УДК 512.542

ЧИСЛО КЛАССОВ СОПРЯЖЁННОСТИ УНИПОТЕНТНОЙ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ ШЕВАЛЛЕ ТИПА A_2 НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Куклина С.К.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук, проф. Нужин Я.Н.
Институт математики

Унипотентная подгруппа $U = U\Phi(K)$ группы Шевалле типа Ф над полем К порождается корневыми элементами $x_r(\boldsymbol{t}),\ r \in \Phi^+,\ \boldsymbol{t} \in K$. Всякий элемент подгруппы U допускает единственное разложение в произведение корневых элементов $x_r(t_r),\quad r \in \Phi^+$, расположенных в соответствии с фиксированным (произвольным) упорядочением корней. Здесь рассматривается только унипотентная подгруппа $UA2(K)$ типа А2. Любой ее элемент представляется в виде

$$g = x_a(\boldsymbol{t})x_b(u)x_{a+b}(v),\quad \text{t, u, v} \in K$$

В работе находится число классов сопряженности унипотентной подгруппы $UA2(K)$ над конечным полем К порядка q нечетной характеристики. Два элемента $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ произвольной группы G называются *сопряженными* в G, если существует такой элемент $x \in G$, что $\boldsymbol{b} = xax^{-1}$. Сопряженность есть отношение эквивалентности, поэтому группа G разбивается на классы сопряженных элементов (классы сопряженности).

В доказательстве используется коммутаторная формула Шевалле, которая утверждает, что

$$[x_s(u), x_r(\boldsymbol{t})] = 1 \quad (u, \boldsymbol{t} \in K), \qquad r, s \in \Phi, r + \cancel{s \in} \Phi \cup \{0\},$$

$$[x_s(u), x_r(\boldsymbol{t})] = \Pi_{i,j>0} x_{ir+js}\big(C_{ij,rs}(-\boldsymbol{t})^i u^i\big),\ r,\ s,\ r+s\ \in \Phi,$$

где $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] = a^{-1}b^{-1}ab$ – коммутатор, а сомножители в произведении расположены в соответствии с возрастанием высоты корней ir+js∈Ф. Для группы $U\mathrm{A}2(K)$ имеется нетривиальный коммутатор:

$$x_a(\boldsymbol{t}), x_b(u) = x_{a+b}(\pm \boldsymbol{t}u)$$

Применяя эти равенства, получаем следующие 5 типов представителей классов сопряженности.

№	тип	число классов
1	1	1
2	$x_{a+b}(v)$	(q-1)
3	$x_b(u)$	(q-1)

4	$x_a(\boldsymbol{t})$	(q-1)
5	$x_a(\boldsymbol{t})x_b(u)$	$(q-1)^2$

Суммируя, получаем, что число классов сопряженности в группе $UA_2(K)$ равно $\boldsymbol{q}^2 + \boldsymbol{q} - 1$.