УДК735.29

АСИМПТОТИКА СПЕЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ k(z)

Буев В.А.
Научный руководитель - профессор Царев С.П.

Сибирский федеральный университет

Работа посвящена исследованию специальной функции $k(z)$, нули которой используются в теории распространения радиоволн. Впервые, ее свойства применил Джорж Хаффорд в статье 1952 года, в которой он исследовал распространение радиоволн вдоль земной поверхности. Отметим, что статьи, на которые ссылался Хаффорд, устарели, поэтому появилась необходимость исследовать свойства функции $k(z)$ самостоятельно.

Рассмотрим целую функцию:

$$\mathrm{k}(z) = \int_0^\infty \exp(-t^3 - zt)\frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

1. Исследуем асимптотику $k(z)$ в секторе:

$$L = \left\{z \in C: |\arg z| < \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

Для этого нам потребуется лемма Ватсона:

Пусть $\alpha > 0, \beta > 0, a > 0, f(x) \in C^\infty[0,a]$, *тогда при* $\lambda \to \infty$,

$\lambda \in S_\varepsilon = \{z \in C : |arg\, z| < \pi/2 - \varepsilon, \varepsilon \in (0, \pi/2)\}$, *справедливо асимптотическое разложение:*

$$\int_0^a x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx = \Phi(\lambda),$$

$$\Phi(\lambda) \sim \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) f(0)\left[\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}} + o\left(\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)\right], \qquad \lambda \to \infty, \lambda \in L_\varepsilon .$$

Разобьем $k(z)$ на $k^1(z)$ и $k_a(z)$:

$$k(z) = \int_0^a \exp\{-t^3 - zt\}\frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_a^\infty \exp\{-t^3 - zt\}\frac{dt}{\sqrt{t}} = k'(z) + k_a(z).$$

Ограничим $k_a(z)$:

$$|k_a(z)| = \left|\int_a^\infty \exp\{-t^3 - zt\}\frac{dt}{\sqrt{t}}\right| = \left|\int_a^\infty e^{-t^3} e^{-Re(z)t}\frac{dt}{\sqrt{t}}\right| = O\left(e^{-c|z|}\right).$$

Из леммы Ватсона находим асимптотическое разложение:

$$k(z) \sim k_1(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{z}} + o\left(z^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad z \to \infty, \qquad z \in S_\varepsilon$$

Сделав под знаком интеграла функции $k(z)$ замену $s = zt,\ arg\, z = 0$, получим:

$$k^0(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \int\limits_0^{\infty(\arg s = 0)} \exp\left\{-\left(\frac{s}{z}\right)^3 - s\right\} \frac{ds}{\sqrt{s}}, \qquad \arg z = \arg s = 0.$$

Рассмотрим функцию $k^0(z)$ при $|\arg z| < \frac{\pi}{6}$. Это аналитическая функция в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{6}$. По теореме единственности аналитических функций $k^0(z) \equiv k(z)$, при $|\arg z| < \frac{\pi}{6}$.

Пусть $L_\theta = \left\{z \in C: |\arg z - \theta| < \frac{\pi}{6}\right\}$, рассмотрим систему K аналитических функций

$$k_\theta(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \int\limits_0^{\infty(\arg s = \theta)} \exp\left\{-\left(\frac{s}{z}\right)^3 - s\right\} \frac{ds}{\sqrt{s}}, \qquad z \in L_\theta, \qquad |\theta| < \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Не будем забывать, что $k^0(z)_{|\arg z| < \pi/6} \equiv k_0(z) \equiv k(z)$ при $z \in L_0$. Для дальнейших рассуждений нам потребуется изложить лемму Жордана:

