

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт космических и информационных технологий
Кафедра прикладной математики и компьютерной безопасности

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
А.А. Кытманов

_____ 2017г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

01.03.04 Прикладная математика

Применение метода многоугольника Ньютона
к изучению алгебраических кривых

Руководитель

подпись, дата

профессор, д.ф-м.н.
должность, ученая степень

И.А. Антипова
инициалы, фамилия

Выпускник

подпись, дата

Н.Н. Мутовин
инициалы, фамилия

Красноярск 2017

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме "Применение метода многоугольника Ньютона к изучению алгебраических кривых" содержит 48 страниц текста, 27 рисунков, 7 использованных источников.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ, МНОГОУГОЛЬНИК НЬЮТОНА, СТЕПЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ.

Целью работы является изучение алгоритмов анализа структуры алгебраической кривой в окрестности особой точки. Рассматриваемая техника выделения ветвей алгебраической кривой и нахождение её параметризации имеет широкое применение в прикладных задачах, сводящихся к решению алгебраических уравнений либо к исследованию алгебраических кривых. В работе представлена схема выделения ветви алгебраической кривой с помощью метода многоугольника Ньютона, описан метод нахождения параметризации кривой с помощью степенных преобразований, разобраны примеры. Результат работы может быть использован в учебном процессе при чтении специальных курсов по теории алгебраических кривых.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 3 |
| 1 Ломаная Ньютона | 6 |
| 2 Подготовительная теорема Вейерштрасса | 10 |
| 3 Кратные точки кривой | 13 |
| 4 Ветви кривой, проходящие через начало координат | 14 |
| 5 Ветви, “уходящие” в бесконечность | 18 |
| 6 Степенное преобразование | 21 |
| 7 Примеры | 23 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 46 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ | 47 |

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи естествознания сводятся к решению алгебраических уравнений, их систем, а также к исследованию свойств алгебраических кривых. Решения уравнений и систем делятся на регулярные и сингулярные (особые). В окрестности регулярной точки применима теорема о неявной функции, которая даёт описание всех других близких решений. В окрестности особой точки теорема о неявной функции не работает. Довольно общие подходы к анализу решений в окрестности особой точки даёт степенная геометрия, в основе которой лежит изучение свойств решений уравнения по показателям степеней входящих в него мономов. В частности, эта техника позволяет находить локальные и асимптотические разложения решений нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений, а также их систем [1]. Кроме того, степенная геометрия находит применение в алгебраической геометрии, тропической (идемпотентной) математике.

Рассмотрим полином n переменных

$$f(x) = \sum_{Q \in S} a_Q x^Q, \quad (0.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$, $x^Q = x_1^{q_1} \cdot \dots \cdot x_n^{q_n}$, S — подмножество целочисленной решётки \mathbb{Z}^n , называемое *носителем многочлена* (0.1), предполагается, что $a_Q \neq 0$. *Многогранником Ньютона* многочлена (0.1) называется выпуклая оболочка $\mathcal{N}(f)$ его носителя S .

Каждой грани Γ многогранника $\mathcal{N}(f)$ соответствует *срезка полинома* (0.1)

$$f_\Gamma(x) = \sum_{Q \in \Gamma} a_Q x^Q, \quad (0.2)$$

которая даёт первое приближение соответствующей ветви решения уравнения

$$f(x) = 0. \quad (0.3)$$

В двумерном случае многоугольник Ньютона $\mathcal{N}(f)$ ограничен ломаной $\mathcal{L}(f)$. Ньютон [2] предложил использовать одно ребро ломаной $\mathcal{L}(f)$ для нахождения ветвей решений уравнения (0.3) вблизи нуля, если у много-

члена $f(x)$ отсутствуют свободный и линейный члены. Пюизо [7] использовал все рёбра ломаной Ньютона и дал обоснование решению задачи этим методом. Обзор возможных применений метода многоугольника Ньютона в теории алгебраических функций, теории дифференциальных уравнений был сделан, в частности, Н.Г. Чеботарёвым [5].

Одним из основных инструментов степенной геометрии наряду с многогранником Ньютона является *степенное преобразование*. Оно определяется невырожденной матрицей $B = (\beta_{ij})$ порядка n с вещественными элементами:

$$y_i = x_1^{\beta_{i1}} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_{in}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (0.4)$$

Обратное преобразование

$$x_i = y_1^{\alpha_{i1}} \cdot \dots \cdot y_n^{\alpha_{in}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.5)$$

определяется матрицей $A = (\alpha_{ij}) = B^{-1}$. При преобразовании (0.4) $x^Q = y^{\tilde{Q}}$, где $\tilde{Q}^T = A^T Q^T$, то есть при степенном преобразовании показатели Q испытывают линейное преобразование. Полином (0.1) переходит в полином

$$g(y) = \sum_{\tilde{Q} \in \tilde{S}} a_{\tilde{Q}} y^{\tilde{Q}}, \quad (0.6)$$

где $\tilde{S}^T = A^T S^T$, $g_{\tilde{Q}} = a_Q$. При преобразовании (0.4) срезка переходит в срезку, поэтому операция выделения срезки перестановочна со степенным преобразованием. Кроме того, кривая

$$x_i = b_i t^{p_i} (1 + o(1)), \quad i = 1, \dots, n$$

с векторным порядком $P = (p_1, \dots, p_n)$ переходит в кривую

$$y_i = \tilde{b}_i t^{\tilde{p}_i} (1 + o(1)), \quad i = 1, \dots, n$$

с векторным порядком $\tilde{P} = B P$. Следовательно, в двойственном пространстве \mathbb{R}_*^n порядков P степенное преобразование (0.4) индуцирует линейное преобразование. Важно отметить, что преобразование (0.4) взаимнооднозначно отображает множество $\{x : 0 < |x_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$ на множество $\{y : 0 < |y_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$ тогда и только тогда, когда матрица B

унимодулярна. Применение степенных преобразований для нахождения локальных решений алгебраических уравнений обусловлено возможностью понижать количество координат задачи, особенно для срезов полиномов (см. [1]). Кроме локальных и алгебраических свойств решений по многогранникам Ньютона уравнений можно изучать глобальные свойства решений (см., например, обзор [4]).

Целью настоящей работы является изучение алгоритмов анализа структуры алгебраической кривой в окрестности особой точки, что подразумевает решение следующих задач:

- выделение ветвей плоской алгебраической кривой, проходящих через начало координат и ветвей, уходящих в бесконечность с помощью метода многоугольника Ньютона;

- нахождение разложений ветвей в дробно- степенные ряды;

- применение степенных преобразований к нахождению решений уравнения (0.3) в виде функций $x = \Phi(t)$ от параметра t , либо набора асимптотических разложений по параметру.

Основное содержание работы заключено в семи разделах. Раздел 1-6 содержит основные понятия, факты и алгоритмы решения поставленных задач. В Разделе 7 детально исследуются 3 алгебраические кривые методом многоугольника Ньютона и с помощью подходящих степенных преобразований.

1 Ломаная Ньютона

Плоской аффинной алгебраической кривой называют множество точек аффинной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$f(x, y) = 0, \quad (1.1)$$

где $f(x, y)$ полином от двух переменных x и y с коэффициентами из алгебраически замкнутого поля. При замене системы координат полином f меняется и одной из основных задач геометрии является выбор подходящей системы координат, при переходе к которой заданный полином имеет наиболее простой вид или обладает некоторыми специальными свойствами, позволяющими нам говорить о тех или иных геометрических свойствах нашей кривой. Порядок алгебраической кривой определяется степенью полинома f . При переходе к другой системе координат порядок алгебраической кривой не меняется.

Пусть полином $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y) = \sum_{j+k=0}^n a_{jk} x^j y^k, \quad (1.2)$$

причем хотя бы одно из чисел a_{jk} с $j + k = n$ отлично от нуля, здесь n — это порядок этой кривой. Рассмотрим в координатной (j, k) — плоскости многоугольник Ньютона $\mathcal{N}(f)$ полинома (1.2). Многоугольник Ньютона ограничен ломаной $\mathcal{L}(f)$, которую называют *ломаной Ньютона*. Ломаная Ньютона состоит из конечного числа звеньев (Рис. 1). Подчеркнем, что по определению ломаная Ньютона зависит не только от самой алгебраической кривой, но и от выбранной системы координат. Многоугольник Ньютона в некоторых случаях может оказаться отрезком. Если ломаная Ньютона не содержит точек на неотрицательной полуоси $0j$, то кривая (1.1) имеет ветвь $y = 0$. Если ломаная Ньютона не содержит точек на неотрицательной полуоси $0k$, то кривая (1.1) имеет ветвь $x = 0$. Кривая вида (1.1) проходит через начало координат в том и только в том случае, когда

$$(0, 0) \notin \mathcal{N}(f).$$

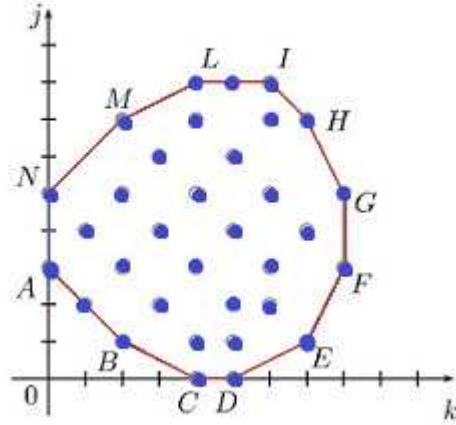


Рисунок 1

Разобьем ломаную Ньютона $\mathcal{L}(f)$ на следующие два множества: *множество обыкновенных звеньев* $\mathcal{L}_o(f)$ и *множество специальных звеньев* $\mathcal{L}_s(f)$. Будем говорить, что звено Γ ломаной Ньютона $\mathcal{L}(f)$ является *обыкновенным*, если направление звена Γ не совпадает с направлением координатных осей $0j$ и $0k$. В противном случае будем говорить, что звено Γ является *специальным*. Очевидно, что

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}_o(f) \cup \mathcal{L}_s(f).$$

Разобьем множество обыкновенных звеньев $\mathcal{L}_o(f)$ на следующие подмножества (см. Рис. 1): $\mathcal{L}_{(0,0)}$ - множество звеньев, ближайших к нулевой точке и имеющих отрицательные угловые коэффициенты; $\mathcal{L}_{(0,\infty)}$ - множество звеньев, ближайших к оси $0k$ и имеющих положительные угловые коэффициенты; $\mathcal{L}_{(\infty,0)}$ - множество звеньев, ближайших к оси $0j$ и имеющих положительные угловые коэффициенты; $\mathcal{L}_{(\infty,\infty)}$ - множество звеньев, отдаленных от нулевой точки и имеющих отрицательные угловые коэффициенты.

Для каждого обыкновенного звена Γ с концевыми точками $(\alpha, k(\alpha))$, $(\beta, k(\beta))$ ($\alpha < \beta$) будем его *длиной* $l = l(\Gamma)$ называть длину его проекции на ось $0k$, т.е. число $k(\beta) - k(\alpha)$. *Характеристическим полиномом* обыкновенного звена Γ будем называть полином вида:

$$\pi_{\Gamma}(t) = \sum_{(j,k) \in \Gamma} a_{jk} t^{k-k(\alpha)}. \quad (1.3)$$

Характеристический полином звена Γ имеет степень $l(\Gamma)$ и не имеет нулевых корней. Число

$$\varepsilon_\Gamma := \frac{\beta - \alpha}{k(\alpha) - k(\beta)} \quad (1.4)$$

будем называть *показателем звена* Γ .

Разобьем множество специальных звеньев $\mathcal{L}_s(f)$ на следующие подмножества (см. Рис. 1): $\mathcal{L}_{0,*}(f)$ - множество горизонтальных звеньев, лежащих на оси $0k$, $\mathcal{L}_{\infty,*}(f)$ - множество горизонтальных звеньев, отдаленных от оси $0k$; $\mathcal{L}_{*,0}(f)$ - множество вертикальных звеньев, лежащих на оси $0j$; $\mathcal{L}_{*,\infty}(f)$ - множество вертикальных звеньев, отдаленных от оси $0j$.

Для каждого горизонтального звена

$$\Gamma \in \mathcal{L}_{(0,*)} \cup \mathcal{L}_{(\infty,*)}$$

с концевыми точками (α, k') , (α, k'') вводится понятие длины, определяются характеристический полином и показатель. *Длина* $l(\Gamma)$ горизонтального звена Γ с концевыми точками (α, k') , (α, k'') совпадает с $k'' - k'$, *характеристический полином* такого звена Γ имеет вид:

$$\pi_\Gamma(t) = \sum_{(j,k) \in \Gamma} a_{jk} t^{k-k'}. \quad (1.5)$$

Характеристический полином горизонтального звена (как и обыкновенного) имеет степень $l(\Gamma)$ и не имеет нулевых корней. Уравнение прямой, проходящей через горизонтальное звено Γ , может быть записано в виде

$$j = \alpha;$$

таким образом, показатель горизонтального звена равен нулю. Наконец, для каждого вертикального звена

$$\Gamma \in \mathcal{L}_{(*,0)} \cup \mathcal{L}_{(*,\infty)}$$

с концевыми точками (j', β) , (j'', β) понятия длины характеристического полинома и показателя вводятся несколько иначе. *Длиной* $l(\Gamma)$ вертикального звена Γ с концевыми точками (j', β) , (j'', β) называется число $j'' - j'$. *Характеристический полином* такого звена Γ определяется равенством

$$\pi_{\Gamma}(t) = \sum_{(j,\beta) \in \Gamma} a_{j\beta} t^{j-j'}. \quad (1.6)$$

Характеристический полином вертикального звена также имеет степень $l(\Gamma)$ и не имеет нулевых корней. Уравнение прямой, проходящей через вертикальное звено Γ , может быть записано в виде

$$k = b;$$

таким образом, показатель вертикального звена следует считать равным бесконечности. Ломаная Ньютона $\mathcal{L}(f)$ несет важную информацию об алгебраической кривой (1.1). Она, вообще говоря, определяет ветви кривой, проходящие через начало координат, ненулевые точки пересечения кривой с осями координат а также неограниченные ветви этой кривой.

2 Подготовительная теорема Вейерштрасса

Структуру алгебраической кривой в окрестности начала координат подсказывает Подготовительная теорема Вейерштрасса (Vorbereitungssatz). Она лежит в основе связей между комплексным анализом и алгеброй и обобщает известное свойство голоморфных функций одного переменного обращаться в нуль как целые степени $z - a$: если $f(a) = 0$ (но не равна нулю тождественно), то в некоторой окрестности точки a

$$f(z) = (z - a)^q g(z), \quad (2.1)$$

где g голоморфна и $g(z) \neq 0$.

В многомерном случае место степени $z - a$ занимает многочлен по одной из переменных, например z_n , с коэффициентами, голоморфно зависящими от остальных переменных $'z = (z_1, \dots, z_{n-1})$.

Теорема 2.1 [6] *Пусть функция f голоморфна в некоторой окрестности U точки $a \in \mathbb{C}^n$ и $f(a) = 0$, но $f('a, z_n)$ не равна нулю тождественно. Тогда в некоторой окрестности V этой точки*

$$f(z) = W('z, z_n)g(z), \quad (2.2)$$

где

$$W('z, z_n) = (z_n - a_n)^q + c_1('z)(z_n - a_n)^{q-1} + \dots + c_q('z)$$

— полином от z_n с голоморфными коэффициентами c_ν в окрестности $'V$, $c_\nu('a) = 0$, а $q \geq 1$ — порядок нуля $f('a, z_n)$ в точке $z_n = a_n$ и $g(z)$ голоморфна в V и не обращается там в нуль.

Функцию $W('z, z_n)$ называют псевдополиномом Вейерштрасса.

Далее будем рассматривать полином $f(x, y)$ двух комплексных переменных x, y . В силу Теоремы 2.1 полином $f(x, y)$ в окрестности нуля представляется в виде

$$f(x, y) = W(x, y)g(x, y), \quad (2.3)$$

где $p \geq 0$, $W(x, y) = y^q + c_{q-1}(x)y^{q-1} + \dots + c_0(x)$ — псевдополином Вейерштрасса. Из представления (2.3) следует, что через начало координат

проходят q ветвей (с учётом кратности) вида

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{\frac{k}{r}}, \quad (2.4)$$

где $r \in \mathbb{N}$. Ряд (2.4) сходится в некоторой окрестности нуля.

Пример 2.1

Рассмотрим полином $f(x, y) = y^2 - y + x$. Исследуем структуру кривой

$$f(x, y) = y^2 - y + x = 0$$

в окрестности начала координат, используя Подготовительную теорему Вейерштрасса. Заметим, что $f(0, 0) = 0$, а $f(0, y) = y^2 - y = 0$ при $y = 0$, $y = 1$, то есть $f(0, y)$ не обращается в нуль тождественно. Представление (2.3) для данного полинома имеет вид

$$y^2 - y + x = W(x, y)g(x, y),$$

где псевдополином Вейерштрасса

$$W(x, y) = y - \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2},$$

а функция

$$g(x, y) = y - \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Действительно, уравнение

$$y^2 - y + x = 0$$

имеет два корня

$$y_1(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2}, \quad y_2(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2},$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Таким образом, через начало координат проходит единственная ветвь $y(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$.

Пример 2.2

Рассмотрим полином $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Заметим, что $f(0, 0) = 0$, а $f(0, y) = y^3 = 0$ при $y = 0$. В данном случае псевдополином $W(x, y)$ совпадает с самим полиномом $f(x, y)$, то есть

$$W(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,$$

а $g(x, y) \equiv 1$. Проверим условие на коэффициенты полинома $W(x, y)$, переписав его для удобства в виде $W(x, y) = y^3 - 3xy + x^3$:

$$c_1(x) = 0, \quad c_2(x) = -3x, \quad c_3(x) = x^3,$$

$$c_1(0) = 0, \quad c_2(0) = 0, \quad c_3(0) = 0.$$

3 Кратные точки кривой

Рассмотрим пересечение кривой (1.1) и прямой

$$L : x = a + \lambda t, \quad y = b + \mu t,$$

когда L проходит через точку $P(a, b)$ кривой. прямая L определяется отношением $\lambda : \mu$. Точки пересечения прямой L и кривой (1.0) соответствует корнем уравнения

$$f(a + \lambda t, b + \mu t) = 0.$$

Разложим левую часть этого уравнения по степеням t :

$$(f_x \lambda + f_y \mu)t + \frac{1}{2!}(f_{xx} \lambda^2 + 2f_{xy} \lambda \mu + f_{yy} \mu^2)t^2 + \dots = 0.$$

Предположим, что все производные многочлена f до порядка $r - 1$ включительно обращаются в нуль в точке P и хотя бы одна производная r -го порядка отлична от нуля в этой точке. Тогда всякая прямая, проходящая через P , имеет с кривой по меньшей мере r - кратное пересечение в точке P . В этом случае P называют *точкой кратности r* . Точка кривой (1.1), имеющая кратность 1, называют *обыкновенной точкой* кривой. Точки кратности 2 и более называют *особыми точками*.

4 Ветви кривой, проходящие через начало координат

В данном разделе рассмотрим случай, когда начало координат $(0, 0)$ является точкой кривой (1.1); в силу (1.2) это означает, что $a_{00} = 0$ или, то, что точка $(0, 0) \notin \mathcal{N}(f, \sigma)$. Обычно при анализе нулевой точки кривой различают два случая, когда эта точка является *обыкновенной* и когда она является *особой*. В первом случае предполагается, что одна из производных $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$, то есть одно из чисел a_{01} , a_{10} отлично от нуля; в этом случае через нулевую точку проходит только одна ветвь кривой, которая (в малой окрестности начала координат) допускает аналитическое представление либо вида $y = \phi(x)$, $(\phi(0) = 0)$, либо вида $x = \psi(y)$, $(\psi(0) = 0)$; здесь $\phi(x)$ или $\psi(y)$ непрерывная функция, определенная в достаточно малой окрестности нуля. Во втором случае предполагается, что обе производные функции $f(x, y)$ в нулевой точке (т.е. числа a_{01} , a_{10}) обращаются в нуль; в этом случае кривая (1.1) в окрестности начала координат устроена более сложным образом— через нее проходит несколько ветвей вида $y = \phi(x)$ (или $x = \psi(y)$). В дальнейшем предполагается, что начало координат является особой точкой.

Ломаная Ньютона в основных случаях позволяет почти без вычислений определить не только число ветвей кривой (1.1), проходящих через начало координат, но и первые ненулевые члены разложений (2.4) этих ветвей.

Теорема 4.1 Пусть $\mathcal{L}(f)$ — ломаная Ньютона алгебраической кривой (1.1). Каждая проходящая через нулевую точку ветвь кривой (1.1) представима в виде

$$\phi(x) = cx^\varepsilon(1 + z(x)), \quad (4.1)$$

где ε — показатель некоторого звена $\Gamma \in \mathcal{L}_{(0,0)}$, c — корень характеристического полинома этого звена и $z(x)$ непрерывная в нуле функция, причем $z(0) = 0$.

Доказательство этой теоремы фактически содержится в книге [3].

Более того, совокупность всех одночленов

$$\{cx^\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon_\Gamma, \pi_\Gamma(c) = 0, \Gamma \in \mathcal{L}_{(0,0)}\} \quad (4.2)$$

совпадает с первыми ненулевыми членами разложений (2.4), соответствующих проходящим через нулевую точку ветвям функций $\phi(x)$ в дробно-степенные ряды. Наконец, сумма всех степеней характеристических полиномов звеньев множества $\mathcal{L}_{(0,0)}$ в комплексном случае совпадает с числом правильных ветвей кривой (1.1), проходящих через начало координат, а в вещественном случае совпадает или на четное число превышает число этих ветвей.

