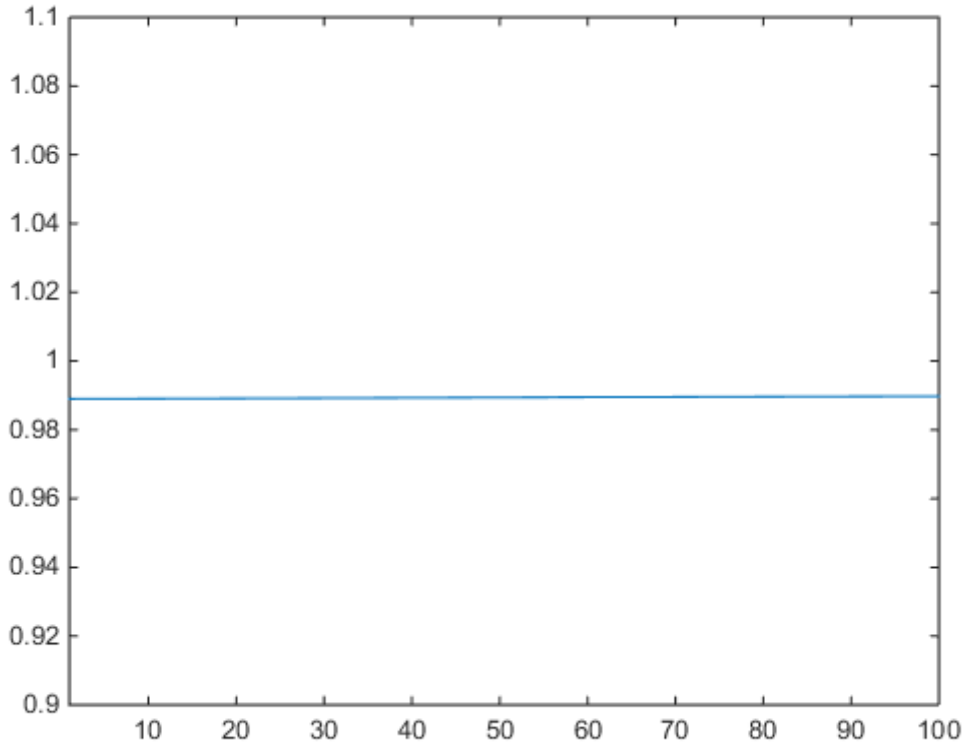

Рисунок 16- График вычисленного решения для коэффициента k с шагом сетки по τ,h=0.01.

$$R(t,x) = e^{\alpha t}\left(x\left(x-L\right)\right)^2,$$
$$N(t,x) = 4t^2\left(x^2+x^3+x^4\right)\left(x-L\right)^2,$$
$$v(t,x) = 6\sin(x)\left(x-L\right)^2 t,$$
$$k(t) = t+1,$$
$$0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1.$$

(В приведённых таблицах взяты максимальные погрешности по узлам сетки.)

Таблица 34- Результаты вычислений для функции плотности жертв ($R(t,x)$).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $R(t,x)$	Отн. погр. на $R(t,x)$
0.1	0.0900	1.3036
0.01	6.9055e-04	0.0100
0.001	8.1421e-06	1.3418e-05

Таблица 35- Результаты вычислений для функции плотности хищника (*N(t,x)*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $N(t,x)$	Отн. погр. на $N(t,x)$
0.1	0.3014	0.6675
0.01	0.0193	0.0424
0.001	0.0017	0.0039

Таблица 36- Результаты вычислений для функции скорости хищника (*v(t,x)*).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на $v(t,x)$	Отн. погр. на $v(t,x)$
0.1	0.1251	0.1440
0.01	0.0099	0.0113
0.001	0.001	0.0017

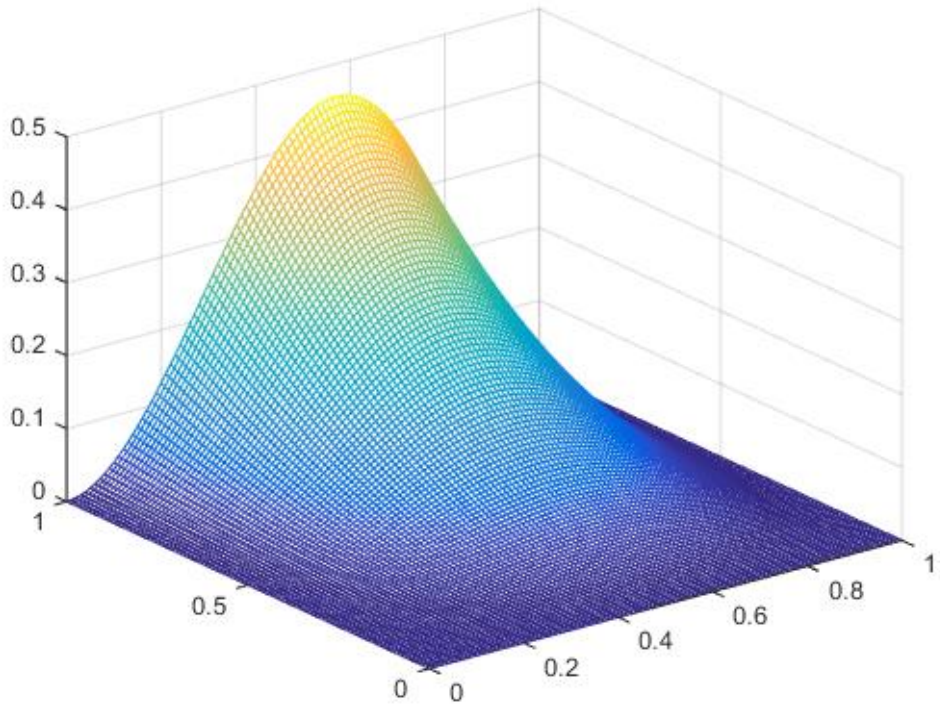

Рисунок 17- График вычисленного решения для функции плотности хищника *N(t,x)*.