Если на некоторой последовательности дуг окружностей $C_{R_n}: |p| = R_n, Re\, p > a\ (R_n \to \infty, a - фиксировано)$ *функция* $F(p)$ *стремится к нулю равномерно относительно* $arg\, p$, *то для любого отрицательного числа* t

$$\lim_{n \to \infty} \int_{C_{R_n}} F(p) e^{pt} dp = 0.$$

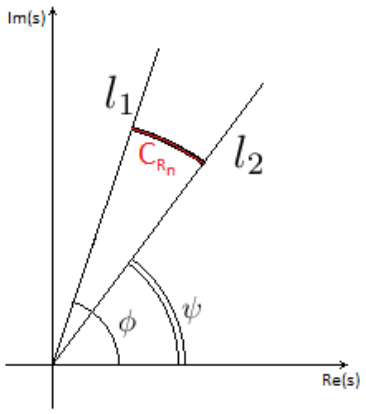

Рисунок. *l_1 и l_2 - линии интегрирования функций $k_\varphi(z)$ и $k_\psi(z)$.*

Рассмотрим функции $k_\varphi(z)$ и $k_\psi(z)$. По теореме Коши

$$-k_\varphi(z)+k_\psi(z)+\lim_{n\to\infty}\int_{C_{R_n}}\exp\{-(s/z)^3-s\}\frac{ds}{\sqrt{s}}=0.$$

Так как $\arg s\in(\varphi,\psi)$ и $\{\varphi,\psi\}\in(-\pi/2,\pi/2)$, то $Re\ s>0$, кроме того число $t=-1<0$, далее рассмотрим функцию $F(s)=s^{-1/2}\exp\{-(s/z)^3\}$. При $z\in L_\varphi\cap L_\psi$ и $|\varphi-\psi|<\pi/3$, $Re(-(s/z)^3)<0$, и $F(s)\rightrightarrows 0$, при $|s|\to\infty$.

Таким образом, условия леммы Жордана выполняются, и

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_{R_n}}\exp\left\{-\left(\frac{s}{z}\right)^3-s\right\}\frac{ds}{\sqrt{s}}=0,$$

Значит $k_\varphi(z)\equiv k_\psi(z)$, при $\varphi-\pi/6+\varepsilon<\arg z<\psi+\pi/6-\varepsilon$, - это, в свою очередь, в силу принципа единственности аналитического продолжения, означает, что система K определяет аналитическую функцию $K(z)$, $z\in L$. Но $k_0(z)\equiv k(z)$, $z\in L_0$, итак, $K(z)\equiv k(z)$, $z\in L$.

Перейдем к исследованию асимптотики $k(z)$ при $z\to\infty$, $z\in L$. Из (1) вытекает, что $k_\theta=\Phi_\theta(1/z^3)/\sqrt{z}$, $z\in L$, где

$$\Phi_\theta(\lambda)=\int_0^{\infty(\arg s=\theta)}\exp\{-\lambda s^3-s\}\frac{ds}{\sqrt{s}},\qquad |\arg s+3\theta|<\frac{\pi}{2},\qquad |\theta|<\frac{\pi}{2}$$

- аналитическая функция в угле $l=\{|\arg\lambda|<2\pi\}$. В угле $l_\varepsilon=\{|\arg\lambda|<2\pi-3\varepsilon\}$ эта функция приближается к $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, при $|\lambda|\to 0$. Тем самым, получаем асимптотическую формулу:

$$k(z)\sim\sqrt{\frac{\pi}{z}},z\to\infty,z\in L_\varepsilon.$$

2. Рассмотрим угол

$$M=\{z\in C:2\pi/3<|\arg z|\le\pi\}=\{z\in C:|\arg(-z)|<\pi/3\}.$$

Введем обозначение $\omega=-z$ и изучим асимптотическое поведение функции

$$k(-\omega)=\int_0^\infty\exp\{-t^3+\omega\}\frac{dt}{\sqrt{t}},\omega\epsilon\Pi:=\left\{\omega\epsilon C:|\arg(\omega)|<\frac{\pi}{3}\right\}.$$

Аналогично способу, изложенному выше, преобразуем этот интеграл, выполняя замену переменной $t=u^2\sqrt{\omega/3}$, $\arg(\omega)=0$:

$$k^0(-\omega)=2(\omega/3)^{\frac{1}{4}}\cdot\int_0^\infty\exp\left\{(\omega/3)^{\frac{3}{2}}S(u)\right\}du,\qquad S(u)=3u^2-u^6.$$

Рассмотрим функцию $k^0(-\omega)$, при $|\arg(\omega)| < \pi/3 - \varepsilon$.