Для получения следующих (ненулевых) членов разложений, соответствующих проходящим через начало координат ветвям кривой (1.1), используются такие рассуждения. Выбирается один из одночленов (4.2) и в уравнении (1.1) выполняется замена переменной

$$y = cx^\varepsilon(1 + \tilde{y}), \quad (4.3)$$

в результате которой уравнение (1.1) переходит в новое уравнение

$$f^\circ(x, \tilde{y}) = 0. \quad (4.4)$$

Полученное уравнение не эквивалентно исходному, так как его решения вида $\tilde{y} = \psi(x)$ по формуле (4.3) определяют те и только те решения уравнения (1.1), которые допускают представление (4.3). Уравнение (4.4) по сравнению с уравнением (1.1) обладает двумя особенностями. Во-первых, оно имеет еще решение $x = 0$ и кратность этого решения заведомо превышает кратность решения уравнения (1.1), а именно, можно показать, что она превышает число $\frac{ak(b)-bk(a)}{k(b)-k(a)}$. Во-вторых, в общем случае показатель ε является рациональным числом $\varepsilon = \frac{p}{q}$, и поэтому его левая часть $f^\circ(x, \tilde{y})$ является многочленом от переменных $x^{\frac{1}{q}}\tilde{y}$. Для его исследования метод многоугольника Ньютона и, в частности, Теорема 4.1 непосредственно неприменимы. Однако, анализ решений вида $\tilde{y} = \psi(x)$ уравнения (4.4) эквивалентен анализу решений уравнения

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0, \quad (4.5)$$

в котором левая часть получена из функции $f^\circ(x, \tilde{y})$ при помощи замены переменной $x^q = \tilde{x}$ и отбрасыванием множителя \tilde{x}^h с максимально возможным h . Применение Теоремы 4.1 к уравнению (4.5) позволяет определить для всех его решений вида $\tilde{y} = \tilde{\phi}(\tilde{x})$ первые члены в разложениях по степеням (целым или дробным) переменной \tilde{x} и, следовательно, вторые члены в разложениях по степеням (целым или дробным) переменной x .

Замечание 4.1 *Следует иметь в виду, что уравнение (4.5) может иметь и решение $\tilde{y} = 0$. Это означает, что исходное уравнение (1.1) имеет решение $y = sx^\varepsilon$.*

Аналогичным образом можно поступать для определения всех ненулевых членов в разложениях (2.4). В результате, при построении разложения некоторой фиксированной ветви кривой, определяемой уравнением (1.1), будет получена (конечная или бесконечная) последовательность уравнений

$$f_{(n)}(x_{(n)}, y_{(n)}) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

с

$$f_{(0)}(x, y) = f(x, y), \quad (x_{(0)} = x, y_{(0)} = y)$$

и

$$f_{(n+1)}(x_{(n+1)}, y_{(n+1)}) = \tilde{f}_{(n)}(\tilde{x}_{(n)}, \tilde{y}_{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Общая схема выделения некоторой фиксированной ветви кривой (1.1) выглядит следующим образом:

- 1) на шаге n имеем уравнение $f_{(n)}(x_{(n)}, y_{(n)}) = 0$;
- 2) строим многоугольник Ньютона $\mathcal{N}(f_{(n)})$;
- 3) выбираем одно из звеньев $\Gamma_{(n)} \in \mathcal{L}_{(0,0)}(f_{(n)})$;
- 4) находим характеристический полином $\pi_{\Gamma_{(n)}}(t)$ и показатель звена $\varepsilon_{(n)}$;
- 5) выбираем один из корней $c_{(n)}$ полинома $\pi_{\Gamma_{(n)}}(t)$ и определяем главный член $c_{(n)}x_{(n)}^{\varepsilon_{(n)}}$ ветви, соответствующей выбранному звену $\Gamma_{(n)}$;

б) с помощью замены вида (4.3) переходим на шаг $(n + 1)$, при этом $f_{(n+1)}(x_{(n+1)}, y_{(n+1)}) = \tilde{f}_{(n)}(\tilde{x}_{(n)}, \tilde{y}_{(n)})$.

Замечание 4.2 (I) *Описанная процедура конечна в том и только том случае, когда разложение (2.4) соответствующей ветви кривой (1.1) оказывается конечным.*

(II) *Для каждой ветви последовательность длин $(l(\Gamma_{(n)}))$ звеньев $\Gamma_{(n)}$ невозрастающая и стабилизируется к некоторому натуральному числу \varkappa (это число совпадает с кратностью рассматриваемой ветви).*

(III) *Равенство $\varkappa(\cdot) = 1$ для исследуемой ветви определяется за конечное число шагов по уравнениям (4.6); равенство $\varkappa(\cdot) = \varkappa$ с $\varkappa > 1$ устанавливается лишь в результате бесконечного числа шагов по уравнениям (4.6).*

(IV) *В случае вещественного полинома (1.2) ветвь кривой (1.1) является вещественной при $x > 0$ ($x < 0$) в том и только в том случае, когда все коэффициенты s_k соответствующего разложения (2.4) этой ветви являются вещественными.*

5 Ветви, “уходящие” в бесконечность

Здесь мы рассмотрим те ветви, для которых либо одна из координат стремится к бесконечности, а вторая - к нулевому значению: $x \rightarrow 0, y \rightarrow \infty$ или $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$; либо обе координаты стремятся к бесконечности: $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$.

Для исследования ветвей кривой (1.1), для которых $x \rightarrow 0, y \rightarrow \infty$ или $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$, или $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ сделаем в уравнении (1.1) соответствующую замену переменной

$$x = u, y = \frac{1}{v}; x = \frac{1}{u}, y = v; x = \frac{1}{u}, y = \frac{1}{v}. \quad (5.1)$$

При каждой из этих замен левая часть уравнения (1.1) обращается в дробь, обращение в нуль числителя которой является новым алгебраическим уравнением, степень которого совпадает со степенью (1.1). Применяя к каждому из полученных трех уравнений Теорему 4.1 и последующие за ней рассуждения находим аналогичные (2.4) представления искомым ветвей в переменных u и v :

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u^{\frac{k}{r}}. \quad (5.2)$$

Далее возвращаемся к исходным переменным x и y . Используя стандартные правила обращения со степенными рядами, получаем представления этих ветвей в соответствующем виде

$$y = \sum_{k=\nu}^{\infty} c_k x^{\frac{k}{r}} \quad (\nu < 0), \quad x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty, \quad (5.3)$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{-\frac{k}{r}}, \quad x \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow 0, \quad (5.4)$$

$$y = \sum_{k=\nu}^{\infty} c_k x^{-\frac{k}{r}} \quad (\nu < 0), \quad x \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Тем самым задача сводится к изучению проходящих через начало координат ветвей некоторых вспомогательных кривых.

В действительности, для построения представлений (5.3)–(5.5) строить соответствующие представления (5.2) нет необходимости; в частности первые их члены определяются непосредственно из диаграммы Ньютона, построенной для уравнения (1.1). В самом деле, при каждой из замен переменных (5.1) диаграмма Ньютона для уравнения (1.1) переходит в диаграмму Ньютона вспомогательных кривых. Так, при первой из этих замен $(x = u, y = \frac{1}{v})$ исходная диаграмма Ньютона симметрично отражается относительно оси абсцисс, а затем сдвигается вверх и в результате снова оказывается в первом квадранте; при этом звенья $\mathcal{L}_{(\infty,0)}$ исходной ломаной Ньютона переходят в звенья $\mathcal{L}_{(0,0)}$ новой ломаной Ньютона для соответствующей вспомогательной кривой. Аналогично, при второй замене $(x = \frac{1}{u}, y = v)$ в новой ломаной Ньютона на месте звеньев $\mathcal{L}_{(0,0)}$ оказывается звенья $\mathcal{L}_{(\infty,0)}$ старой ломаной Ньютона. Наконец, при третьей замене $(x = \frac{1}{u}, y = \frac{1}{v})$ в звенья $\mathcal{L}_{(0,0)}$ новой ломаной Ньютона переходят звенья $\mathcal{L}_{(\infty,\infty)}$ старой ломаной Ньютона. Справедлива

Теорема 5.1 Пусть $\mathcal{L}(f, \sigma)$ — ломаная Ньютона алгебраической кривой (1.1). Тогда множество $\mathcal{L}_{(0,\infty)}$, $\mathcal{L}_{(\infty,0)}$ или $\mathcal{L}_{(\infty,\infty)}$ непусто в том и только в том случае, когда кривая (1.1) имеет “убегающие” в бесконечность ветви кривой (1.1) соответственно одного из видов $x \rightarrow 0, y \rightarrow \infty$; $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$; $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$. Каждая такая “убегающая” в бесконечность ветвь представима в виде

$$\phi(x) = cx^\varepsilon(1 + z(x)), \quad (5.6)$$

где ε — показатель некоторого звена Γ соответственно из $\mathcal{L}_{(0,\infty)}$, $\mathcal{L}_{(\infty,0)}$ или $\mathcal{L}_{(\infty,\infty)}$, c — корень характеристического полинома этого звена и $z(x)$ — функция, непрерывная в нуле и обращающаяся в нуль в нуль в первом случае, и стремящаяся к нулю при $x \rightarrow \infty$ во втором и третьем случаях. Более того, совокупность всех одночленов

$$\begin{aligned} & \{\psi(x) = cx^\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon(\Gamma), \pi_\Gamma(c) = 0, \Gamma \in \mathcal{L}_{0,\infty}\} \\ & \{\psi(x) = cx^\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon(\Gamma), \pi_\Gamma(c) = 0, \Gamma \in \mathcal{L}_{\infty,0}\} \\ & \{\psi(x) = cx^\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon(\Gamma), \pi_\Gamma(c) = 0, \Gamma \in \mathcal{L}_{\infty,\infty}\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

совпадает с первыми ненулевыми членами соответственно разложений (5.3)–(5.5) в ряды по степеням $x^{\frac{1}{r}}$, соответствующих “убегающих” в бесконечность ветвей кривой (1.1).

6 Степенные преобразования

Рассмотрим полином

$$f(x) = \sum a_Q x^Q, \quad (6.1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2$, $x^Q = x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2}$, $a_Q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ломаная Ньютона $\mathcal{L}(f)$, будучи границей многогранника Ньютона $\mathcal{N}(f)$, состоит из граней размерности 0 и 1. Каждой грани Γ сопоставим полином

$$f_\Gamma(x) = \sum_{Q \in \Gamma \cap S} a_Q x^Q, \quad (6.2)$$

называемый *срезкой* полинома $f(x)$, здесь S – носитель полинома $f(x)$.

Пусть \mathbb{R}_*^2 есть двойственное пространство к \mathbb{R}^2 и точка $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$. *Нормальным конусом* U к грани Γ называется множество всех точек $P \in \mathbb{R}_*^2$, для которых скалярное произведение $\langle P, Q \rangle$ достигает максимума по $Q \in S$ в точках $Q \in \Gamma$. Легко видеть, что нормальный конус U для одномерной грани представляет собой луч, сонаправленный с внешней нормалью к этой грани. Если грань нульмерная (т.е. вершина), то нормальный конус представляет собой сектор, ограниченный лучами, ортогональными смежным граням.

Степенным преобразованием называется отображение вида

$$\log x = A \log y, \quad (6.3)$$

где $\log x = (\log x_1, \log x_2)^T$, $\log y = (\log y_1, \log y_2)^T$, $A = (a_{ij})$ – невырожденная матрица 2-го порядка с рациональными элементами. Моном x^Q преобразуется в моном $y^{\tilde{Q}}$, причем точка Q переходит в точку \tilde{Q} по правилу

$$\tilde{Q}^T = A^T Q^T. \quad (6.4)$$

Сформулируем теорему, лежащую в основе метода степенных преобразований, в интересующем нас двумерном случае. Для произвольной размерности она доказана в книге [1].

Теорема 6.1 [1] *Для грани Γ многоугольника $\mathcal{N}(f)$ существует степенное преобразование (6.3) с унимодулярной матрицей A , которое преобразует срезку $f_\Gamma(x)$ к виду*

$$f_\Gamma(x) = y_1^q g(y_2). \quad (6.5)$$

Далее опишем схему вычисления асимптотических разложений решений алгебраических уравнений

$$f(x_1, x_2) = 0.$$

Шаг 1. Построим многоугольник Ньютона полинома $f(x_1, x_2)$.

Шаг 2. Выделим грани размерности 1, принадлежащие множеству $\mathcal{L}_{(0,0)}$ ломаной Ньютона.

Шаг 3. Для каждой грани Γ выполним степенное преобразование $x \rightarrow y$ как в теореме 6.1 и получим уравнение срезки $g(y_2) = 0$.

Далее выделяются два возможных случая.

Случай 1. Полином $g(y_2)$ имеет простой корень y_2^0 . В этом случае применима теорема о неявной функции, что даёт возможность найти параметрическое разложение для решений уравнения $f(x_1, x_2) = 0$

Случай 2. Полином $g(y_2)$ имеет кратный корень y_2^0 . В этом случае строится многогранник Ньютона полного полинома $f_1(y_1, y_2)$ и далее процедура повторяется с Шага 1.

7 Примеры

В данном разделе мы исследуем несколько алгебраических кривых с помощью метода многоугольника Ньютона, а именно, найдём все ветви, проходящие через начало координат, в виде разложений рядов, а также представление их в параметрическом виде, используя подходящие степенные преобразования.

7.1 Лист Декарта

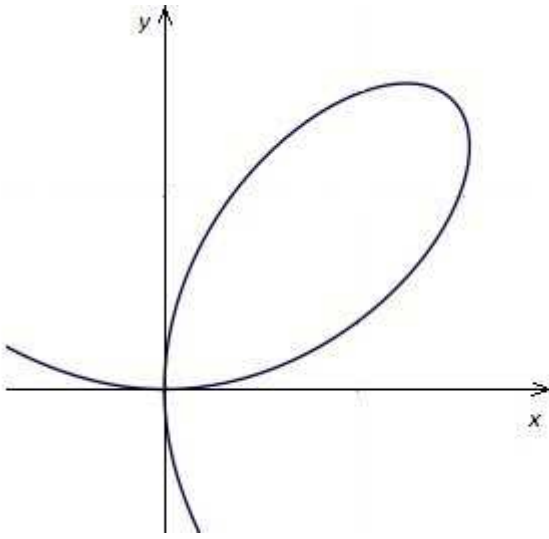


Рисунок 2

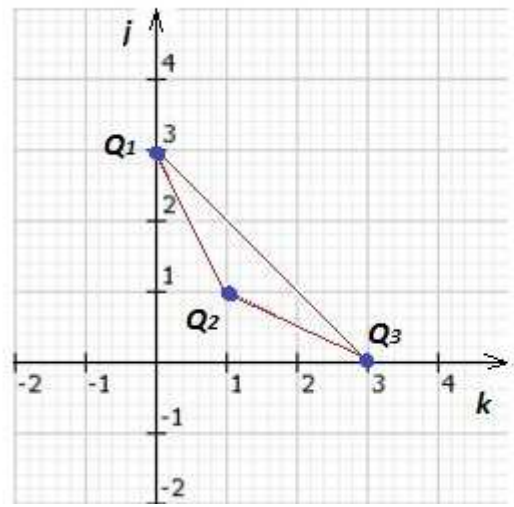


Рисунок 3

Рассмотрим алгебраическую кривую, которая называется лист Декарта и определяется уравнением

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0. \quad (7.1)$$

Многоугольник Ньютона для данной кривой, изображенный на Рис. 3, есть выпуклая оболочка трех точек $Q_1 = (3, 0)$, $Q_2 = (0, 3)$, $Q_3 = (1, 1)$.

Рассмотрим звено $\Gamma_1^{(1)}$ из множества $\mathcal{L}_{(0,0)}$. Характеристический полином для звена $\Gamma_1^{(1)}$ выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-1} - 3,$$

он имеет единственный корень $t = \frac{1}{3}$. Далее по формуле (1.4) вычислим показатель звена $\Gamma_1^{(1)}$: $\varepsilon^{(1)} = 2$. Таким образом, получаем первое прибли-

жение ветви \mathcal{F}_1 , проходящей через начало координат:

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_1 выполняем замену $y = \frac{1}{3}x^2(1 + y_1)$ в уравнении (7.1). Имеем

$$\frac{1}{27}x^6y_1^3 + \frac{1}{9}x^6y_1^2 + \frac{1}{9}x^6y_1 + \frac{1}{27}x^6 - x^3y_1 = 0,$$

далее сократим на x^3 и получим уравнение

$$\frac{1}{27}x^3y_1^3 + \frac{1}{9}x^3y_1^2 + \frac{1}{9}x^3y_1 + \frac{1}{27}x^3 - y_1 = 0. \quad (7.2)$$

Следуя тому же алгоритму, найдём первые приближения ветвей кривой (7.2). Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.2). Он представляет собой выпуклую оболочку пяти точек $Q_1 = (3, 0)$, $Q_2 = (0, 1)$, $Q_3 = (3, 3)$, $Q_4 = (3, 1)$, $Q_5 = (3, 2)$ (см. Рис. 4).

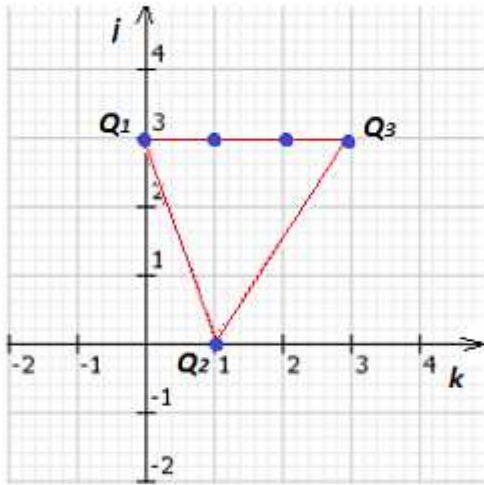


Рисунок 4

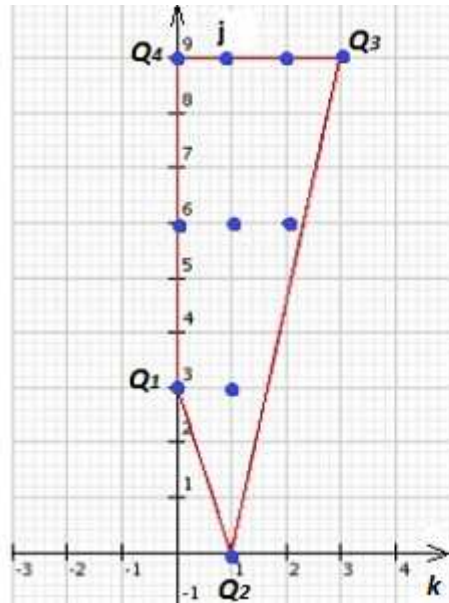


Рисунок 5

На втором шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = \frac{1}{27}t^{-1} - 1,$$

он имеет один корень $t = \frac{1}{27}$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 3$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = \frac{1}{27}x^3 + \dots$$

Таким образом, имеем представление для ветви \mathcal{F}_1 :

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{81}x^5 + \dots .$$

Для нахождения третьего члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_1 выполняем замену $y_1 = \frac{1}{27}x^3(1 + y_2)$ в уравнении (7.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{19683}x^{12}y_2^3 + \frac{1}{6561}x^{12}y_2^2 + \frac{1}{6561}x^{12}y_2 + \frac{1}{19683}x^{12} + \frac{1}{243}x^9y_2^2 + \\ + \frac{2}{243}x^9y_2 + \frac{1}{243}x^9 + \frac{1}{9}x^6y_2 + \frac{1}{9}x^6 - x^3y_2 = 0, \end{aligned}$$

далее сократим на x^3 и получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{19683}x^9y_2^3 + \frac{1}{177147}x^9y_2^2 + \frac{1}{177147}x^9y_2 + \frac{1}{19683}x^9 + \frac{1}{243}x^6y_2^2 + \frac{2}{243}x^6y_2 + \\ + \frac{1}{243}x^6 + \frac{1}{9}x^3y_2 + \frac{1}{9}x^3 - y_2 = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Многоугольник Ньютона для кривой (7.3) изображен на Рис. 5.

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(3)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = \frac{1}{243}t^{-1} - \frac{1}{27},$$

он имеет один корень $t = \frac{1}{9}$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(3)} = 3$, а также первое приближение для y_2

$$y_2 = \frac{1}{9}x^3 + \dots$$

и второе приближение для y_1

$$y_1 = \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{243}x^6 + \dots .$$

Таким образом, имеет место разложение для ветви \mathcal{F}_1 :

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{81}x^5 + \frac{1}{729}x^8 + \dots .$$

Второе звено $\Gamma_2^{(1)}$ из множества $\mathcal{L}_{(0,0)}$ многогранника Ньютона кривой (7.1) соединяет точки $Q_3 = (0, 3)$ и $Q_2 = (1, 1)$ (см. Рис.3). Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = -3t^{-2} + 1,$$

он имеет два корня $t_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, а показатель звена $\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{2}$. В результате, получаем первые приближения двух других ветвей, проходящих через начало координат:

$$\mathcal{F}_2 : y = -\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

и

$$\mathcal{F}_3 : y = \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_2 выполняем замену $y = -\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.1). В результате имеем уравнение:

$$-\sqrt{27}x^{\frac{3}{2}}y_1^3 - 3\sqrt{27}x^{\frac{3}{2}}y_1^2 - 3\sqrt{27}x^{\frac{3}{2}}y_1 + 3\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}y_1 + x^3 = 0.$$

Далее сократим на $x^{\frac{3}{2}}$ и сделаем замену $x_1 = x^{\frac{1}{2}}$:

$$-\sqrt{27}y_1^3 - 3\sqrt{27}y_1^2 - 6\sqrt{3}y_1 + x_1^3 = 0. \quad (7.4)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.3). Он представляет собой выпуклую оболочку четырёх точек $Q_1 = (0, 1)$, $Q_2 = (3, 0)$, $Q_3 = (0, 3)$, $Q_4 = (0, 2)$ (см. Рис. 6).