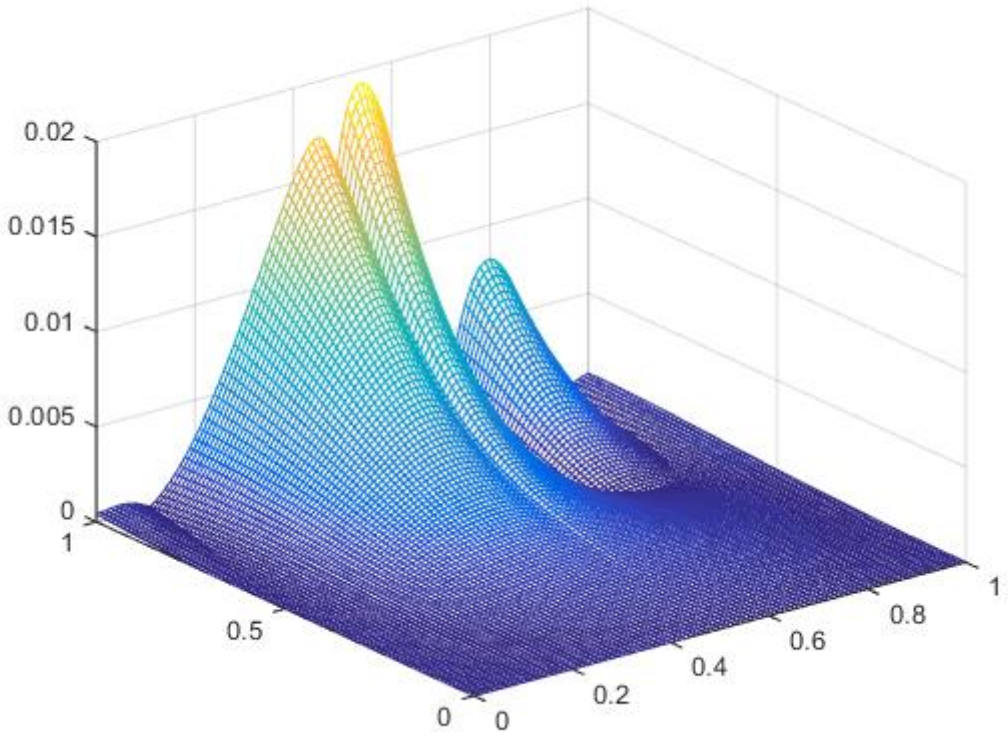

Рисунок 18- График погрешности вычисленного решения для функции плотности хищника *N(t,x)*.

Таблица 37- Результаты вычислений для коэффициента трофотаксиса (k).

Шаг сетки по τ и h	Абс. погр. на k
0.1	0.129
0.01	0.0121
0.001	0.0014

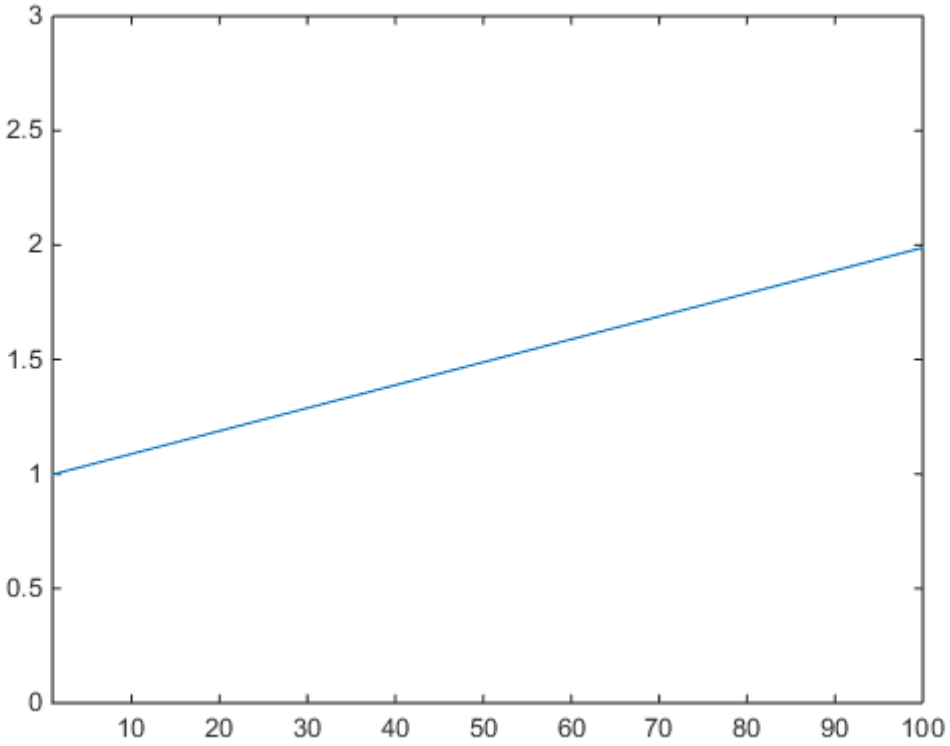

Рисунок 19- График вычисленного решения для коэффициента k с шагом сетки по τ,$h=0.01$.