Подынтегральная функция $exp\left\{(\omega/3)^{\frac{3}{2}}S(u)\right\}$ убывает при $u \in (\sqrt[4]{3};\infty)$, причем, начиная с некоторого u_a быстрее, чем функция $exp\{-(\omega/3)^{3/2}u\}$. Из этого следует, что для достаточно больших *C* и *a*:

$$\left|\int_0^\infty \exp\{(\omega/3)^{3/2}S(u)\}du\right| < C + \left|\int_a^\infty \exp\{-(\omega/3)^{3/2}S(u)\}du\right|$$

Таким образом, интеграл справа сходится равномерно, т.е. $k^0(-\omega)$ - аналитическая функция в угле $\arg\omega \in S_\varepsilon$. По теореме о единственности аналитических функций, $k^0(-\omega) \equiv k(-\omega), \arg\omega \in S_\varepsilon$. Представим $k^0(-\omega)$ в виде $k^0(-\omega) = k_1(-\omega) + k_a(-\omega)$. Как и в п.1 выполняется оценка $k_a(-\omega)$:

$$k_a(-\omega) = O\left(\sqrt[4]{\omega}\exp(-c\omega)\right).$$

Найдем асимптотику функции $k_1(-\omega)$, опираясь на метод Лапласа. Рассмотрим интеграл вида:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)\exp\{\lambda S(x)\}dx.$$

Здесь *S(x)* --- вещественнозначная функция, *f(x)* может быть комплекснозначной функцией, λ в общем случае комплексный параметр. Справедлива теорема:

Пусть выполняются условия: 1) $f(x), S(x) \in C[a,b]$; *2) Функция* $S(x)$ *достигает максимума в единственной внутренней точке* x_0 *отрезка* $[a,b]$; *3)* $f(x), S(x) \in C$ *при x, близких к* x_0 *, и* $S''(x_0) \neq 0$. *Тогда справедливо асимптотическое разложение:*

$$F(\lambda) \sim exp[\lambda S(x_0)]\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{-k-1/2}, \qquad \lambda \to \infty, \lambda \in S_\varepsilon$$

$$c_k = \frac{\Gamma(k+1/2)}{(2k)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[f(x)\left(\frac{2(S(x_0)-S(x))}{(x-x_0)^2}\right)^{-k-1/2}\right]\Bigg|_{x=x_0}.$$

Выделим первый член ряда и разложим $S(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_0$. Получим:

$$F(\lambda) \sim \sqrt{-\frac{\pi}{\lambda S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)}\left[1 + o\left(\lambda^{-1/2}\right)\right], \qquad \lambda \to \infty, \qquad \lambda \in S_\varepsilon.$$

Применяя этот результат к интегралу $k_1(-\omega)$, а значит и к $k(-\omega)$, получаем разложение:

$$k(-\omega) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\, exp\{2(\omega/3)^{3/2}\}\left[1 + o\left(\omega^{-3/4}\right)\right], \qquad \omega \to \infty, \omega \in \Pi_\varepsilon,$$

где $\Pi_\varepsilon = \{\omega \in C: |\arg \omega| < \pi/3 - \varepsilon\}$. Остается перейти к переменной $z = -\omega$.

Заключение. В работе исследована асимптотика функции $k(z)$ в углах: $|\arg z| < 2\pi/3 - \varepsilon$ и $|\arg -z| < \pi/3 - \varepsilon$. Из найденных разложений видно, что нулей в этих углах нет, а значит, следующей задачей будет их нахождение в углах $\big||\arg z| - 2\pi/3\big| < \varepsilon$.

Объявляю особую благодарность за помощь в выполнении работы профессору Майергойзу Льву Сергеевичу.