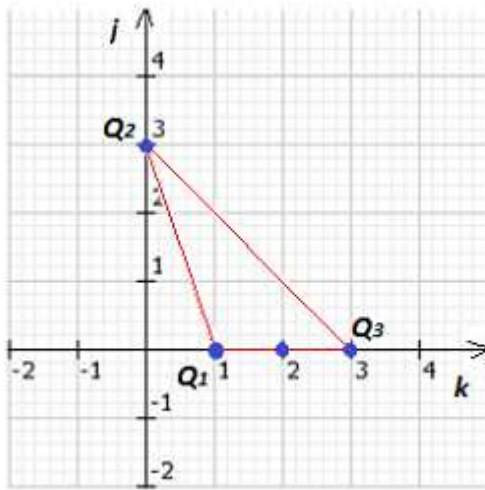


Рисунок 6

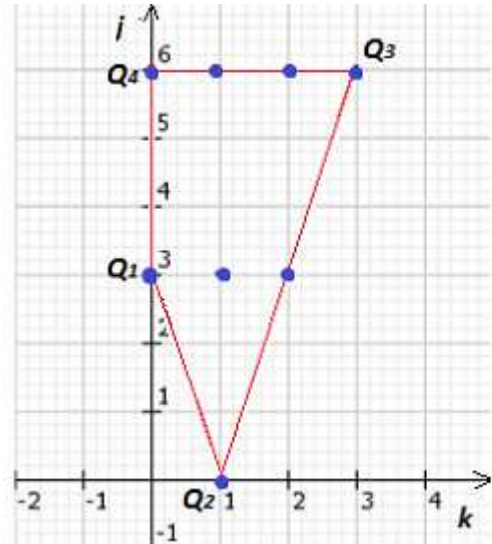


Рисунок 7

На втором шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-1} - 6\sqrt{3},$$

он имеет один корень $t = \frac{\sqrt{3}}{18}$. Находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 3$, и первое приближение для y_1 :

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{18}x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_2 представляется в виде:

$$y = -\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^2 + \dots$$

Для нахождения третьего члена разложения для ветви \mathcal{F}_2 выполним замену $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{18}x_1^3(1 + y_2)$ в уравнении (7.4):

$$-\frac{1}{216}x_1^9y_2^3 - \frac{3}{216}x_1^9y_2^2 - \frac{3}{216}x_1^9y_2 - \frac{1}{216}x_1^9 - \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^6y_2^2 - \frac{2\sqrt{3}}{12}x_1^6y_2 - \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^6 - x_1^3y_2 = 0,$$

далее сократим на x_1^3 и получим:

$$-\frac{1}{216}x_1^6y_2^3 - \frac{1}{72}x_1^6y_2^2 - \frac{1}{72}x_1^6y_2 - \frac{1}{216}x_1^6 - \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^3y_2^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}x_1^3y_2 - \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^3 - y_2 = 0. \quad (7.5)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.5)(см. Рис. 7).

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(3)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = -\frac{\sqrt{3}}{12}t^{-1} - 1,$$

он имеет один корень $t = -\frac{\sqrt{3}}{12}$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(3)} = 3$, а также первое приближение для y_2

$$y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{12}x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

и второе приближение для y_1

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{18}x_1 - \frac{1}{72}x_1^3 + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_2 представляется в виде:

$$y = -\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{72}x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_3 выполняем замену $y = \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.1):

$$\sqrt{27}x_1y_1^3 + 3\sqrt{27}x_1y_1^2 + 6\sqrt{3}x_1y_1 + x_1^4 = 0.$$

После сокращения на x_1 получим уравнение:

$$\sqrt{27}y_1^3 + 3\sqrt{27}y_1^2 + 6\sqrt{3}y_1 + x_1^3 = 0. \quad (7.6)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.6) (см. Рис. 8).

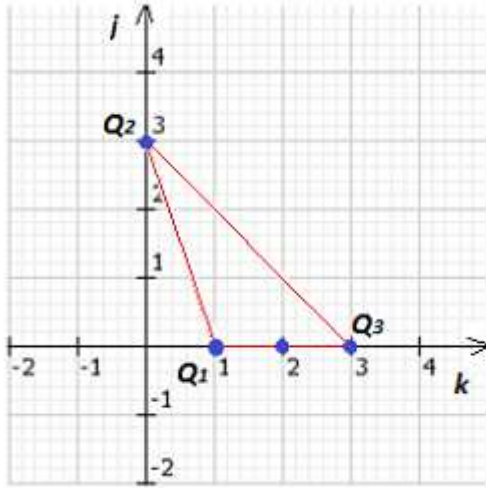


Рисунок 8

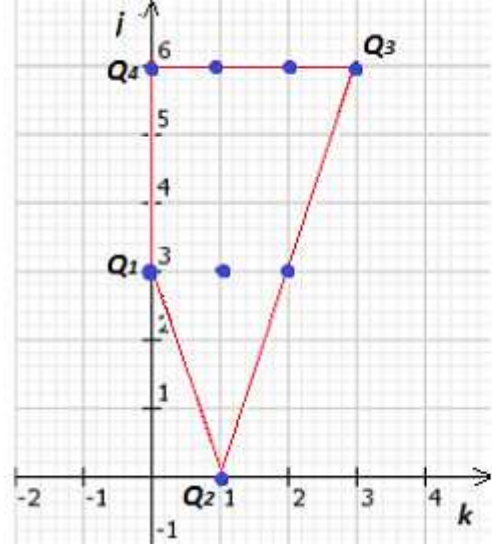


Рисунок 9

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-1} + 6\sqrt{3},$$

он имеет один корень $t = -\frac{\sqrt{3}}{18}$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(3)} = 3$, и первое приближение для y_1 :

$$y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{18}x_1^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_3 представляется в виде:

$$y = \sqrt{3}x_1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x_1^2 + \dots$$

Для нахождения третьего члена разложения для ветви \mathcal{F}_3 выполняем замену $y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{18}x_1^{\frac{3}{2}}(1 + y_2)$ в уравнении (7.6):

$$-\frac{1}{216}x_1^9y_2^3 - \frac{3}{216}x_1^9y_2^2 - \frac{3}{216}x_1^9y_2 - \frac{1}{216}x_1^9 + \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^6y_2^2 + \frac{2\sqrt{3}}{12}x_1^6y_2 + \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^6 - x_1^3y_2 = 0,$$

далее сократим на x_1^3 и получим:

$$-\frac{1}{216}x_1^6y_2^3 - \frac{1}{72}x_1^6y_2^2 - \frac{1}{72}x_1^6y_2 - \frac{1}{216}x_1^6 + \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^3y_2^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}x_1^3y_2 + \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^3 - y_2 = 0. \quad (7.7)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.7) (см. Рис. 9).

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(3)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = \frac{\sqrt{3}}{12}t^{-1} - 1,$$

он имеет один корень $t = \frac{\sqrt{3}}{12}$. Далее считаем показатель звена $\varepsilon^{(3)} = 3$, а также первое приближение для y_2

$$y_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^3 = \frac{\sqrt{3}}{12}x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

и второе приближение для y_1

$$y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{18}x_1 - \frac{1}{72}x^3 + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_3 представляется в виде:

$$y = \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{72}x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Теперь рассмотрим звено $\Gamma_3^{(1)} \in \mathcal{L}_{(\infty,\infty)}$ ломаной Ньютона кривой (7.1). Найдём ветвь этой кривой удовлетворяющей условию: $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$. Для этого сделаем следующую замену переменной $x = \frac{1}{u}, y = \frac{1}{v}$ в уравнении (7.1). После замен задача сводится к нахождению ветвей кривой

$$v^3 + u^3 - 3u^2v^2 = 0, \tag{7.8}$$

проходящих через начало координат. Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.8) (см. Рис 10).

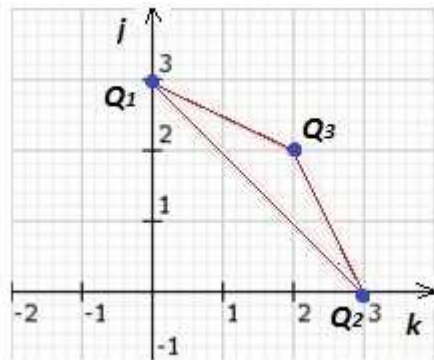


Рисунок 10

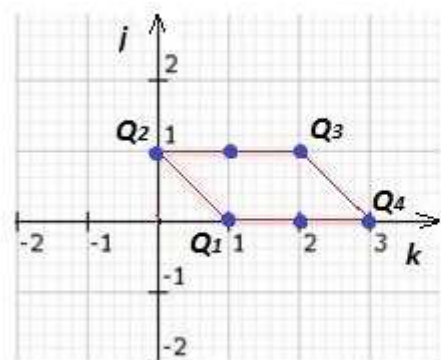


Рисунок 11

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено. Характеристический полином для этого звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-3} + 1,$$

он имеет один корень $t = -1$. Далее считаем показатель звена $\varepsilon^{(1)} = 1$. Получили первое приближение в переменных u и v .

$$v = -u + \dots$$

Для получения второго члена разложения выполняем замену $v = -u(1 + v_1)$ в уравнении (7.8):

$$-u^3(v_1^3 + 3v_1^2 + 3v_1 + 1) - 3u^2u^2(1 + v_1) + u^3 = 0,$$

далее сократим на $-u^3$ и получим:

$$3v_1 + 3v_1^2 + v_1^3 + 3u + 6uv_1 + 3uv_1^2 = 0. \quad (7.9)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.9) (см. Рис. 11).

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено. Характеристический полином для звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = 3t^{-1} + 3,$$

он имеет один корень $t = -1$. Далее считаем показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 1$, и первое приближение для v_1

$$v_1 = -u + \dots$$

Получили второе приближение в переменных u и v .

$$v = -u + u^2 + \dots$$

Для получения третьего члена разложения выполняем замену $v_1 = -u(1 + v_2)$ в уравнении (7.9):

$$-3uv_2 + 3u^2v_2^2 - 3u^2 - u^3v_2^3 + 3u^3v_2^2 + 2u^3 = 0,$$

далее сократим на $-u$ и получим:

$$3v_2 - 3uv_2^2 + 3u + u^2v_2^3 - 3u^2v_2^2 - 2u^2 = 0. \quad (7.10)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.10) (см. Рис. 12).

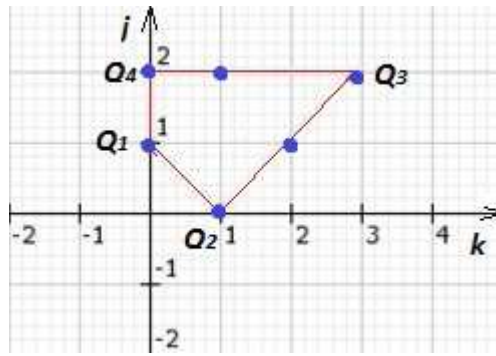


Рисунок 12

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено. Характеристический полином для звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = 3t^{-1} + 3,$$

и он имеет один корень $t = -1$. Далее считаем показатель звена $\varepsilon^{(3)} = 1$, и первое приближение для v_2

$$v_2 = -u \dots ,$$

а также второе приближение для v_1

$$v_1 = -u + u^2 \dots .$$

Получили третий член разложения в переменных u и v .

$$v = -u + u^2 - u^3 \dots .$$

Теперь сделаем обратную замену переменных $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots \Rightarrow y = \frac{1}{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots} = \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \dots)} = -x(1 + \frac{1}{x} + \dots) = -x - 1 + \dots . \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили два члена разложения ветви уходящей в бесконечность: $y = -x - 1 + \dots$. Декартов лист имеет наклонную асимптоту $y = -x - 1$.

Изучим решения уравнения (7.1) вблизи нуля с помощью метода степенных преобразований.

Грань $\Gamma_1 = Q_1Q_2$ многогранника на Рис.2 имеет нормальный конус, направленный вдоль вектора $(1,2)$. Рассмотрим унимодулярную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и соответствующее степенное преобразование

$$x_1 = y_1y_2, \quad x_2 = y_1y_2^2.$$

Применим это преобразование. Уравнение (7.1) перейдёт в:

$$g := y_1^3y_2^6 + y_1^3y_2^3 - 3y_1^2y_2^3 = 0.$$

Далее сократим на $y_1^2y_2^3$ и получим уравнение

$$y_1y_2^3 + y_1 - 3 = 0. \tag{7.11}$$

Многогранник для кривой (7.11) изображён на Рис. 13.

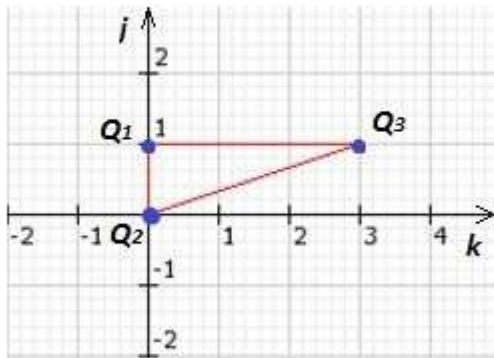


Рисунок 13

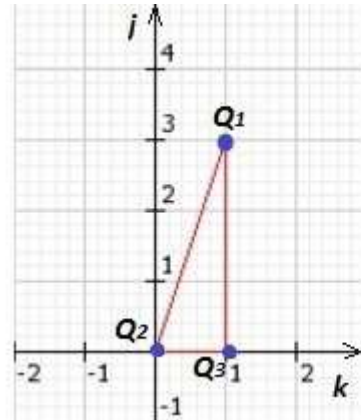


Рисунок 14

Заметим, что грань Γ_1 перешла в вертикальную $\tilde{\Gamma}_1 = Q_1Q_2$; для неё срезка $g_{\tilde{\Gamma}_1} = y_1 - 3$, имеет простой корень $y_1 = 3$, следовательно, теорема о неявной функции в окрестности нуля даёт явное выражение y_1 через y_2 :

$$y_1 = \frac{3}{1 + y_2^3}.$$

Таким образом, получаем параметрическое представление ветви \mathcal{F}_1 кривой (7.1):

$$x_1 = \frac{3y_2}{1 + y_2^3}, \quad x_2 = \frac{3y_2^2}{1 + y_2^3},$$

y_2 изменяется в окрестности нуля.

Для грани $\Gamma_2 = Q_2Q_3$ рассмотрим степенное преобразование следующего вида

$$x_1 = y_1^2 y_2, \quad x_2 = y_1 y_2.$$

Применим его и получим новое уравнение:

$$g := y_1^6 y_2^3 + y_1^3 y_2^3 - 3y_1^3 y_2^2 = 0.$$

Далее сократим на $y_1^3 y_2^3$:

$$y_1^3 y_2 + y_2 - 3 = 0. \quad (7.12)$$

Многогранник для кривой (7.12) изображён на Рис. 14.

Грань $\Gamma_2 = Q_2Q_3$ перешла в горизонтальную грань $\tilde{\Gamma}_2 = Q_2Q_3$. Для неё срезка $g_{\tilde{\Gamma}_2} = y_2 - 3$, имеет простой корень $y_2 = 3$, следовательно, теорема о неявной функции в окрестности нуля даёт явное выражение y_2 через y_1 :

$$y_2 = \frac{3}{1 + y_1^3}.$$

Таким образом, получаем локальное параметрическое представление компонент кривой, включающей в себя ветви $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$:

$$x_1 = \frac{3y_1^2}{1 + y_1^3}, \quad x_2 = \frac{3y_1}{1 + y_1^3}.$$

Замечание. Полученная параметризация является глобальной.

7.2 Кривая $x^4 - x^3y + 3x^2y^3 - 3xy^5 + y^7 = 0$

Рассмотрим алгебраическую кривую, которая определяется уравнением

$$x^4 - x^3y + 3x^2y^3 - 3xy^5 + y^7 = 0. \quad (7.13)$$

Многоугольник Ньютона для данной кривой изображен на Рис. 16. Рассмотрим звено $\Gamma_1^{(1)}$, соединяющее точки $Q_1 = (4, 0)$ и $Q_2 = (3, 1)$. Характеристический полином для звена $\Gamma_1^{(1)}$, имеет вид

$$\pi(t) = t^{-1} - 1,$$

с единственным корнем $t = 1$.

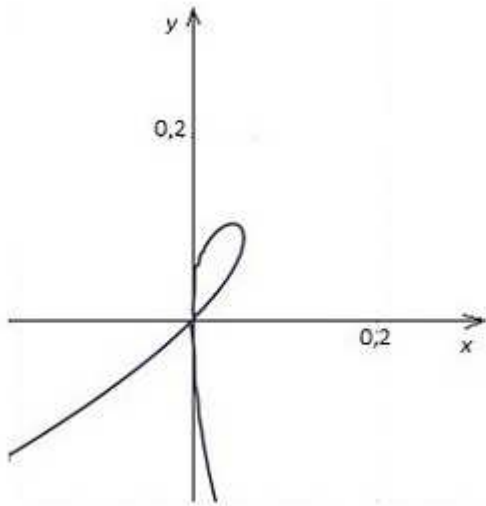


Рисунок 15

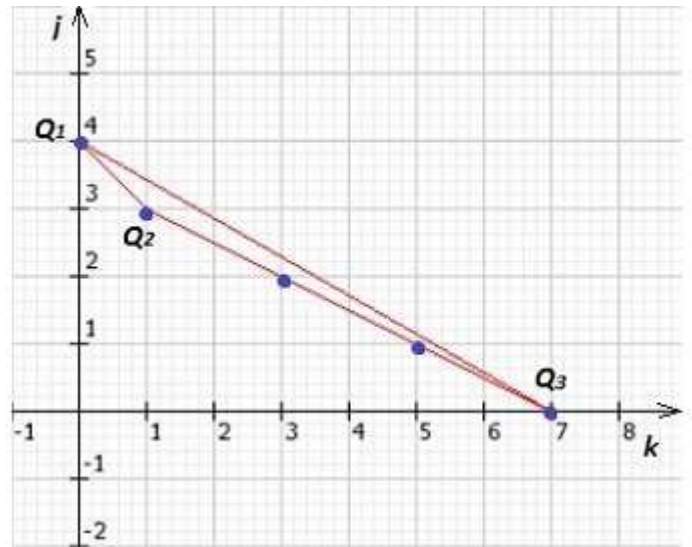


Рисунок 16

Далее по формуле (1.4) вычислим показатель звена $\Gamma_1^{(1)} : \varepsilon^{(1)} = 1$. Таким образом, получаем первое приближение ветви \mathcal{F}_1 , проходящей через начало координат:

$$y = x + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_1 выполняем замену $y = x(1 + y_1)$ в уравнении (7.13). В результате после сокращения на x^4 получим уравнение

$$\begin{aligned} & x^3 y_1^7 + 7x^3 y_1^6 + 21x^3 y_1^5 + 35x^3 y_1^4 + 35x^3 y_1^3 + 21x^3 y_1^2 + \\ & \quad + 7x^3 y_1 + x^3 - 3x^2 y_1^5 - 15x^2 y_1^4 - \\ & - 30x^2 y_1^3 - 30x^2 y_1^2 - 15x^2 y_1 - 3x^2 + 3x^2 y_1^3 + 9x y_1^2 + 9x y_1 + 3x - y_1 = 0. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Следуя тому же алгоритму, выделим ветви кривой (7.14), проходящие через $(0,0)$. Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.14) (см. Рис. 17). На втором шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = 3t^{-1} - 1,$$

он имеет один корень $t = 3$.

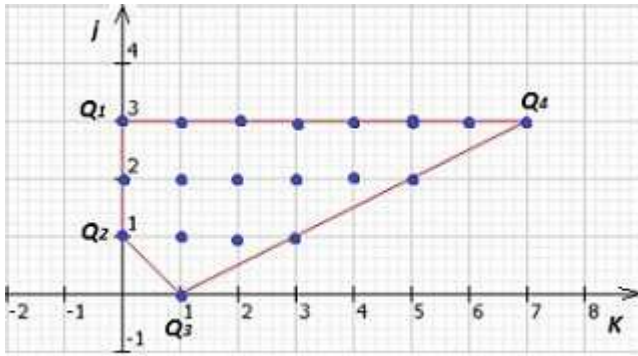


Рисунок 17

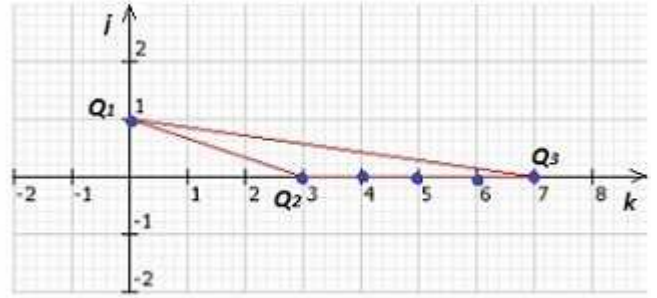


Рисунок 18

Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 1$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = 3x + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_1 представляется в виде:

$$y = x + 3x^2 + \dots$$

Второе звено $\Gamma_2^{(1)}$ из множества $\mathcal{L}_{(0,0)}$ ломаной Ньютона кривой (7.13) соединяет точки $Q_2 = (3, 1)$ и $Q_3 = (0, 7)$ (см. Рис. 16). Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = -t^{-6} + 3t^{-4} - 3t^{-2} + 1,$$

он имеет два корня $t_{1,2} = \pm 1$ кратности 3, а показатель звена $\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{2}$. Наличие кратных корней у характеристического полинома свидетельствует о зарождении шести ветвей, из которых ветви $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ имеют первое приближение

$$y = x^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

а ветви $\mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_7$ имеют первое приближение:

$$y = -x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветвей $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ выполняем замену $y = x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.14). Имеем уравнение:

$$x^{\frac{7}{2}}(8y_1^3 + 20y_1^4 + 18y_1^5 + 7y_1^6 + y_1^7 + x^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Далее сделаем замену $x_1 = x^{\frac{1}{2}}$ и разделим на x_1^7 :

$$8y_1^3 + 20y_1^4 + 18y_1^5 + 7y_1^6 + y_1^7 + x_1 = 0. \quad (7.15)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.15) (см. Рис. 18).

На втором шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-3} + 8,$$

он имеет один вещественный корень $t_1 = -\frac{1}{2}$ и два комплексных $t_2 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $t_3 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{3}$, и первые приближения для y_1 :

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{6}} + \dots, \\ y_1 &= \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}x^{\frac{1}{6}} + \dots, \\ y_1 &= \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}x^{\frac{1}{6}} + \dots. \end{aligned}$$

Таким образом, ветви \mathcal{F}_2 , \mathcal{F}_3 , \mathcal{F}_4 представляются в виде:

$$\begin{aligned} y &= x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} + \dots, \\ y &= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \dots, \\ y &= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \dots. \end{aligned}$$

Для нахождения вторых членов разложений для ветвей \mathcal{F}_5 , \mathcal{F}_6 , \mathcal{F}_7 выполняем замену $y = -x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.14):

$$x^{\frac{7}{2}}(-8y_1^3 - 20y_1^4 - 18y_1^5 - 7y_1^6 - y_1^7 + x^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Далее сделаем замену $x_1 = x^{\frac{1}{2}}$ и разделим на x_1^7 :

$$-8y_1^3 - 20y_1^4 - 18y_1^5 - 7y_1^6 - y_1^7 + x_1 = 0. \quad (7.16)$$

Многоугольник Ньютона для данного уравнения будет такой же как на Рис. 18. Характеристический полином выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-3} - 8,$$

он имеет один вещественный корень $t_1 = \frac{1}{2}$ и два комплексных $t_2 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
 $t_3 = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Находим показатель звена $\varepsilon^{(3)} = \frac{1}{3}$,

$$y_1 = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{6}} + \dots,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}x^{\frac{1}{6}} + \dots,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}x^{\frac{1}{6}} + \dots.$$

Таким образом, ветви \mathcal{F}_5 , \mathcal{F}_6 , \mathcal{F}_7 имеют разложение

$$y = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} + \dots,$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \dots,$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \dots,$$

соответственно.

Изучим решение уравнения (7.13) с помощью метода степенных преобразований. Преобразуем многогранник Ньютона этой кривой с помощью преобразования

$$x_1 = y_1 y_2, \quad x_2 = y_1 y_2^2.$$

При этом грань $\Gamma_1 = Q_1 Q_2$ перейдёт в горизонтальную грань $\tilde{\Gamma}_1 = Q_1 Q_2$ (см. Рис. 19)

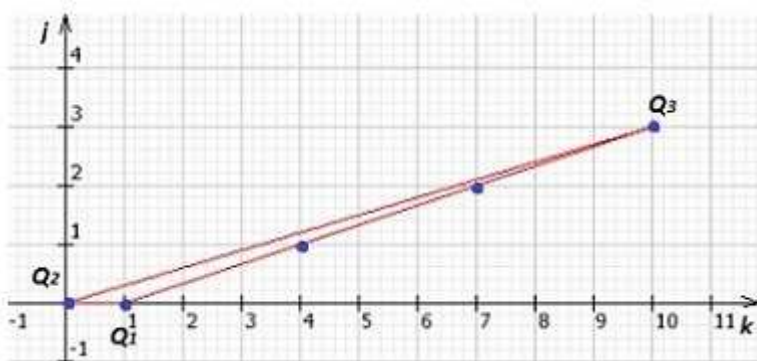


Рисунок 19

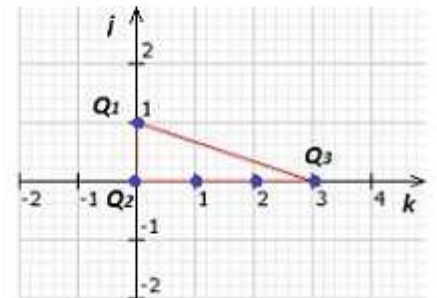


Рисунок 20

Уравнение кривой преобразуется к виду:

$$y_1^4 y_2^4 (y_1^3 y_2^{10} - 3y_1^2 y_2^7 + 3y_1 y_2^4 - y_2 + 1) = 0$$

Срезка $g_{\tilde{\Gamma}_1} = 1 - y_2$ имеет простой корень $y_2 = 1$, следовательно, к уравнению

$$y_1^3 y_2^{10} - 3y_1^2 y_2^7 + 3y_1 y_2^4 - y_2 + 1 = 0$$

применима теорема о неявной функции в окрестности точки $(1,0)$. Разрешив последнее уравнение относительно y_2 , получим решение уравнения (7.13) (ветвь \mathcal{F}_1) в виде разложений от параметра y_1 :

$$x_1 = y_1 + 3y_1^2 + \dots, \quad x_2 = y_1 + 6y_1^2 + \dots$$

Далее к кривой (7.13) применим преобразование

$$x_1 = y_1^2 y_2, \quad x_2 = y_1 y_2.$$

При этом грань $\Gamma_2 = Q_2 Q_3$ перейдёт в горизонтальную грань $\tilde{\Gamma}_2 = Q_2 Q_3$ (см. Рис. 20). Уравнение кривой преобразуется к виду

$$y_1^7 y_2^4 (y_2^3 - 3y_2^2 + 3y_2 + y_1 - 1) = 0$$

Срезка $g_{\tilde{\Gamma}_2} = y_2^3 - 3y_2^2 + 3y_2 - 1$ имеет трёхкратный корень $y_2 = 1$. Разрешим уравнение

$$y_2^3 - 3y_2^2 + 3y_2 + y_1 - 1 = 0$$

относительно y_1 и воспользуемся формулами замены переменной. В результате имеем параметризацию кривой(7.13):

$$x_1 = (1 - y_2)^6 y_2, \quad x_2 = (1 - y_2)^3 y_2$$

Замечание. Полученная параметризация является глобальной.

7.3 Кривая $2x^5 - x^3 y + 2x^2 y^2 - xy^3 + 2y^5 = 0$

Рассмотрим алгебраическую кривую, которая определяется уравнением

$$2x^5 - x^3 y + 2x^2 y^2 - xy^3 + 2y^5 = 0. \quad (7.17)$$

Многоугольник Ньютона для данной кривой изображен на Рис. 22.

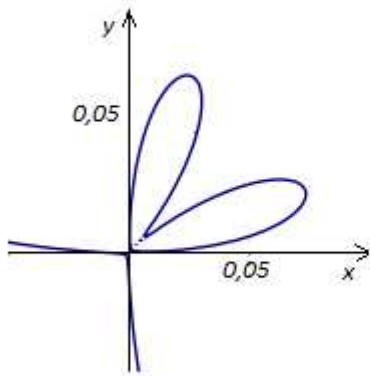


Рисунок 21

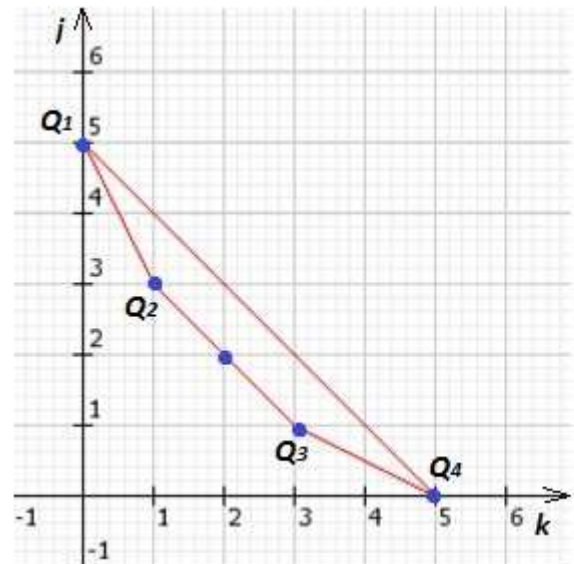


Рисунок 22

Рассмотрим звенья $\Gamma_1^{(1)} = (Q_1Q_2)$, $\Gamma_2^{(1)} = (Q_2Q_3)$ и $\Gamma_3^{(1)} = (Q_3Q_4)$ из множества $\mathcal{L}_{(0,0)}$. Характеристический полином для звена $\Gamma_1^{(1)}$, выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = 2t^{-1} - 1,$$

он имеет единственный корень $t = 2$. Далее находим показатель звена $\Gamma_1^{(1)}$: $\varepsilon^{(1)} = 2$. Таким образом, получаем первое приближение ветви \mathcal{F}_1 , проходящей через начало координат:

$$y = 2x^2 + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_1 выполняем замену $y = 2x^2(1 + y_1)$ в уравнении (7.17). В результате, после сокращения на $2x^5$ получим уравнение

$$\begin{aligned} 32x^5y_1^5 + 160x^5y_1^4 + 320x^5y_1^3 + 320x^5y_1^2 + 160x^5y_1 + \\ + 32x^5 - 4x^2y_1^3 - 12x^2y_1^2 - \\ - 12x^2y_1 - 4x^2y_1 + 4xy_1^2 + 8xy_1 + 4x - y_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Следуя тому же алгоритму, выделим ветви кривой (7.18). Многоугольник Ньютона для кривой (7.18) изображён на Рис. 23.

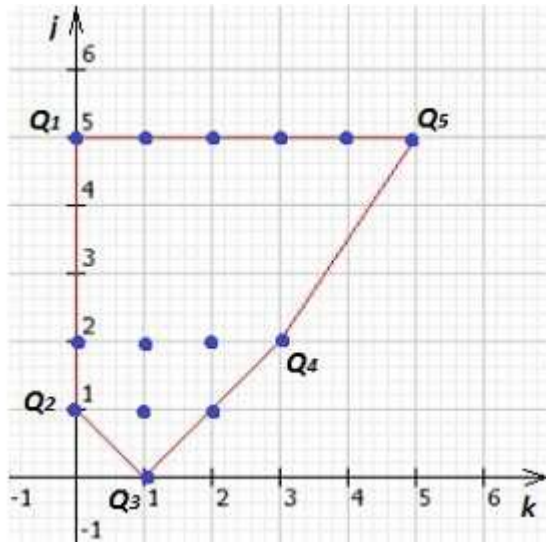


Рисунок 23

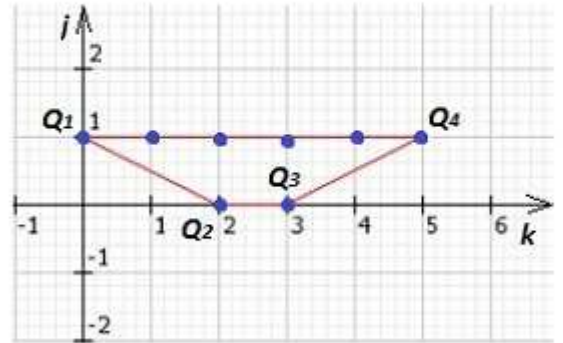


Рисунок 24

Множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином $\pi(t) = 4t^{-1} - 1$, имеет один корень $t = 4$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 1$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = 4x + \dots .$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_1 представляется в виде:

$$y = 2x^2 + 8x^3 + \dots .$$

Характеристический полином для звена $\Gamma_2^{(1)} = (Q_2Q_3)$ выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-2} + 2t^{-1} - 1;$$

он имеет двукратный корень $t = 1$. Далее находим показатель звена $\Gamma_2^{(1)}$: $\varepsilon^{(1)} = 1$. Наличие кратного корня свидетельствует о зарождении двух ветвей $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, имеющих первое приближение

$$y = x + \dots .$$

Для нахождения вторых членов разложений для ветвей $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, выполним замену $y = x(1 + y_1)$ в уравнении (7.17). В результате, после сокращения на x^4 получим уравнение

$$4x + 20xy_1^2 + 20xy_1^3 + 10xy_1^4 + 2xy_1^5 - y_1^3 - y_1^3 + 10xy_1 = 0. \quad (7.19)$$

Выделим ветви кривой (7.19), проходящие через $(0,0)$. Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.19) (см. Рис. 24).

Множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ многоугольника Ньютона кривой (7.19) содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом: $\pi(t) = 4t^{-2} - 1$, имеет два корня $t = \pm 2$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{2}$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = \pm 2x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Таким образом, ветви \mathcal{F}_2 и \mathcal{F}_3 представляются, соответственно, в виде:

$$y = x + 2x^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

$$y = x - 2x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Характеристический полином для звена $\Gamma_3^{(1)} = Q_3Q_4$ выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = -t^{-2} + 2,$$

он имеет два корня $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Далее находим показатель звена $\Gamma_3^{(1)} : \varepsilon^{(1)} = \frac{1}{2}$. Таким образом, первые приближения ветвей \mathcal{F}_4 и \mathcal{F}_5 , проходящих через начало координат, имеют вид

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Для нахождения второго члена разложения для ветви \mathcal{F}_4 выполняем замену $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.17). В результате после замены $x_1 = x^{\frac{1}{2}}$ и сокращения на x_1^5 получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{7\sqrt{2}}{4}y_1^2 + \frac{9\sqrt{2}}{4}y_1^3 + \frac{5\sqrt{2}}{4}y_1^4 + \frac{\sqrt{2}}{4}y_1^5 + \\ & + 2x_1y_1 + x_1 + 2x_1^5 + x_1y_1^2 - \frac{2\sqrt{2}}{4}x_1^2 + \frac{2\sqrt{2}}{4}y_1 - \frac{2\sqrt{2}}{4}x_1^2y_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Многоугольник Ньютона для кривой (7.20) изображён на Рис. 25.

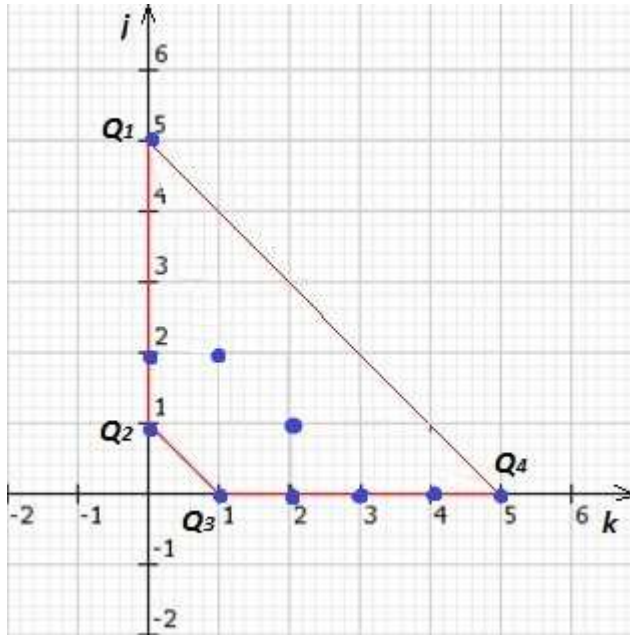


Рисунок 25

Множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)} = Q_2Q_3$. Характеристический полином для этого звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-1} + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

он имеет один корень $t = -\sqrt{2}$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 1$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = -\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_4 представляется в виде:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} - x + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_5 выполняем замену $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.17). В результате после замены $x_1 = x^{\frac{1}{2}}$ и сокращения на x_1^5 получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{7\sqrt{2}}{4}y_1^2 - \frac{9\sqrt{2}}{4}y_1^3 - \frac{5\sqrt{2}}{4}y_1^4 - \frac{\sqrt{2}}{4}y_1^5 - \\ & -2x_1y_1 + x_1 + 2x_1^5 + x_1y_1^2 + \frac{2\sqrt{2}}{4}x_1^2 - \frac{2\sqrt{2}}{4}y_1 + \frac{2\sqrt{2}}{4}x_1^2y_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Многоугольник Ньютона для кривой (7.21) выглядит также как для кривой (7.20) (см. Рис. 25). Множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для имеет один корень $t = \sqrt{2}$. Далее находим

показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 1$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \dots .$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_5 представляется в виде:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} + x + \dots .$$

Далее найдём параметризацию ветвей кривой (7.17) с помощью степенных преобразований. Вместо координат (x, y) исходно будем рассматривать координаты (x_1, x_2) .

Рассмотрим грань $\Gamma_1 = Q_1Q_2$ на Рис. 22. Нормальный конус грани Γ_1 есть луч с направлением $(1, 2)$, поэтому рассмотрим унимодулярную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и соответствующее степенное преобразование

$$x_1 = y_1y_2, \quad x_2 = y_1y_2^2.$$

Применим это преобразование, получим уравнение кривой в новых координатах:

$$2y_1^5y_2^{10} + 2y_1^5y_2^5 - y_1^4y_2^7 + 2y_1^4y_2^6 - y_1^4y_2^5 = 0;$$

далее сократим на $y_1^4y_2^5$ и получим

$$g(y_1, y_2) = 2y_1y_2^5 - y_2^2 + 2y_2 + 2y_1 - 1 = 0. \quad (7.22)$$

На Рис. 26. изображён многогранник Ньютона кривой (7.22) Заметим, что грань $\Gamma_1 = Q_1Q_2$ на Рис. 22 преобразуется в вертикальную грань $\tilde{\Gamma}_1 = Q_1Q_2$ на Рис. 26. Для неё срезка $g_{\tilde{\Gamma}_1} = 2y_1 - 1$ имеет простой корень $y_1 = \frac{1}{2}$, это значит, что по теореме о неявной функции в некоторой окрестности нуля соответствующая ветвь кривой задаётся явно

$$y_1(y_2) = \frac{(y_2 - 1)^2}{2y_2^5 + 2}.$$

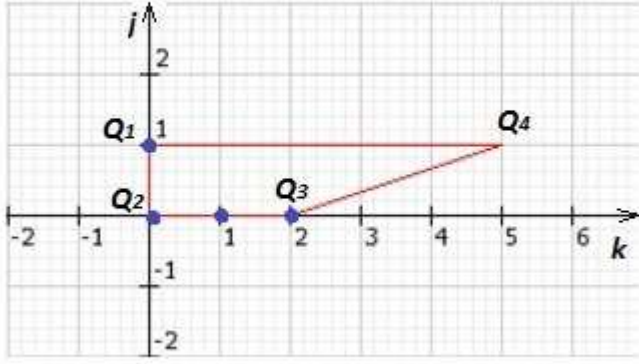


Рисунок 26

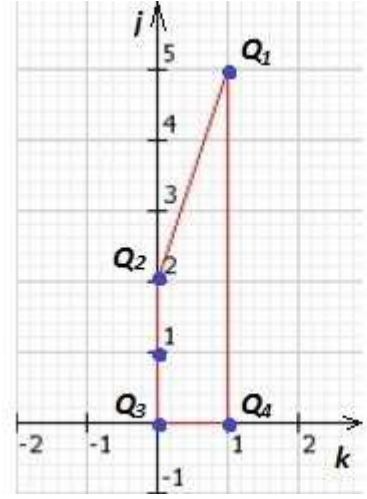


Рисунок 27

Наконец, получаем локальное параметрическое представление ветви \mathcal{F}_1 кривой (7.17):

$$x_1 = \frac{(y_2 - 1)^2}{2y_2^5 + 2} y_2, \quad x_2 = \frac{(y_2 - 1)^2}{2y_2^5 + 2} y_2^2,$$

здесь параметр y_2 изменяется в некоторой окрестности нуля.

Далее рассмотрим грань $\Gamma_2 = Q_2Q_3$ Учитывая нормальный конус грани, рассмотрим унимодулярную матрицу

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

и соответствующее степенное преобразование

$$x_1 = y_1^2 y_2, \quad x_2 = y_1 y_2.$$

Теперь применим полученное преобразование и после сокращения $y_1^5 y_2^4$ получим уравнение

$$2y_2 y_1^5 - y_1^2 + 2y_1 + 2y_2 - 1 = 0. \quad (7.23)$$

Многогранник для кривой (7.23) изображён на Рис. 27.

Заметим, что грань $\Gamma_2 = Q_2Q_3$ перешла в вертикальную грань $\tilde{\Gamma}_2 = Q_2Q_3$, для неё срезка $g_{\tilde{\Gamma}_2} = -y_1^2 + 2y_1 - 1$ имеет двукратный корень $y_1 = 1$. Нам необходимо сделать замену $z_1 = y_1 - 1$, $z_2 = y_2$ в уравнении (7.23):

$$2z_1^5 z_2 + 10z_1^4 z_2 + 20z_1^3 z_2 + 20z_1^2 z_2 + 10z_1 z_2 + 4z_2 - z_1^2 = 0. \quad (7.24)$$

Выбирая в качестве параметра z_1 , из уравнения (7.24) получаем параметризацию каспа исследуемой кривой (ветви \mathcal{F}_2 и \mathcal{F}_3):

$$x_1 = \frac{(z_1 + 1)^2 z_1^2}{2(1 + (z_1 + 1)^5)}, \quad x_2 = \frac{(z_1 + 1) z_1^2}{2(1 + (z_1 + 1)^5)},$$

z_1 изменяется в окрестности нуля.

Рассмотрим грань $\Gamma_3 = Q_3 Q_4$ на Рис. 22. Нужное нам степенное преобразование определяется унимодулярной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и имеет следующий вид

$$x_1 = y_1^2 y_2, \quad x_2 = y_1 y_2.$$

Это преобразование приводит кривую к виду (7.23), при этом исследуемая грань Γ_3 переходит в горизонтальную грань $\tilde{\Gamma}_3 = Q_3 Q_4$ (см. Рис. 27) Срезка $g_{\tilde{\Gamma}_3} = 2y_2 - 1$, имеет простой корень $y_2 = \frac{1}{2}$, следовательно, что теорема о неявной функции даёт представление ветви кривой

$$y_2(y_1) = \frac{y_1^2 - 2y_1 + 1}{2y_1^5 + 2},$$

в окрестности начала координат. Наконец, получаем параметрическое представление компонент кривой, объединяющей ветви $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$

$$x_1 = \frac{(y_1 - 1)^2}{2y_1^5 + 2} y_1^2, \quad x_2 = \frac{(y_1 - 1)^2}{2y_1^5 + 2} y_1,$$

y_1 изменяется в окрестности нуля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

- представлена схема выделения ветви плоской алгебраической кривой, проходящей через начало координат, с помощью метода многоугольника Ньютона;

- описана схема нахождения решений уравнения $f(x) = 0$ в виде функций от параметра, либо набора асимптотических разложений по параметру;

- исследованы ветви и найдены параметризации трёх алгебраических кривых указанными выше методами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Брюно, А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. / Брюно А.Д. - Наука. Физматлит, 1998. - 288 с. - ISBN 5-02-015168-8.
- [2] Ньютон, И. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых / Ньютон И. - Математические работы. М.-Л.: ОНТИ, 1937 С. 33-44.
- [3] Уокер, Р. Алгебраические кривые / Уокер Р. - М.: ИЛ, 1952. - 236 с.
- [4] Хованский, А.Г. Многогранники Ньютона / Хованский. А.Г. // Современные проблемы математики. Т. 22. Итоги науки и техн. М.: ВИНТИ, 1983. С. 206-239.
- [5] Чеботарев, Н.Г. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики / Чеботарев Н.Г. - Исаак Ньютон. М.-Л.: АН СССР, 1943 С. 99-126.
- [6] Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных / Шабат Б.В. - М.: Наука, 1985. - 464 с.
- [7] Puiseux, V. Recherches sur les fonctions algebriques / Puiseux V. // J.de math. pures et appl. 1850. V. P. 365-480.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий
Кафедра прикладной математики и компьютерной безопасности

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
А.А. Кытманов

16 06 2017г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

01.03.04 Прикладная математика

Применение метода многоугольника Ньютона
к изучению алгебраических кривых

Руководитель

Ant 13.06.2017
подпись, дата

профессор, д.ф-м.н.
должность, ученая степень

И.А. Антипова
инициалы, фамилия

Выпускник

Мухом 10.06.2017
подпись, дата

студент
группы КИЗ-19Б

Н.Н. Мутовин
инициалы, фамилия

Красноярск 2017

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме "Применение метода многоугольника Ньютона к изучению алгебраических кривых" содержит 48 страниц текста, 27 рисунков, 7 использованных источников.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ, МНОГОУГОЛЬНИК НЬЮТОНА, СТЕПЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ.

Целью работы является изучение алгоритмов анализа структуры алгебраической кривой в окрестности особой точки. Рассматриваемая техника выделения ветвей алгебраической кривой и нахождение её параметризации имеет широкое применение в прикладных задачах, сводящихся к решению алгебраических уравнений либо к исследованию алгебраических кривых. В работе представлена схема выделения ветви алгебраической кривой с помощью метода многоугольника Ньютона, описан метод нахождения параметризации кривой с помощью степенных преобразований, разобраны примеры. Результат работы может быть использован в учебном процессе при чтении специальных курсов по теории алгебраических кривых.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 3 |
| 1 Ломаная Ньютона | 6 |
| 2 Подготовительная теорема Вейерштрасса | 10 |
| 3 Кратные точки кривой | 13 |
| 4 Ветви кривой, проходящие через начало координат | 14 |
| 5 Ветви, “уходящие” в бесконечность | 18 |
| 6 Степенное преобразование | 21 |
| 7 Примеры | 23 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 46 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ | 47 |

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи естествознания сводятся к решению алгебраических уравнений, их систем, а также к исследованию свойств алгебраических кривых. Решения уравнений и систем делятся на регулярные и сингулярные (особые). В окрестности регулярной точки применима теорема о неявной функции, которая даёт описание всех других близких решений. В окрестности особой точки теорема о неявной функции не работает. Довольно общие подходы к анализу решений в окрестности особой точки даёт степенная геометрия, в основе которой лежит изучение свойств решений уравнения по показателям степеней входящих в него мономов. В частности, эта техника позволяет находить локальные и асимптотические разложения решений нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений, а также их систем [1]. Кроме того, степенная геометрия находит применение в алгебраической геометрии, тропической (идемпотентной) математике.

Рассмотрим полином n переменных

$$f(x) = \sum_{Q \in S} a_Q x^Q, \quad (0.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$, $x^Q = x_1^{q_1} \cdot \dots \cdot x_n^{q_n}$, S — подмножество целочисленной решётки \mathbb{Z}^n , называемое *носителем многочлена* (0.1), предполагается, что $a_Q \neq 0$. *Многогранником Ньютона* многочлена (0.1) называется выпуклая оболочка $\mathcal{N}(f)$ его носителя S .

Каждой грани Γ многогранника $\mathcal{N}(f)$ соответствует *срезка полинома* (0.1)

$$f_\Gamma(x) = \sum_{Q \in \Gamma} a_Q x^Q, \quad (0.2)$$

которая даёт первое приближение соответствующей ветви решения уравнения

$$f(x) = 0. \quad (0.3)$$

В двумерном случае многоугольник Ньютона $\mathcal{N}(f)$ ограничен ломаной $\mathcal{L}(f)$. Ньютон [2] предложил использовать одно ребро ломаной $\mathcal{L}(f)$ для нахождения ветвей решений уравнения (0.3) вблизи нуля, если у много-

члена $f(x)$ отсутствуют свободный и линейный члены. Пюизо [7] использовал все рёбра ломаной Ньютона и дал обоснование решению задачи этим методом. Обзор возможных применений метода многоугольника Ньютона в теории алгебраических функций, теории дифференциальных уравнений был сделан, в частности, Н.Г. Чеботарёвым [5].

Одним из основных инструментов степенной геометрии наряду с многогранником Ньютона является *степенное преобразование*. Оно определяется невырожденной матрицей $B = (\beta_{ij})$ порядка n с вещественными элементами:

$$y_i = x_1^{\beta_{i1}} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_{in}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (0.4)$$

Обратное преобразование

$$x_i = y_1^{\alpha_{i1}} \cdot \dots \cdot y_n^{\alpha_{in}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.5)$$

определяется матрицей $A = (\alpha_{ij}) = B^{-1}$. При преобразовании (0.4) $x^Q = y^{\tilde{Q}}$, где $\tilde{Q}^T = A^T Q^T$, то есть при степенном преобразовании показатели Q испытывают линейное преобразование. Полином (0.1) переходит в полином

$$g(y) = \sum_{\tilde{Q} \in \tilde{S}} a_{\tilde{Q}} y^{\tilde{Q}}, \quad (0.6)$$

где $\tilde{S}^T = A^T S^T$, $g_{\tilde{Q}} = a_Q$. При преобразовании (0.4) срезка переходит в срезку, поэтому операция выделения срезки перестановочна со степенным преобразованием. Кроме того, кривая

$$x_i = b_i t^{p_i} (1 + o(1)), \quad i = 1, \dots, n$$

с векторным порядком $P = (p_1, \dots, p_n)$ переходит в кривую

$$y_i = \tilde{b}_i t^{\tilde{p}_i} (1 + o(1)), \quad i = 1, \dots, n$$

с векторным порядком $\tilde{P} = BP$. Следовательно, в двойственном пространстве \mathbb{R}_*^n порядков P степенное преобразование (0.4) индуцирует линейное преобразование. Важно отметить, что преобразование (0.4) взаимнооднозначно отображает множество $\{x : 0 < |x_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$ на множество $\{y : 0 < |y_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$ тогда и только тогда, когда матрица B

унимодулярна. Применение степенных преобразований для нахождения локальных решений алгебраических уравнений обусловлено возможностью понижать количество координат задачи, особенно для срезов полиномов (см. [1]). Кроме локальных и алгебраических свойств решений по многогранникам Ньютона уравнений можно изучать глобальные свойства решений (см., например, обзор [4]).

Целью настоящей работы является изучение алгоритмов анализа структуры алгебраической кривой в окрестности особой точки, что подразумевает решение следующих задач:

- выделение ветвей плоской алгебраической кривой, проходящих через начало координат и ветвей, уходящих в бесконечность с помощью метода многоугольника Ньютона;

- нахождение разложений ветвей в дробно-степенные ряды;

- применение степенных преобразований к нахождению решений уравнения (0.3) в виде функций $x = \Phi(t)$ от параметра t , либо набора асимптотических разложений по параметру.

Основное содержание работы заключено в семи разделах. Раздел 1-6 содержит основные понятия, факты и алгоритмы решения поставленных задач. В Разделе 7 детально исследуются 3 алгебраические кривые методом многоугольника Ньютона и с помощью подходящих степенных преобразований.

1 Ломаная Ньютона

Плоской аффинной алгебраической кривой называют множество точек аффинной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$f(x, y) = 0, \quad (1.1)$$

где $f(x, y)$ полином от двух переменных x и y с коэффициентами из алгебраически замкнутого поля. При замене системы координат полином f меняется и одной из основных задач геометрии является выбор подходящей системы координат, при переходе к которой заданный полином имеет наиболее простой вид или обладает некоторыми специальными свойствами, позволяющими нам говорить о тех или иных геометрических свойствах нашей кривой. Порядок алгебраической кривой определяется степенью полинома f . При переходе к другой системе координат порядок алгебраической кривой не меняется.

Пусть полином $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y) = \sum_{j+k=0}^n a_{jk} x^j y^k, \quad (1.2)$$

причем хотя бы одно из чисел a_{jk} с $j + k = n$ отлично от нуля, здесь n — это порядок этой кривой. Рассмотрим в координатной (j, k) — плоскости многоугольник Ньютона $\mathcal{N}(f)$ полинома (1.2). Многоугольник Ньютона ограничен ломаной $\mathcal{L}(f)$, которую называют *ломаной Ньютона*. Ломаная Ньютона состоит из конечного числа звеньев (Рис. 1). Подчеркнем, что по определению ломаная Ньютона зависит не только от самой алгебраической кривой, но и от выбранной системы координат. Многоугольник Ньютона в некоторых случаях может оказаться отрезком. Если ломаная Ньютона не содержит точек на неотрицательной полуоси $0j$, то кривая (1.1) имеет ветвь $y = 0$. Если ломаная Ньютона не содержит точек на неотрицательной полуоси $0k$, то кривая (1.1) имеет ветвь $x = 0$. Кривая вида (1.1) проходит через начало координат в том и только в том случае, когда

$$(0, 0) \notin \mathcal{N}(f).$$

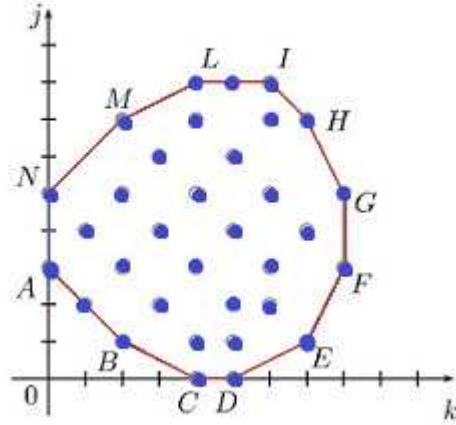


Рисунок 1

Разобьем ломаную Ньютона $\mathcal{L}(f)$ на следующие два множества: *множество обыкновенных звеньев* $\mathcal{L}_o(f)$ и *множество специальных звеньев* $\mathcal{L}_s(f)$. Будем говорить, что звено Γ ломаной Ньютона $\mathcal{L}(f)$ является *обыкновенным*, если направление звена Γ не совпадает с направлением координатных осей $0j$ и $0k$. В противном случае будем говорить, что звено Γ является *специальным*. Очевидно, что

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}_o(f) \cup \mathcal{L}_s(f).$$

Разобьем множество обыкновенных звеньев $\mathcal{L}_o(f)$ на следующие подмножества (см. Рис. 1): $\mathcal{L}_{(0,0)}$ - множество звеньев, ближайших к нулевой точке и имеющих отрицательные угловые коэффициенты; $\mathcal{L}_{(0,\infty)}$ - множество звеньев, ближайших к оси $0k$ и имеющих положительные угловые коэффициенты; $\mathcal{L}_{(\infty,0)}$ - множество звеньев, ближайших к оси $0j$ и имеющих положительные угловые коэффициенты; $\mathcal{L}_{(\infty,\infty)}$ - множество звеньев, отдаленных от нулевой точки и имеющих отрицательные угловые коэффициенты.

Для каждого обыкновенного звена Γ с концевыми точками $(\alpha, k(\alpha))$, $(\beta, k(\beta))$ ($\alpha < \beta$) будем его *длиной* $l = l(\Gamma)$ называть длину его проекции на ось $0k$, т.е. число $k(\beta) - k(\alpha)$. *Характеристическим полиномом* обыкновенного звена Γ будем называть полином вида:

$$\pi_{\Gamma}(t) = \sum_{(j,k) \in \Gamma} a_{jk} t^{k-k(\alpha)}. \quad (1.3)$$

Характеристический полином звена Γ имеет степень $l(\Gamma)$ и не имеет нулевых корней. Число

$$\varepsilon_\Gamma := \frac{\beta - \alpha}{k(\alpha) - k(\beta)} \quad (1.4)$$

будем называть *показателем звена* Γ .

Разобьем множество специальных звеньев $\mathcal{L}_s(f)$ на следующие подмножества (см. Рис. 1): $\mathcal{L}_{0,*}(f)$ - множество горизонтальных звеньев, лежащих на оси $0k$, $\mathcal{L}_{\infty,*}(f)$ - множество горизонтальных звеньев, отдаленных от оси $0k$; $\mathcal{L}_{*,0}(f)$ - множество вертикальных звеньев, лежащих на оси $0j$; $\mathcal{L}_{*,\infty}(f)$ - множество вертикальных звеньев, отдаленных от оси $0j$.

Для каждого горизонтального звена

$$\Gamma \in \mathcal{L}_{(0,*)} \cup \mathcal{L}_{(\infty,*)}$$

с концевыми точками (α, k') , (α, k'') вводится понятие длины, определяются характеристический полином и показатель. *Длина* $l(\Gamma)$ горизонтального звена Γ с концевыми точками (α, k') , (α, k'') совпадает с $k'' - k'$, *характеристический полином* такого звена Γ имеет вид:

$$\pi_\Gamma(t) = \sum_{(j,k) \in \Gamma} a_{jk} t^{k-k'}. \quad (1.5)$$

Характеристический полином горизонтального звена (как и обыкновенного) имеет степень $l(\Gamma)$ и не имеет нулевых корней. Уравнение прямой, проходящей через горизонтальное звено Γ , может быть записано в виде

$$j = \alpha;$$

таким образом, показатель горизонтального звена равен нулю. Наконец, для каждого вертикального звена

$$\Gamma \in \mathcal{L}_{(*,0)} \cup \mathcal{L}_{(*,\infty)}$$

с концевыми точками (j', β) , (j'', β) понятия длины характеристического полинома и показателя вводятся несколько иначе. *Длиной* $l(\Gamma)$ вертикального звена Γ с концевыми точками (j', β) , (j'', β) называется число $j'' - j'$. *Характеристический полином* такого звена Γ определяется равенством

$$\pi_{\Gamma}(t) = \sum_{(j,\beta) \in \Gamma} a_{j\beta} t^{j-j'}. \quad (1.6)$$

Характеристический полином вертикального звена также имеет степень $l(\Gamma)$ и не имеет нулевых корней. Уравнение прямой, проходящей через вертикальное звено Γ , может быть записано в виде

$$k = b;$$

таким образом, показатель вертикального звена следует считать равным бесконечности. Ломаная Ньютона $\mathcal{L}(f)$ несет важную информацию об алгебраической кривой (1.1). Она, вообще говоря, определяет ветви кривой, проходящие через начало координат, ненулевые точки пересечения кривой с осями координат а также неограниченные ветви этой кривой.

2 Подготовительная теорема Вейерштрасса

Структуру алгебраической кривой в окрестности начала координат подсказывает Подготовительная теорема Вейерштрасса (Vorbereitungssatz). Она лежит в основе связей между комплексным анализом и алгеброй и обобщает известное свойство голоморфных функций одного переменного обращаться в нуль как целые степени $z - a$: если $f(a) = 0$ (но не равна нулю тождественно), то в некоторой окрестности точки a

$$f(z) = (z - a)^q g(z), \quad (2.1)$$

где g голоморфна и $g(z) \neq 0$.

В многомерном случае место степени $z - a$ занимает многочлен по одной из переменных, например z_n , с коэффициентами, голоморфно зависящими от остальных переменных $'z = (z_1, \dots, z_{n-1})$.

Теорема 2.1 [6] *Пусть функция f голоморфна в некоторой окрестности U точки $a \in \mathbb{C}^n$ и $f(a) = 0$, но $f('a, z_n)$ не равна нулю тождественно. Тогда в некоторой окрестности V этой точки*

$$f(z) = W('z, z_n)g(z), \quad (2.2)$$

где

$$W('z, z_n) = (z_n - a_n)^q + c_1('z)(z_n - a_n)^{q-1} + \dots + c_q('z)$$

— полином от z_n с голоморфными коэффициентами c_ν в окрестности $'V$, $c_\nu('a) = 0$, а $q \geq 1$ — порядок нуля $f('a, z_n)$ в точке $z_n = a_n$ и $g(z)$ голоморфна в V и не обращается там в нуль.

Функцию $W('z, z_n)$ называют псевдополиномом Вейерштрасса.

Далее будем рассматривать полином $f(x, y)$ двух комплексных переменных x, y . В силу Теоремы 2.1 полином $f(x, y)$ в окрестности нуля представляется в виде

$$f(x, y) = W(x, y)g(x, y), \quad (2.3)$$

где $p \geq 0$, $W(x, y) = y^q + c_{q-1}(x)y^{q-1} + \dots + c_0(x)$ — псевдополином Вейерштрасса. Из представления (2.3) следует, что через начало координат

проходят q ветвей (с учётом кратности) вида

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{\frac{k}{r}}, \quad (2.4)$$

где $r \in \mathbb{N}$. Ряд (2.4) сходится в некоторой окрестности нуля.

Пример 2.1

Рассмотрим полином $f(x, y) = y^2 - y + x$. Исследуем структуру кривой

$$f(x, y) = y^2 - y + x = 0$$

в окрестности начала координат, используя Подготовительную теорему Вейерштрасса. Заметим, что $f(0, 0) = 0$, а $f(0, y) = y^2 - y = 0$ при $y = 0$, $y = 1$, то есть $f(0, y)$ не обращается в нуль тождественно. Представление (2.3) для данного полинома имеет вид

$$y^2 - y + x = W(x, y)g(x, y),$$

где псевдополином Вейерштрасса

$$W(x, y) = y - \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2},$$

а функция

$$g(x, y) = y - \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Действительно, уравнение

$$y^2 - y + x = 0$$

имеет два корня

$$y_1(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2}, \quad y_2(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2},$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Таким образом, через начало координат проходит единственная ветвь $y(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$.

Пример 2.2

Рассмотрим полином $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Заметим, что $f(0, 0) = 0$, а $f(0, y) = y^3 = 0$ при $y = 0$. В данном случае псевдополином $W(x, y)$ совпадает с самим полиномом $f(x, y)$, то есть

$$W(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,$$

а $g(x, y) \equiv 1$. Проверим условие на коэффициенты полинома $W(x, y)$, переписав его для удобства в виде $W(x, y) = y^3 - 3xy + x^3$:

$$c_1(x) = 0, \quad c_2(x) = -3x, \quad c_3(x) = x^3,$$

$$c_1(0) = 0, \quad c_2(0) = 0, \quad c_3(0) = 0.$$

3 Кратные точки кривой

Рассмотрим пересечение кривой (1.1) и прямой

$$L : x = a + \lambda t, \quad y = b + \mu t,$$

когда L проходит через точку $P(a, b)$ кривой. прямая L определяется отношением $\lambda : \mu$. Точки пересечения прямой L и кривой (1.0) соответствует корнем уравнения

$$f(a + \lambda t, b + \mu t) = 0.$$

Разложим левую часть этого уравнения по степеням t :

$$(f_x \lambda + f_y \mu)t + \frac{1}{2!}(f_{xx} \lambda^2 + 2f_{xy} \lambda \mu + f_{yy} \mu^2)t^2 + \dots = 0.$$

Предположим, что все производные многочлена f до порядка $r - 1$ включительно обращаются в нуль в точке P и хотя бы одна производная r -го порядка отлична от нуля в этой точке. Тогда всякая прямая, проходящая через P , имеет с кривой по меньшей мере r - кратное пересечение в точке P . В этом случае P называют *точкой кратности r* . Точка кривой (1.1), имеющая кратность 1, называют *обыкновенной точкой* кривой. Точки кратности 2 и более называют *особыми точками*.

4 Ветви кривой, проходящие через начало координат

В данном разделе рассмотрим случай, когда начало координат $(0, 0)$ является точкой кривой (1.1); в силу (1.2) это означает, что $a_{00} = 0$ или, то, что точка $(0, 0) \notin \mathcal{N}(f, \sigma)$. Обычно при анализе нулевой точки кривой различают два случая, когда эта точка является *обыкновенной* и когда она является *особой*. В первом случае предполагается, что одна из производных $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$, то есть одно из чисел a_{01} , a_{10} отлично от нуля; в этом случае через нулевую точку проходит только одна ветвь кривой, которая (в малой окрестности начала координат) допускает аналитическое представление либо вида $y = \phi(x)$, $(\phi(0) = 0)$, либо вида $x = \psi(y)$, $(\psi(0) = 0)$; здесь $\phi(x)$ или $\psi(y)$ непрерывная функция, определенная в достаточно малой окрестности нуля. Во втором случае предполагается, что обе производные функции $f(x, y)$ в нулевой точке (т.е. числа a_{01} , a_{10}) обращаются в нуль; в этом случае кривая (1.1) в окрестности начала координат устроена более сложным образом— через нее проходит несколько ветвей вида $y = \phi(x)$ (или $x = \psi(y)$). В дальнейшем предполагается, что начало координат является особой точкой.

Ломаная Ньютона в основных случаях позволяет почти без вычислений определить не только число ветвей кривой (1.1), проходящих через начало координат, но и первые ненулевые члены разложений (2.4) этих ветвей.

Теорема 4.1 Пусть $\mathcal{L}(f)$ — ломаная Ньютона алгебраической кривой (1.1). Каждая проходящая через нулевую точку ветвь кривой (1.1) представима в виде

$$\phi(x) = cx^\varepsilon(1 + z(x)), \quad (4.1)$$

где ε — показатель некоторого звена $\Gamma \in \mathcal{L}_{(0,0)}$, c — корень характеристического полинома этого звена и $z(x)$ непрерывная в нуле функция, причем $z(0) = 0$.

Доказательство этой теоремы фактически содержится в книге [3].

Более того, совокупность всех одночленов

$$\{cx^\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon_\Gamma, \pi_\Gamma(c) = 0, \Gamma \in \mathcal{L}_{(0,0)}\} \quad (4.2)$$

совпадает с первыми ненулевыми членами разложений (2.4), соответствующих проходящим через нулевую точку ветвям функций $\phi(x)$ в дробно-степенные ряды. Наконец, сумма всех степеней характеристических полиномов звеньев множества $\mathcal{L}_{(0,0)}$ в комплексном случае совпадает с числом правильных ветвей кривой (1.1), проходящих через начало координат, а в вещественном случае совпадает или на четное число превышает число этих ветвей.

Для получения следующих (ненулевых) членов разложений, соответствующих проходящим через начало координат ветвям кривой (1.1), используются такие рассуждения. Выбирается один из одночленов (4.2) и в уравнении (1.1) выполняется замена переменной

$$y = cx^\varepsilon(1 + \tilde{y}), \quad (4.3)$$

в результате которой уравнение (1.1) переходит в новое уравнение

$$f^\circ(x, \tilde{y}) = 0. \quad (4.4)$$

Полученное уравнение не эквивалентно исходному, так как его решения вида $\tilde{y} = \psi(x)$ по формуле (4.3) определяют те и только те решения уравнения (1.1), которые допускают представление (4.3). Уравнение (4.4) по сравнению с уравнением (1.1) обладает двумя особенностями. Во-первых, оно имеет еще решение $x = 0$ и кратность этого решения заведомо превышает кратность решения уравнения (1.1), а именно, можно показать, что она превышает число $\frac{ak(b)-bk(a)}{k(b)-k(a)}$. Во-вторых, в общем случае показатель ε является рациональным числом $\varepsilon = \frac{p}{q}$, и поэтому его левая часть $f^\circ(x, \tilde{y})$ является многочленом от переменных $x^{\frac{1}{q}}\tilde{y}$. Для его исследования метод многоугольника Ньютона и, в частности, Теорема 4.1 непосредственно неприменимы. Однако, анализ решений вида $\tilde{y} = \psi(x)$ уравнения (4.4) эквивалентен анализу решений уравнения

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0, \quad (4.5)$$

в котором левая часть получена из функции $f^\circ(x, \tilde{y})$ при помощи замены переменной $x^q = \tilde{x}$ и отбрасыванием множителя \tilde{x}^h с максимально возможным h . Применение Теоремы 4.1 к уравнению (4.5) позволяет определить для всех его решений вида $\tilde{y} = \tilde{\phi}(\tilde{x})$ первые члены в разложениях по степеням (целым или дробным) переменной \tilde{x} и, следовательно, вторые члены в разложениях по степеням (целым или дробным) переменной x .

Замечание 4.1 *Следует иметь в виду, что уравнение (4.5) может иметь и решение $\tilde{y} = 0$. Это означает, что исходное уравнение (1.1) имеет решение $y = cx^\varepsilon$.*

Аналогичным образом можно поступать для определения всех ненулевых членов в разложениях (2.4). В результате, при построении разложения некоторой фиксированной ветви кривой, определяемой уравнением (1.1), будет получена (конечная или бесконечная) последовательность уравнений

$$f_{(n)}(x_{(n)}, y_{(n)}) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

с

$$f_{(0)}(x, y) = f(x, y), \quad (x_{(0)} = x, y_{(0)} = y)$$

и

$$f_{(n+1)}(x_{(n+1)}, y_{(n+1)}) = \tilde{f}_{(n)}(\tilde{x}_{(n)}, \tilde{y}_{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Общая схема выделения некоторой фиксированной ветви кривой (1.1) выглядит следующим образом:

- 1) на шаге n имеем уравнение $f_{(n)}(x_{(n)}, y_{(n)}) = 0$;
- 2) строим многоугольник Ньютона $\mathcal{N}(f_{(n)})$;
- 3) выбираем одно из звеньев $\Gamma_{(n)} \in \mathcal{L}_{(0,0)}(f_{(n)})$;
- 4) находим характеристический полином $\pi_{\Gamma_{(n)}}(t)$ и показатель звена $\varepsilon_{(n)}$;
- 5) выбираем один из корней $c_{(n)}$ полинома $\pi_{\Gamma_{(n)}}(t)$ и определяем главный член $c_{(n)}x_{(n)}^{\varepsilon_{(n)}}$ ветви, соответствующей выбранному звену $\Gamma_{(n)}$;

б) с помощью замены вида (4.3) переходим на шаг $(n + 1)$, при этом $f_{(n+1)}(x_{(n+1)}, y_{(n+1)}) = \tilde{f}_{(n)}(\tilde{x}_{(n)}, \tilde{y}_{(n)})$.

Замечание 4.2 (I) *Описанная процедура конечна в том и только том случае, когда разложение (2.4) соответствующей ветви кривой (1.1) оказывается конечным.*

(II) *Для каждой ветви последовательность длин $(l(\Gamma_{(n)}))$ звеньев $\Gamma_{(n)}$ невозрастающая и стабилизируется к некоторому натуральному числу \varkappa (это число совпадает с кратностью рассматриваемой ветви).*

(III) *Равенство $\varkappa(\cdot) = 1$ для исследуемой ветви определяется за конечное число шагов по уравнениям (4.6); равенство $\varkappa(\cdot) = \varkappa$ с $\varkappa > 1$ устанавливается лишь в результате бесконечного числа шагов по уравнениям (4.6).*

(IV) *В случае вещественного полинома (1.2) ветвь кривой (1.1) является вещественной при $x > 0$ ($x < 0$) в том и только в том случае, когда все коэффициенты s_k соответствующего разложения (2.4) этой ветви являются вещественными.*

5 Ветви, “уходящие” в бесконечность

Здесь мы рассмотрим те ветви, для которых либо одна из координат стремится к бесконечности, а вторая - к нулевому значению: $x \rightarrow 0, y \rightarrow \infty$ или $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$; либо обе координаты стремятся к бесконечности: $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$.

Для исследования ветвей кривой (1.1), для которых $x \rightarrow 0, y \rightarrow \infty$ или $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$, или $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ сделаем в уравнении (1.1) соответствующую замену переменной

$$x = u, y = \frac{1}{v}; x = \frac{1}{u}, y = v; x = \frac{1}{u}, y = \frac{1}{v}. \quad (5.1)$$

При каждой из этих замен левая часть уравнения (1.1) обращается в дробь, обращение в нуль числителя которой является новым алгебраическим уравнением, степень которого совпадает со степенью (1.1). Применяя к каждому из полученных трех уравнений Теорему 4.1 и последующие за ней рассуждения находим аналогичные (2.4) представления искомым ветвей в переменных u и v :

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u^{\frac{k}{r}}. \quad (5.2)$$

Далее возвращаемся к исходным переменным x и y . Используя стандартные правила обращения со степенными рядами, получаем представления этих ветвей в соответствующем виде

$$y = \sum_{k=\nu}^{\infty} c_k x^{\frac{k}{r}} \quad (\nu < 0), \quad x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty, \quad (5.3)$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{-\frac{k}{r}}, \quad x \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow 0, \quad (5.4)$$

$$y = \sum_{k=\nu}^{\infty} c_k x^{-\frac{k}{r}} \quad (\nu < 0), \quad x \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Тем самым задача сводится к изучению проходящих через начало координат ветвей некоторых вспомогательных кривых.

В действительности, для построения представлений (5.3)–(5.5) строить соответствующие представления (5.2) нет необходимости; в частности первые их члены определяются непосредственно из диаграммы Ньютона, построенной для уравнения (1.1). В самом деле, при каждой из замен переменных (5.1) диаграмма Ньютона для уравнения (1.1) переходит в диаграмму Ньютона вспомогательных кривых. Так, при первой из этих замен $(x = u, y = \frac{1}{v})$ исходная диаграмма Ньютона симметрично отражается относительно оси абсцисс, а затем сдвигается вверх и в результате снова оказывается в первом квадранте; при этом звенья $\mathcal{L}_{(\infty,0)}$ исходной ломаной Ньютона переходят в звенья $\mathcal{L}_{(0,0)}$ новой ломаной Ньютона для соответствующей вспомогательной кривой. Аналогично, при второй замене $(x = \frac{1}{u}, y = v)$ в новой ломаной Ньютона на месте звеньев $\mathcal{L}_{(0,0)}$ оказывается звенья $\mathcal{L}_{(\infty,0)}$ старой ломаной Ньютона. Наконец, при третьей замене $(x = \frac{1}{u}, y = \frac{1}{v})$ в звенья $\mathcal{L}_{(0,0)}$ новой ломаной Ньютона переходят звенья $\mathcal{L}_{(\infty,\infty)}$ старой ломаной Ньютона. Справедлива

Теорема 5.1 Пусть $\mathcal{L}(f, \sigma)$ — ломаная Ньютона алгебраической кривой (1.1). Тогда множество $\mathcal{L}_{(0,\infty)}$, $\mathcal{L}_{(\infty,0)}$ или $\mathcal{L}_{(\infty,\infty)}$ непусто в том и только в том случае, когда кривая (1.1) имеет “убегающие” в бесконечность ветви кривой (1.1) соответственно одного из видов $x \rightarrow 0, y \rightarrow \infty$; $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$; $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$. Каждая такая “убегающая” в бесконечность ветвь представима в виде

$$\phi(x) = cx^\varepsilon(1 + z(x)), \quad (5.6)$$

где ε — показатель некоторого звена Γ соответственно из $\mathcal{L}_{(0,\infty)}$, $\mathcal{L}_{(\infty,0)}$ или $\mathcal{L}_{(\infty,\infty)}$, c — корень характеристического полинома этого звена и $z(x)$ — функция, непрерывная в нуле и обращающаяся в нуль в нуль в первом случае, и стремящаяся к нулю при $x \rightarrow \infty$ во втором и третьем случаях. Более того, совокупность всех одночленов

$$\begin{aligned} & \{\psi(x) = cx^\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon(\Gamma), \pi_\Gamma(c) = 0, \Gamma \in \mathcal{L}_{0,\infty}\} \\ & \{\psi(x) = cx^\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon(\Gamma), \pi_\Gamma(c) = 0, \Gamma \in \mathcal{L}_{\infty,0}\} \\ & \{\psi(x) = cx^\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon(\Gamma), \pi_\Gamma(c) = 0, \Gamma \in \mathcal{L}_{\infty,\infty}\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

совпадает с первыми ненулевыми членами соответственно разложений (5.3)–(5.5) в ряды по степеням $x^{\frac{1}{r}}$, соответствующих “убегающих” в бесконечность ветвей кривой (1.1).

6 Степенные преобразования

Рассмотрим полином

$$f(x) = \sum a_Q x^Q, \quad (6.1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2$, $x^Q = x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2}$, $a_Q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ломаная Ньютона $\mathcal{L}(f)$, будучи границей многогранника Ньютона $\mathcal{N}(f)$, состоит из граней размерности 0 и 1. Каждой грани Γ сопоставим полином

$$f_\Gamma(x) = \sum_{Q \in \Gamma \cap S} a_Q x^Q, \quad (6.2)$$

называемый *срезкой* полинома $f(x)$, здесь S – носитель полинома $f(x)$.

Пусть \mathbb{R}_*^2 есть двойственное пространство к \mathbb{R}^2 и точка $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$. *Нормальным конусом* U к грани Γ называется множество всех точек $P \in \mathbb{R}_*^2$, для которых скалярное произведение $\langle P, Q \rangle$ достигает максимума по $Q \in S$ в точках $Q \in \Gamma$. Легко видеть, что нормальный конус U для одномерной грани представляет собой луч, сонаправленный с внешней нормалью к этой грани. Если грань нульмерная (т.е. вершина), то нормальный конус представляет собой сектор, ограниченный лучами, ортогональными смежным граням.

Степенным преобразованием называется отображение вида

$$\log x = A \log y, \quad (6.3)$$

где $\log x = (\log x_1, \log x_2)^T$, $\log y = (\log y_1, \log y_2)^T$, $A = (a_{ij})$ – невырожденная матрица 2-го порядка с рациональными элементами. Моном x^Q преобразуется в моном $y^{\tilde{Q}}$, причем точка Q переходит в точку \tilde{Q} по правилу

$$\tilde{Q}^T = A^T Q^T. \quad (6.4)$$

Сформулируем теорему, лежащую в основе метода степенных преобразований, в интересующем нас двумерном случае. Для произвольной размерности она доказана в книге [1].

Теорема 6.1 [1] *Для грани Γ многоугольника $\mathcal{N}(f)$ существует степенное преобразование (6.3) с унимодулярной матрицей A , которое преобразует срезку $f_\Gamma(x)$ к виду*

$$f_\Gamma(x) = y_1^q g(y_2). \quad (6.5)$$

Далее опишем схему вычисления асимптотических разложений решений алгебраических уравнений

$$f(x_1, x_2) = 0.$$

Шаг 1. Построим многоугольник Ньютона полинома $f(x_1, x_2)$.

Шаг 2. Выделим грани размерности 1, принадлежащие множеству $\mathcal{L}_{(0,0)}$ ломаной Ньютона.

Шаг 3. Для каждой грани Γ выполним степенное преобразование $x \rightarrow y$ как в теореме 6.1 и получим уравнение срезки $g(y_2) = 0$.

Далее выделяются два возможных случая.

Случай 1. Полином $g(y_2)$ имеет простой корень y_2^0 . В этом случае применима теорема о неявной функции, что даёт возможность найти параметрическое разложение для решений уравнения $f(x_1, x_2) = 0$

Случай 2. Полином $g(y_2)$ имеет кратный корень y_2^0 . В этом случае строится многогранник Ньютона полного полинома $f_1(y_1, y_2)$ и далее процедура повторяется с Шага 1.

7 Примеры

В данном разделе мы исследуем несколько алгебраических кривых с помощью метода многоугольника Ньютона, а именно, найдём все ветви, проходящие через начало координат, в виде разложений рядов, а также представление их в параметрическом виде, используя подходящие степенные преобразования.

7.1 Лист Декарта

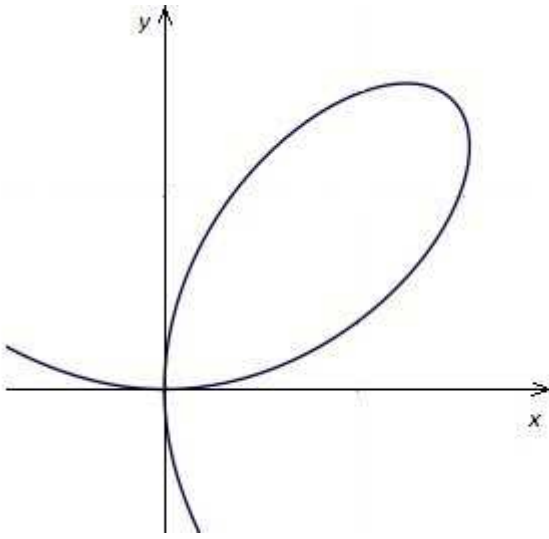


Рисунок 2

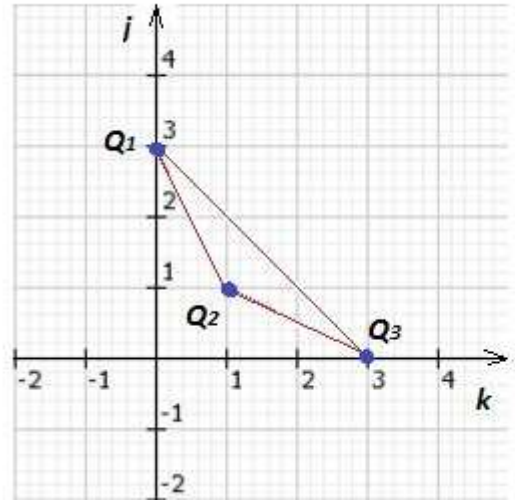


Рисунок 3

Рассмотрим алгебраическую кривую, которая называется лист Декарта и определяется уравнением

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0. \quad (7.1)$$

Многоугольник Ньютона для данной кривой, изображенный на Рис. 3, есть выпуклая оболочка трех точек $Q_1 = (3, 0)$, $Q_2 = (0, 3)$, $Q_3 = (1, 1)$.

Рассмотрим звено $\Gamma_1^{(1)}$ из множества $\mathcal{L}_{(0,0)}$. Характеристический полином для звена $\Gamma_1^{(1)}$ выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-1} - 3,$$

он имеет единственный корень $t = \frac{1}{3}$. Далее по формуле (1.4) вычислим показатель звена $\Gamma_1^{(1)}$: $\varepsilon^{(1)} = 2$. Таким образом, получаем первое прибли-

жение ветви \mathcal{F}_1 , проходящей через начало координат:

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_1 выполняем замену $y = \frac{1}{3}x^2(1 + y_1)$ в уравнении (7.1). Имеем

$$\frac{1}{27}x^6y_1^3 + \frac{1}{9}x^6y_1^2 + \frac{1}{9}x^6y_1 + \frac{1}{27}x^6 - x^3y_1 = 0,$$

далее сократим на x^3 и получим уравнение

$$\frac{1}{27}x^3y_1^3 + \frac{1}{9}x^3y_1^2 + \frac{1}{9}x^3y_1 + \frac{1}{27}x^3 - y_1 = 0. \quad (7.2)$$

Следуя тому же алгоритму, найдём первые приближения ветвей кривой (7.2). Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.2). Он представляет собой выпуклую оболочку пяти точек $Q_1 = (3, 0)$, $Q_2 = (0, 1)$, $Q_3 = (3, 3)$, $Q_4 = (3, 1)$, $Q_5 = (3, 2)$ (см. Рис. 4).

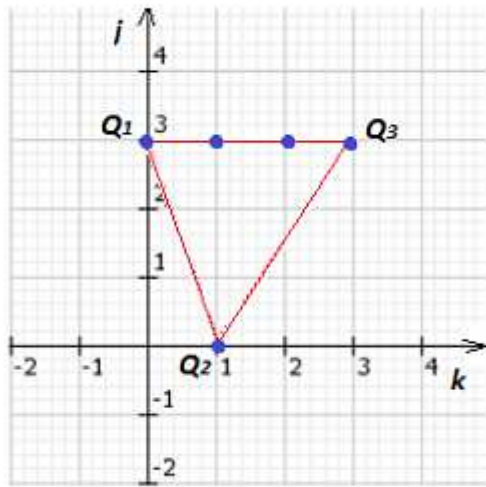


Рисунок 4

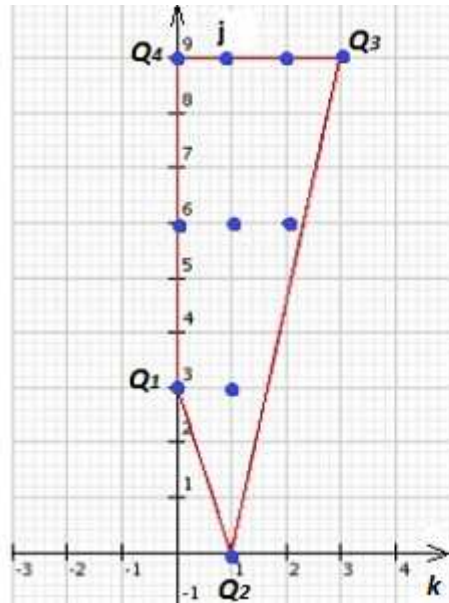


Рисунок 5

На втором шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = \frac{1}{27}t^{-1} - 1,$$

он имеет один корень $t = \frac{1}{27}$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 3$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = \frac{1}{27}x^3 + \dots$$

Таким образом, имеем представление для ветви \mathcal{F}_1 :

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{81}x^5 + \dots .$$

Для нахождения третьего члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_1 выполняем замену $y_1 = \frac{1}{27}x^3(1 + y_2)$ в уравнении (7.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{19683}x^{12}y_2^3 + \frac{1}{6561}x^{12}y_2^2 + \frac{1}{6561}x^{12}y_2 + \frac{1}{19683}x^{12} + \frac{1}{243}x^9y_2^2 + \\ + \frac{2}{243}x^9y_2 + \frac{1}{243}x^9 + \frac{1}{9}x^6y_2 + \frac{1}{9}x^6 - x^3y_2 = 0, \end{aligned}$$

далее сократим на x^3 и получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{19683}x^9y_2^3 + \frac{1}{177147}x^9y_2^2 + \frac{1}{177147}x^9y_2 + \frac{1}{19683}x^9 + \frac{1}{243}x^6y_2^2 + \frac{2}{243}x^6y_2 + \\ + \frac{1}{243}x^6 + \frac{1}{9}x^3y_2 + \frac{1}{9}x^3 - y_2 = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Многоугольник Ньютона для кривой (7.3) изображен на Рис. 5.

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(3)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = \frac{1}{243}t^{-1} - \frac{1}{27},$$

он имеет один корень $t = \frac{1}{9}$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(3)} = 3$, а также первое приближение для y_2

$$y_2 = \frac{1}{9}x^3 + \dots$$

и второе приближение для y_1

$$y_1 = \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{243}x^6 + \dots .$$

Таким образом, имеет место разложение для ветви \mathcal{F}_1 :

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{81}x^5 + \frac{1}{729}x^8 + \dots .$$

Второе звено $\Gamma_2^{(1)}$ из множества $\mathcal{L}_{(0,0)}$ многогранника Ньютона кривой (7.1) соединяет точки $Q_3 = (0, 3)$ и $Q_2 = (1, 1)$ (см. Рис.3). Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = -3t^{-2} + 1,$$

он имеет два корня $t_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, а показатель звена $\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{2}$. В результате, получаем первые приближения двух других ветвей, проходящих через начало координат:

$$\mathcal{F}_2 : y = -\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

и

$$\mathcal{F}_3 : y = \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_2 выполняем замену $y = -\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.1). В результате имеем уравнение:

$$-\sqrt{27}x^{\frac{3}{2}}y_1^3 - 3\sqrt{27}x^{\frac{3}{2}}y_1^2 - 3\sqrt{27}x^{\frac{3}{2}}y_1 + 3\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}y_1 + x^3 = 0.$$

Далее сократим на $x^{\frac{3}{2}}$ и сделаем замену $x_1 = x^{\frac{1}{2}}$:

$$-\sqrt{27}y_1^3 - 3\sqrt{27}y_1^2 - 6\sqrt{3}y_1 + x_1^3 = 0. \quad (7.4)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.3). Он представляет собой выпуклую оболочку четырёх точек $Q_1 = (0, 1)$, $Q_2 = (3, 0)$, $Q_3 = (0, 3)$, $Q_4 = (0, 2)$ (см. Рис. 6).

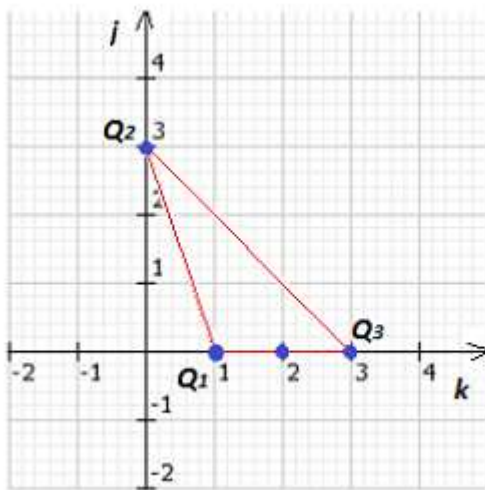


Рисунок 6

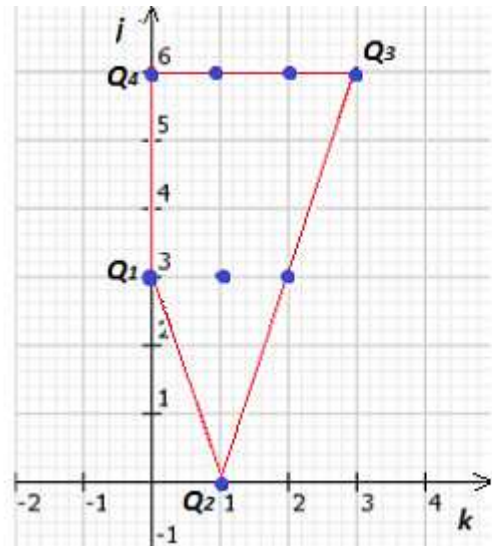


Рисунок 7

На втором шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-1} - 6\sqrt{3},$$

он имеет один корень $t = \frac{\sqrt{3}}{18}$. Находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 3$, и первое приближение для y_1 :

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{18}x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_2 представляется в виде:

$$y = -\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^2 + \dots$$

Для нахождения третьего члена разложения для ветви \mathcal{F}_2 выполним замену $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{18}x_1^3(1 + y_2)$ в уравнении (7.4):

$$-\frac{1}{216}x_1^9y_2^3 - \frac{3}{216}x_1^9y_2^2 - \frac{3}{216}x_1^9y_2 - \frac{1}{216}x_1^9 - \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^6y_2^2 - \frac{2\sqrt{3}}{12}x_1^6y_2 - \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^6 - x_1^3y_2 = 0,$$

далее сократим на x_1^3 и получим:

$$-\frac{1}{216}x_1^6y_2^3 - \frac{1}{72}x_1^6y_2^2 - \frac{1}{72}x_1^6y_2 - \frac{1}{216}x_1^6 - \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^3y_2^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}x_1^3y_2 - \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^3 - y_2 = 0. \quad (7.5)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.5)(см. Рис. 7).

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(3)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = -\frac{\sqrt{3}}{12}t^{-1} - 1,$$

он имеет один корень $t = -\frac{\sqrt{3}}{12}$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(3)} = 3$, а также первое приближение для y_2

$$y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{12}x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

и второе приближение для y_1

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{18}x_1 - \frac{1}{72}x_1^3 + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_2 представляется в виде:

$$y = -\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{72}x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_3 выполняем замену $y = \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.1):

$$\sqrt{27}x_1y_1^3 + 3\sqrt{27}x_1y_1^2 + 6\sqrt{3}x_1y_1 + x_1^4 = 0.$$

После сокращения на x_1 получим уравнение:

$$\sqrt{27}y_1^3 + 3\sqrt{27}y_1^2 + 6\sqrt{3}y_1 + x_1^3 = 0. \quad (7.6)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.6) (см. Рис. 8).

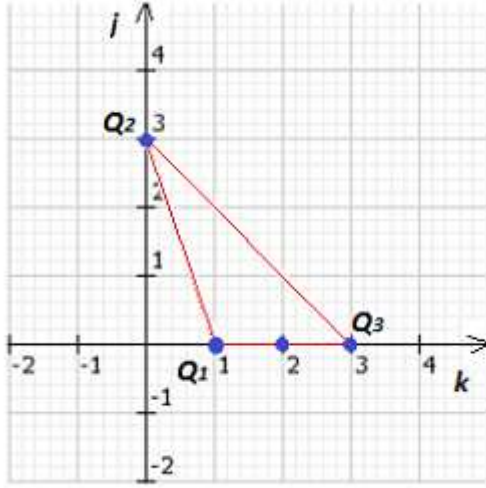


Рисунок 8

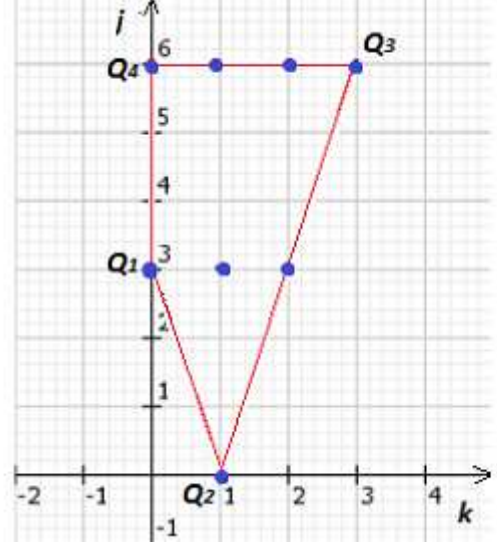


Рисунок 9

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-1} + 6\sqrt{3},$$

он имеет один корень $t = -\frac{\sqrt{3}}{18}$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(3)} = 3$, и первое приближение для y_1 :

$$y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{18}x_1^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_3 представляется в виде:

$$y = \sqrt{3}x_1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x_1^2 + \dots$$

Для нахождения третьего члена разложения для ветви \mathcal{F}_3 выполняем замену $y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{18}x_1^3(1 + y_2)$ в уравнении (7.6):

$$-\frac{1}{216}x_1^9y_2^3 - \frac{3}{216}x_1^9y_2^2 - \frac{3}{216}x_1^9y_2 - \frac{1}{216}x_1^9 + \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^6y_2^2 + \frac{2\sqrt{3}}{12}x_1^6y_2 + \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^6 - x_1^3y_2 = 0,$$

далее сократим на x_1^3 и получим:

$$-\frac{1}{216}x_1^6y_2^3 - \frac{1}{72}x_1^6y_2^2 - \frac{1}{72}x_1^6y_2 - \frac{1}{216}x_1^6 + \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^3y_2^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}x_1^3y_2 + \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^3 - y_2 = 0. \quad (7.7)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.7) (см. Рис. 9).

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(3)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = \frac{\sqrt{3}}{12}t^{-1} - 1,$$

он имеет один корень $t = \frac{\sqrt{3}}{12}$. Далее считаем показатель звена $\varepsilon^{(3)} = 3$, а также первое приближение для y_2

$$y_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^3 = \frac{\sqrt{3}}{12}x_1^{\frac{3}{2}} + \dots$$

и второе приближение для y_1

$$y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{18}x_1 - \frac{1}{72}x_1^3 + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_3 представляется в виде:

$$y = \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{72}x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Теперь рассмотрим звено $\Gamma_3^{(1)} \in \mathcal{L}_{(\infty,\infty)}$ ломаной Ньютона кривой (7.1). Найдём ветвь этой кривой удовлетворяющей условию: $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$. Для этого сделаем следующую замену переменной $x = \frac{1}{u}, y = \frac{1}{v}$ в уравнении (7.1). После замен задача сводится к нахождению ветвей кривой

$$v^3 + u^3 - 3u^2v^2 = 0, \quad (7.8)$$

проходящих через начало координат. Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.8) (см. Рис 10).

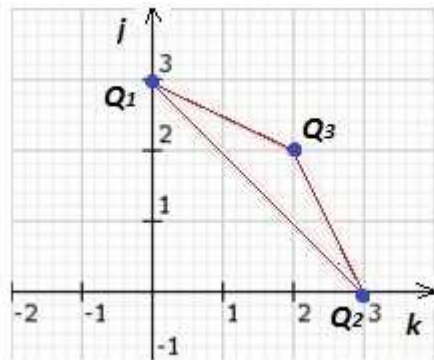


Рисунок 10

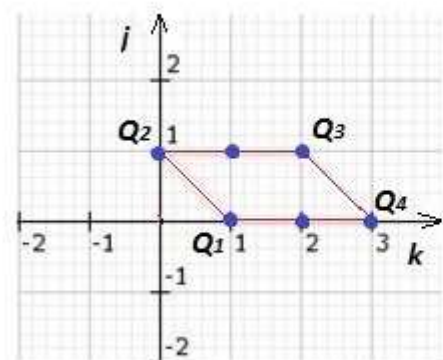


Рисунок 11

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено. Характеристический полином для этого звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-3} + 1,$$

он имеет один корень $t = -1$. Далее считаем показатель звена $\varepsilon^{(1)} = 1$. Получили первое приближение в переменных u и v .

$$v = -u + \dots$$

Для получения второго члена разложения выполняем замену $v = -u(1 + v_1)$ в уравнении (7.8):

$$-u^3(v_1^3 + 3v_1^2 + 3v_1 + 1) - 3u^2u^2(1 + v_1) + u^3 = 0,$$

далее сократим на $-u^3$ и получим:

$$3v_1 + 3v_1^2 + v_1^3 + 3u + 6uv_1 + 3uv_1^2 = 0. \quad (7.9)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.9) (см. Рис. 11).

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено. Характеристический полином для звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = 3t^{-1} + 3,$$

он имеет один корень $t = -1$. Далее считаем показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 1$, и первое приближение для v_1

$$v_1 = -u + \dots$$

Получили второе приближение в переменных u и v .

$$v = -u + u^2 + \dots$$

Для получения третьего члена разложения выполняем замену $v_1 = -u(1 + v_2)$ в уравнении (7.9):

$$-3uv_2 + 3u^2v_2^2 - 3u^2 - u^3v_2^3 + 3u^3v_2^2 + 2u^3 = 0,$$

далее сократим на $-u$ и получим:

$$3v_2 - 3uv_2^2 + 3u + u^2v_2^3 - 3u^2v_2^2 - 2u^2 = 0. \quad (7.10)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.10) (см. Рис. 12).

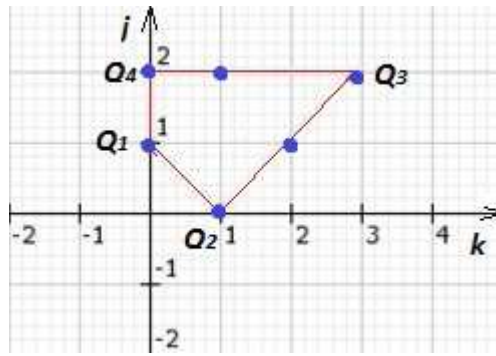


Рисунок 12

На этом шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено. Характеристический полином для звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = 3t^{-1} + 3,$$

и он имеет один корень $t = -1$. Далее считаем показатель звена $\varepsilon^{(3)} = 1$, и первое приближение для v_2

$$v_2 = -u \dots ,$$

а также второе приближение для v_1

$$v_1 = -u + u^2 \dots .$$

Получили третий член разложения в переменных u и v .

$$v = -u + u^2 - u^3 \dots .$$

Теперь сделаем обратную замену переменных $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots \Rightarrow y = \frac{1}{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots} = \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \dots)} = -x(1 + \frac{1}{x} + \dots) = -x - 1 + \dots . \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили два члена разложения ветви уходящей в бесконечность: $y = -x - 1 + \dots$. Декартов лист имеет наклонную асимптоту $y = -x - 1$.

Изучим решения уравнения (7.1) вблизи нуля с помощью метода степенных преобразований.

Грань $\Gamma_1 = Q_1Q_2$ многогранника на Рис.2 имеет нормальный конус, направленный вдоль вектора $(1,2)$. Рассмотрим унимодулярную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и соответствующее степенное преобразование

$$x_1 = y_1y_2, \quad x_2 = y_1y_2^2.$$

Применим это преобразование. Уравнение (7.1) перейдёт в:

$$g := y_1^3y_2^6 + y_1^3y_2^3 - 3y_1^2y_2^3 = 0.$$

Далее сократим на $y_1^2y_2^3$ и получим уравнение

$$y_1y_2^3 + y_1 - 3 = 0. \tag{7.11}$$

Многогранник для кривой (7.11) изображён на Рис. 13.

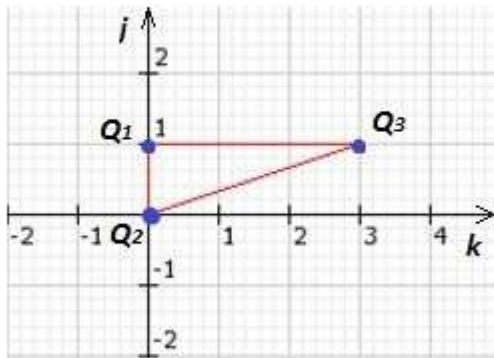


Рисунок 13

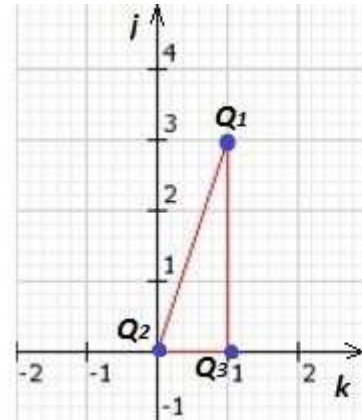


Рисунок 14

Заметим, что грань Γ_1 перешла в вертикальную $\tilde{\Gamma}_1 = Q_1Q_2$; для неё срезка $g_{\tilde{\Gamma}_1} = y_1 - 3$, имеет простой корень $y_1 = 3$, следовательно, теорема о неявной функции в окрестности нуля даёт явное выражение y_1 через y_2 :

$$y_1 = \frac{3}{1 + y_2^3}.$$

Таким образом, получаем параметрическое представление ветви \mathcal{F}_1 кривой (7.1):

$$x_1 = \frac{3y_2}{1 + y_2^3}, \quad x_2 = \frac{3y_2^2}{1 + y_2^3},$$

y_2 изменяется в окрестности нуля.

Для грани $\Gamma_2 = Q_2Q_3$ рассмотрим степенное преобразование следующего вида

$$x_1 = y_1^2 y_2, \quad x_2 = y_1 y_2.$$

Применим его и получим новое уравнение:

$$g := y_1^6 y_2^3 + y_1^3 y_2^3 - 3y_1^3 y_2^2 = 0.$$

Далее сократим на $y_1^3 y_2^3$:

$$y_1^3 y_2 + y_2 - 3 = 0. \quad (7.12)$$

Многогранник для кривой (7.12) изображён на Рис. 14.

Грань $\Gamma_2 = Q_2Q_3$ перешла в горизонтальную грань $\tilde{\Gamma}_2 = Q_2Q_3$. Для неё срезка $g_{\tilde{\Gamma}_2} = y_2 - 3$, имеет простой корень $y_2 = 3$, следовательно, теорема о неявной функции в окрестности нуля даёт явное выражение y_2 через y_1 :

$$y_2 = \frac{3}{1 + y_1^3}.$$

Таким образом, получаем локальное параметрическое представление компонент кривой, включающей в себя ветви $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$:

$$x_1 = \frac{3y_1^2}{1 + y_1^3}, \quad x_2 = \frac{3y_1}{1 + y_1^3}.$$

Замечание. Полученная параметризация является глобальной.

7.2 Кривая $x^4 - x^3y + 3x^2y^3 - 3xy^5 + y^7 = 0$

Рассмотрим алгебраическую кривую, которая определяется уравнением

$$x^4 - x^3y + 3x^2y^3 - 3xy^5 + y^7 = 0. \quad (7.13)$$

Многоугольник Ньютона для данной кривой изображен на Рис. 16. Рассмотрим звено $\Gamma_1^{(1)}$, соединяющее точки $Q_1 = (4, 0)$ и $Q_2 = (3, 1)$. Характеристический полином для звена $\Gamma_1^{(1)}$, имеет вид

$$\pi(t) = t^{-1} - 1,$$

с единственным корнем $t = 1$.

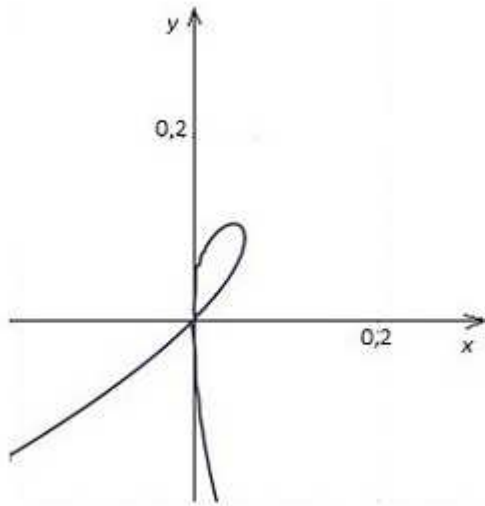


Рисунок 15

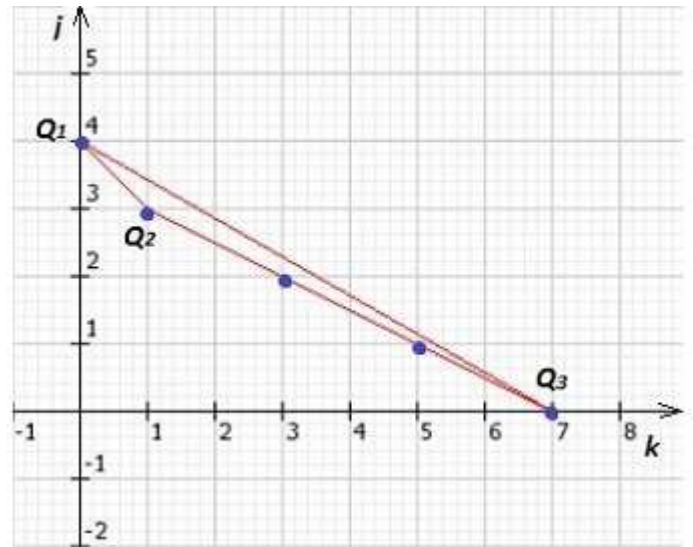


Рисунок 16

Далее по формуле (1.4) вычислим показатель звена $\Gamma_1^{(1)} : \varepsilon^{(1)} = 1$. Таким образом, получаем первое приближение ветви \mathcal{F}_1 , проходящей через начало координат:

$$y = x + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_1 выполняем замену $y = x(1 + y_1)$ в уравнении (7.13). В результате после сокращения на x^4 получим уравнение

$$\begin{aligned} & x^3 y_1^7 + 7x^3 y_1^6 + 21x^3 y_1^5 + 35x^3 y_1^4 + 35x^3 y_1^3 + 21x^3 y_1^2 + \\ & \quad + 7x^3 y_1 + x^3 - 3x^2 y_1^5 - 15x^2 y_1^4 - \\ & - 30x^2 y_1^3 - 30x^2 y_1^2 - 15x^2 y_1 - 3x^2 + 3x^2 y_1^3 + 9x y_1^2 + 9x y_1 + 3x - y_1 = 0. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Следуя тому же алгоритму, выделим ветви кривой (7.14), проходящие через $(0,0)$. Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.14) (см. Рис. 17). На втором шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = 3t^{-1} - 1,$$

он имеет один корень $t = 3$.

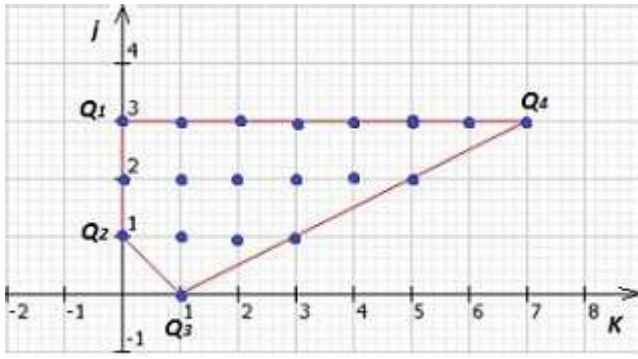


Рисунок 17

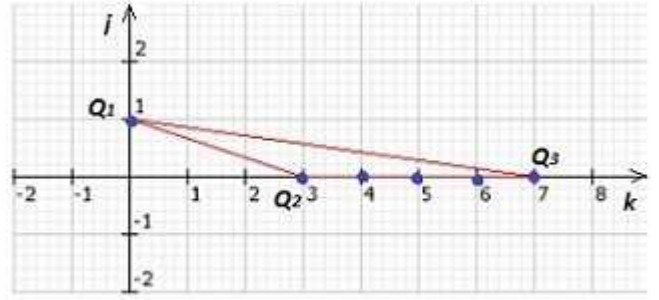


Рисунок 18

Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 1$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = 3x + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_1 представляется в виде:

$$y = x + 3x^2 + \dots$$

Второе звено $\Gamma_2^{(1)}$ из множества $\mathcal{L}_{(0,0)}$ ломаной Ньютона кривой (7.13) соединяет точки $Q_2 = (3, 1)$ и $Q_3 = (0, 7)$ (см. Рис. 16). Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = -t^{-6} + 3t^{-4} - 3t^{-2} + 1,$$

он имеет два корня $t_{1,2} = \pm 1$ кратности 3, а показатель звена $\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{2}$. Наличие кратных корней у характеристического полинома свидетельствует о зарождении шести ветвей, из которых ветви $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ имеют первое приближение

$$y = x^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

а ветви $\mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_7$ имеют первое приближение:

$$y = -x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветвей $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ выполняем замену $y = x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.14). Имеем уравнение:

$$x^{\frac{7}{2}}(8y_1^3 + 20y_1^4 + 18y_1^5 + 7y_1^6 + y_1^7 + x^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Далее сделаем замену $x_1 = x^{\frac{1}{2}}$ и разделим на x_1^7 :

$$8y_1^3 + 20y_1^4 + 18y_1^5 + 7y_1^6 + y_1^7 + x_1 = 0. \quad (7.15)$$

Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.15) (см. Рис. 18).

На втором шаге множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-3} + 8,$$

он имеет один вещественный корень $t_1 = -\frac{1}{2}$ и два комплексных $t_2 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $t_3 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{3}$, и первые приближения для y_1 :

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{6}} + \dots, \\ y_1 &= \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}x^{\frac{1}{6}} + \dots, \\ y_1 &= \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}x^{\frac{1}{6}} + \dots. \end{aligned}$$

Таким образом, ветви \mathcal{F}_2 , \mathcal{F}_3 , \mathcal{F}_4 представляются в виде:

$$\begin{aligned} y &= x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} + \dots, \\ y &= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \dots, \\ y &= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \dots. \end{aligned}$$

Для нахождения вторых членов разложений для ветвей \mathcal{F}_5 , \mathcal{F}_6 , \mathcal{F}_7 выполняем замену $y = -x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.14):

$$x^{\frac{7}{2}}(-8y_1^3 - 20y_1^4 - 18y_1^5 - 7y_1^6 - y_1^7 + x^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Далее сделаем замену $x_1 = x^{\frac{1}{2}}$ и разделим на x_1^7 :

$$-8y_1^3 - 20y_1^4 - 18y_1^5 - 7y_1^6 - y_1^7 + x_1 = 0. \quad (7.16)$$

Многоугольник Ньютона для данного уравнения будет такой же как на Рис. 18. Характеристический полином выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-3} - 8,$$

он имеет один вещественный корень $t_1 = \frac{1}{2}$ и два комплексных $t_2 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
 $t_3 = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Находим показатель звена $\varepsilon^{(3)} = \frac{1}{3}$,

$$y_1 = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{6}} + \dots,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}x^{\frac{1}{6}} + \dots,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}x^{\frac{1}{6}} + \dots.$$

Таким образом, ветви \mathcal{F}_5 , \mathcal{F}_6 , \mathcal{F}_7 имеют разложение

$$y = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} + \dots,$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \dots,$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \dots,$$

соответственно.

Изучим решение уравнения (7.13) с помощью метода степенных преобразований. Преобразуем многогранник Ньютона этой кривой с помощью преобразования

$$x_1 = y_1 y_2, \quad x_2 = y_1 y_2^2.$$

При этом грань $\Gamma_1 = Q_1 Q_2$ перейдёт в горизонтальную грань $\tilde{\Gamma}_1 = Q_1 Q_2$ (см. Рис. 19)

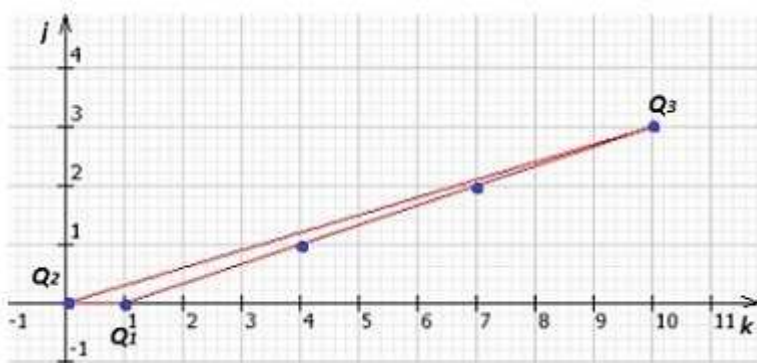


Рисунок 19

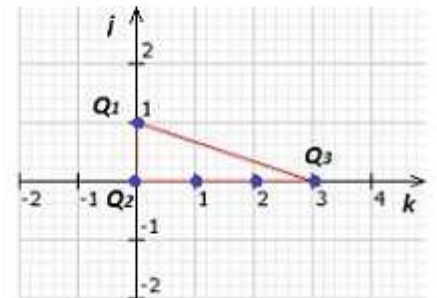


Рисунок 20

Уравнение кривой преобразуется к виду:

$$y_1^4 y_2^4 (y_1^3 y_2^{10} - 3y_1^2 y_2^7 + 3y_1 y_2^4 - y_2 + 1) = 0$$

Срезка $g_{\tilde{\Gamma}_1} = 1 - y_2$ имеет простой корень $y_2 = 1$, следовательно, к уравнению

$$y_1^3 y_2^{10} - 3y_1^2 y_2^7 + 3y_1 y_2^4 - y_2 + 1 = 0$$

применима теорема о неявной функции в окрестности точки $(1,0)$. Разрешив последнее уравнение относительно y_2 , получим решение уравнения (7.13) (ветвь \mathcal{F}_1) в виде разложений от параметра y_1 :

$$x_1 = y_1 + 3y_1^2 + \dots, \quad x_2 = y_1 + 6y_1^2 + \dots.$$

Далее к кривой (7.13) применим преобразование

$$x_1 = y_1^2 y_2, \quad x_2 = y_1 y_2.$$

При этом грань $\Gamma_2 = Q_2 Q_3$ перейдёт в горизонтальную грань $\tilde{\Gamma}_2 = Q_2 Q_3$ (см. Рис. 20). Уравнение кривой преобразуется к виду

$$y_1^7 y_2^4 (y_2^3 - 3y_2^2 + 3y_2 + y_1 - 1) = 0$$

Срезка $g_{\tilde{\Gamma}_2} = y_2^3 - 3y_2^2 + 3y_2 - 1$ имеет трёхкратный корень $y_2 = 1$. Разрешим уравнение

$$y_2^3 - 3y_2^2 + 3y_2 + y_1 - 1 = 0$$

относительно y_1 и воспользуемся формулами замены переменной. В результате имеем параметризацию кривой(7.13):

$$x_1 = (1 - y_2)^6 y_2, \quad x_2 = (1 - y_2)^3 y_2$$

Замечание. Полученная параметризация является глобальной.

7.3 Кривая $2x^5 - x^3 y + 2x^2 y^2 - xy^3 + 2y^5 = 0$

Рассмотрим алгебраическую кривую, которая определяется уравнением

$$2x^5 - x^3 y + 2x^2 y^2 - xy^3 + 2y^5 = 0. \quad (7.17)$$

Многоугольник Ньютона для данной кривой изображен на Рис. 22.

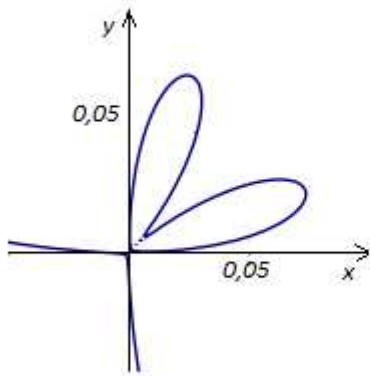


Рисунок 21

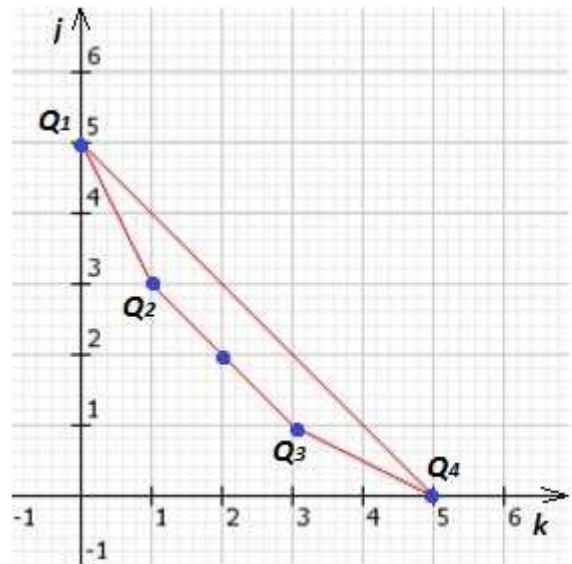


Рисунок 22

Рассмотрим звенья $\Gamma_1^{(1)} = (Q_1Q_2)$, $\Gamma_2^{(1)} = (Q_2Q_3)$ и $\Gamma_3^{(1)} = (Q_3Q_4)$ из множества $\mathcal{L}_{(0,0)}$. Характеристический полином для звена $\Gamma_1^{(1)}$, выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = 2t^{-1} - 1,$$

он имеет единственный корень $t = 2$. Далее находим показатель звена $\Gamma_1^{(1)}$: $\varepsilon^{(1)} = 2$. Таким образом, получаем первое приближение ветви \mathcal{F}_1 , проходящей через начало координат:

$$y = 2x^2 + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_1 выполняем замену $y = 2x^2(1 + y_1)$ в уравнении (7.17). В результате, после сокращения на $2x^5$ получим уравнение

$$\begin{aligned} 32x^5y_1^5 + 160x^5y_1^4 + 320x^5y_1^3 + 320x^5y_1^2 + 160x^5y_1 + \\ + 32x^5 - 4x^2y_1^3 - 12x^2y_1^2 - \\ - 12x^2y_1 - 4x^2y_1 + 4xy_1^2 + 8xy_1 + 4x - y_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Следуя тому же алгоритму, выделим ветви кривой (7.18). Многоугольник Ньютона для кривой (7.18) изображён на Рис. 23.

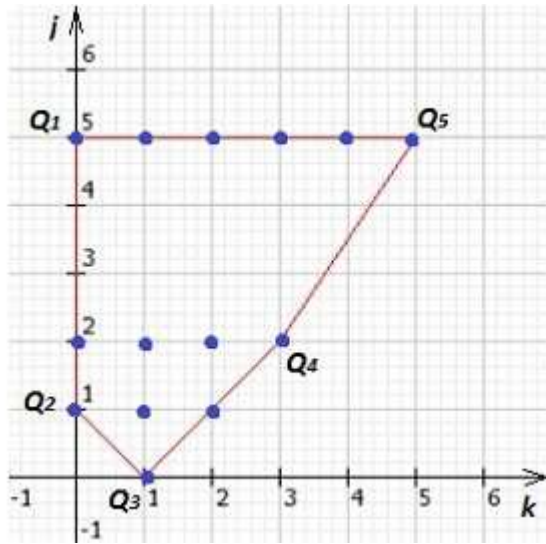


Рисунок 23

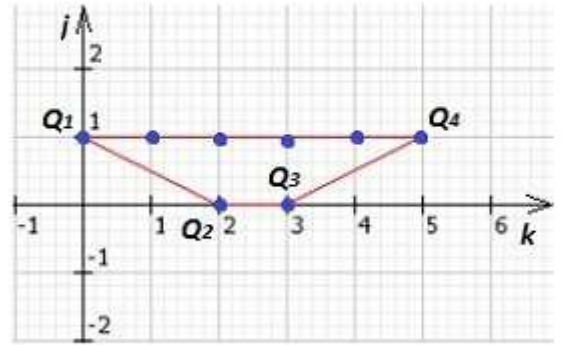


Рисунок 24

Множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином $\pi(t) = 4t^{-1} - 1$, имеет один корень $t = 4$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 1$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = 4x + \dots .$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_1 представляется в виде:

$$y = 2x^2 + 8x^3 + \dots .$$

Характеристический полином для звена $\Gamma_2^{(1)} = (Q_2Q_3)$ выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-2} + 2t^{-1} - 1;$$

он имеет двукратный корень $t = 1$. Далее находим показатель звена $\Gamma_2^{(1)}$: $\varepsilon^{(1)} = 1$. Наличие кратного корня свидетельствует о зарождении двух ветвей $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, имеющих первое приближение

$$y = x + \dots .$$

Для нахождения вторых членов разложений для ветвей $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, выполним замену $y = x(1 + y_1)$ в уравнении (7.17). В результате, после сокращения на x^4 получим уравнение

$$4x + 20xy_1^2 + 20xy_1^3 + 10xy_1^4 + 2xy_1^5 - y_1^3 - y_1^3 + 10xy_1 = 0. \quad (7.19)$$

Выделим ветви кривой (7.19), проходящие через $(0,0)$. Строим многоугольник Ньютона для кривой (7.19) (см. Рис. 24).

Множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ многоугольника Ньютона кривой (7.19) содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для данного звена выглядит следующим образом: $\pi(t) = 4t^{-2} - 1$, имеет два корня $t = \pm 2$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{2}$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = \pm 2x^{\frac{1}{2}} + \dots .$$

Таким образом, ветви \mathcal{F}_2 и \mathcal{F}_3 представляются, соответственно, в виде:

$$y = x + 2x^{\frac{3}{2}} + \dots ,$$

$$y = x - 2x^{\frac{3}{2}} + \dots .$$

Характеристический полином для звена $\Gamma_3^{(1)} = Q_3Q_4$ выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = -t^{-2} + 2,$$

он имеет два корня $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Далее находим показатель звена $\Gamma_3^{(1)} : \varepsilon^{(1)} = \frac{1}{2}$. Таким образом, первые приближения ветвей \mathcal{F}_4 и \mathcal{F}_5 , проходящих через начало координат, имеют вид

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} + \dots ,$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} + \dots .$$

Для нахождения второго члена разложения для ветви \mathcal{F}_4 выполняем замену $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.17). В результате после замены $x_1 = x^{\frac{1}{2}}$ и сокращения на x_1^5 получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{7\sqrt{2}}{4}y_1^2 + \frac{9\sqrt{2}}{4}y_1^3 + \frac{5\sqrt{2}}{4}y_1^4 + \frac{\sqrt{2}}{4}y_1^5 + \\ & + 2x_1y_1 + x_1 + 2x_1^5 + x_1y_1^2 - \frac{2\sqrt{2}}{4}x_1^2 + \frac{2\sqrt{2}}{4}y_1 - \frac{2\sqrt{2}}{4}x_1^2y_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Многоугольник Ньютона для кривой (7.20) изображён на Рис. 25.

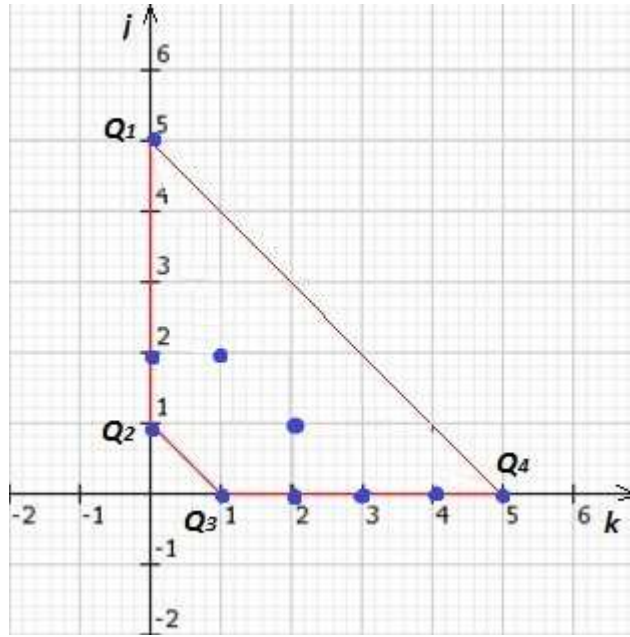


Рисунок 25

Множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)} = Q_2Q_3$. Характеристический полином для этого звена выглядит следующим образом:

$$\pi(t) = t^{-1} + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

он имеет один корень $t = -\sqrt{2}$. Далее находим показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 1$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = -\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_4 представляется в виде:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} - x + \dots$$

Для нахождения второго члена искомого разложения для ветви \mathcal{F}_5 выполняем замену $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}}(1 + y_1)$ в уравнении (7.17). В результате после замены $x_1 = x^{\frac{1}{2}}$ и сокращения на x_1^5 получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{7\sqrt{2}}{4}y_1^2 - \frac{9\sqrt{2}}{4}y_1^3 - \frac{5\sqrt{2}}{4}y_1^4 - \frac{\sqrt{2}}{4}y_1^5 - \\ & -2x_1y_1 + x_1 + 2x_1^5 + x_1y_1^2 + \frac{2\sqrt{2}}{4}x_1^2 - \frac{2\sqrt{2}}{4}y_1 + \frac{2\sqrt{2}}{4}x_1^2y_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Многоугольник Ньютона для кривой (7.21) выглядит также как для кривой (7.20) (см. Рис. 25). Множество $\mathcal{L}_{(0,0)}$ содержит одно звено $\Gamma_1^{(2)}$. Характеристический полином для имеет один корень $t = \sqrt{2}$. Далее находим

показатель звена $\varepsilon^{(2)} = 1$, и первый член разложения для y_1 :

$$y_1 = \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \dots .$$

Таким образом, ветвь \mathcal{F}_5 представляется в виде:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} + x + \dots .$$

Далее найдём параметризацию ветвей кривой (7.17) с помощью степенных преобразований. Вместо координат (x, y) исходно будем рассматривать координаты (x_1, x_2) .

Рассмотрим грань $\Gamma_1 = Q_1Q_2$ на Рис. 22. Нормальный конус грани Γ_1 есть луч с направлением $(1, 2)$, поэтому рассмотрим унимодулярную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и соответствующее степенное преобразование

$$x_1 = y_1y_2, \quad x_2 = y_1y_2^2.$$

Применим это преобразование, получим уравнение кривой в новых координатах:

$$2y_1^5y_2^{10} + 2y_1^5y_2^5 - y_1^4y_2^7 + 2y_1^4y_2^6 - y_1^4y_2^5 = 0;$$

далее сократим на $y_1^4y_2^5$ и получим

$$g(y_1, y_2) = 2y_1y_2^5 - y_2^2 + 2y_2 + 2y_1 - 1 = 0. \quad (7.22)$$

На Рис. 26. изображён многогранник Ньютона кривой (7.22) Заметим, что грань $\Gamma_1 = Q_1Q_2$ на Рис. 22 преобразуется в вертикальную грань $\tilde{\Gamma}_1 = Q_1Q_2$ на Рис. 26. Для неё срезка $g_{\tilde{\Gamma}_1} = 2y_1 - 1$ имеет простой корень $y_1 = \frac{1}{2}$, это значит, что по теореме о неявной функции в некоторой окрестности нуля соответствующая ветвь кривой задаётся явно

$$y_1(y_2) = \frac{(y_2 - 1)^2}{2y_2^5 + 2}.$$

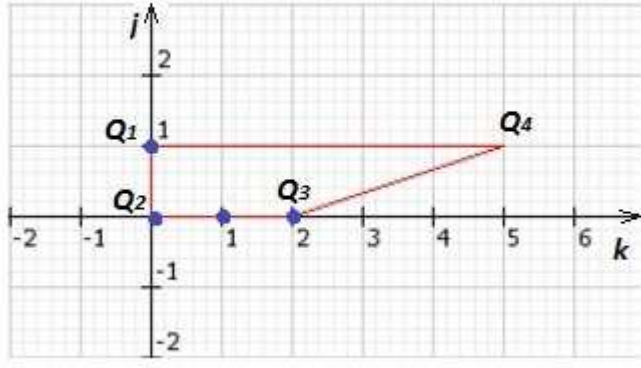


Рисунок 26

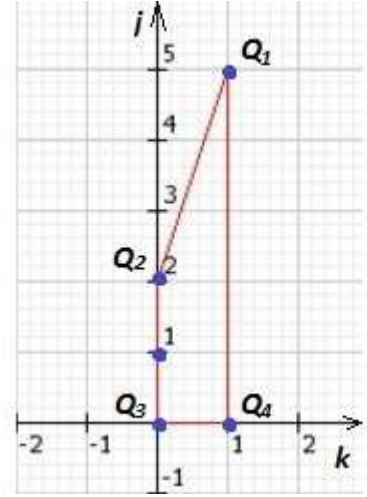


Рисунок 27

Наконец, получаем локальное параметрическое представление ветви \mathcal{F}_1 кривой (7.17):

$$x_1 = \frac{(y_2 - 1)^2}{2y_2^5 + 2} y_2, \quad x_2 = \frac{(y_2 - 1)^2}{2y_2^5 + 2} y_2^2,$$

здесь параметр y_2 изменяется в некоторой окрестности нуля.

Далее рассмотрим грань $\Gamma_2 = Q_2Q_3$. Учитывая нормальный конус грани, рассмотрим унимодулярную матрицу

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

и соответствующее степенное преобразование

$$x_1 = y_1^2 y_2, \quad x_2 = y_1 y_2.$$

Теперь применим полученное преобразование и после сокращения $y_1^5 y_2^4$ получим уравнение

$$2y_2 y_1^5 - y_1^2 + 2y_1 + 2y_2 - 1 = 0. \quad (7.23)$$

Многогранник для кривой (7.23) изображён на Рис. 27.

Заметим, что грань $\Gamma_2 = Q_2Q_3$ перешла в вертикальную грань $\tilde{\Gamma}_2 = Q_2Q_3$, для неё срезка $g_{\tilde{\Gamma}_2} = -y_1^2 + 2y_1 - 1$ имеет двукратный корень $y_1 = 1$. Нам необходимо сделать замену $z_1 = y_1 - 1$, $z_2 = y_2$ в уравнении (7.23):

$$2z_1^5 z_2 + 10z_1^4 z_2 + 20z_1^3 z_2 + 20z_1^2 z_2 + 10z_1 z_2 + 4z_2 - z_1^2 = 0. \quad (7.24)$$

Выбирая в качестве параметра z_1 , из уравнения (7.24) получаем параметризацию каспа исследуемой кривой (ветви \mathcal{F}_2 и \mathcal{F}_3):

$$x_1 = \frac{(z_1 + 1)^2 z_1^2}{2(1 + (z_1 + 1)^5)}, \quad x_2 = \frac{(z_1 + 1) z_1^2}{2(1 + (z_1 + 1)^5)},$$

z_1 изменяется в окрестности нуля.

Рассмотрим грань $\Gamma_3 = Q_3 Q_4$ на Рис. 22. Нужное нам степенное преобразование определяется унимодулярной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и имеет следующий вид

$$x_1 = y_1^2 y_2, \quad x_2 = y_1 y_2.$$

Это преобразование приводит кривую к виду (7.23), при этом исследуемая грань Γ_3 переходит в горизонтальную грань $\tilde{\Gamma}_3 = Q_3 Q_4$ (см. Рис. 27) Срезка $g_{\tilde{\Gamma}_3} = 2y_2 - 1$, имеет простой корень $y_2 = \frac{1}{2}$, следовательно, что теорема о неявной функции даёт представление ветви кривой

$$y_2(y_1) = \frac{y_1^2 - 2y_1 + 1}{2y_1^5 + 2},$$

в окрестности начала координат. Наконец, получаем параметрическое представление компонент кривой, объединяющей ветви $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$

$$x_1 = \frac{(y_1 - 1)^2}{2y_1^5 + 2} y_1^2, \quad x_2 = \frac{(y_1 - 1)^2}{2y_1^5 + 2} y_1,$$

y_1 изменяется в окрестности нуля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

- представлена схема выделения ветви плоской алгебраической кривой, проходящей через начало координат, с помощью метода многоугольника Ньютона;

- описана схема нахождения решений уравнения $f(x) = 0$ в виде функций от параметра, либо набора асимптотических разложений по параметру;

- исследованы ветви и найдены параметризации трёх алгебраических кривых указанными выше методами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Брюно, А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. / Брюно А.Д. - Наука. Физматлит, 1998. - 288 с. - ISBN 5-02-015168-8.
- [2] Ньютон, И. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых / Ньютон И. - Математические работы. М.-Л.: ОНТИ, 1937 С. 33-44.
- [3] Уокер, Р. Алгебраические кривые / Уокер Р. - М.: ИЛ, 1952. - 236 с.
- [4] Хованский, А.Г. Многогранники Ньютона / Хованский. А.Г. // Современные проблемы математики. Т. 22. Итоги науки и техн. М.: ВИНТИ, 1983. С. 206-239.
- [5] Чеботарев, Н.Г. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики / Чеботарев Н.Г. - Исаак Ньютон. М.-Л.: АН СССР, 1943 С. 99-126.
- [6] Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных / Шабат Б.В. - М.: Наука, 1985. - 464 с.
- [7] Puiseux, V. Recherches sur les fonctions algebriques / Puiseux V. // J.de math. pures et appl. 1850. V. P. 365-480.