УДК 693

ИЗГИБ ПОЛОГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ В ПЛАНЕ АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

Шерешевский М.Б.
Научный руководитель – профессор Трещев А.А.

Тульский государственный университет

Теория деформирования материалов, механические свойства которых зависят от вида напряженного состояния, является новой актуальной областью механики деформируемого твердого тела. Учет эффектов разносопротивляемости вносит значительные поправки в напряженно-деформированное состояние оболочек. Благодаря этому конструкции из современных материалов становятся безопасными и экономичными. Поэтому важно в свете данной теории рассмотреть как можно больше видов конструкций, в том числе и пологие оболочки положительной гауссовой кривизны. До настоящего времени ни одна из публикаций не рассматривает данной темы, что и обуславливает её новизну. Цель работы – адаптировать определяющие соотношения теории анизотропных разносопротивляющихся материалов А.А.Трещева для расчета пологих оболочек положительной гауссовой кривизны, получить разрешающую систему уравнений, разработать алгоритм численного решения системы, проверить его на ряде тестовых задач и провести комплексный анализ полученных результатов.

Для конкретизации структурной анизотропии материала оболочек примем ортотропное тело. Тогда в качестве физических зависимостей будем использовать соотношения типа (1.26) [1] с учетом гипотез Кирхгофа и при совпадении осей декартовой системы координат с главными осями анизотропии:

$$\begin{aligned}
&e_{11} = \left(A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}\right)\sigma_{11} + \left[A_{1122} + B_{1122}\left(\alpha_{11} + \alpha_{22}\right)\right]\sigma_{22};\\
&e_{22} = \left[A_{1122} + B_{1122}\left(\alpha_{11} + \alpha_{22}\right)\right]\sigma_{11} + \left(A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22}\right)\sigma_{22};\\
&e_{12} = \left(A_{1212} + B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12}\right)\tau_{12};
\end{aligned} \qquad (1)$$

которые с учетом упрощений принимают вид

$$e_{11} = A_{11}\sigma_{11} + A_{12}\sigma_{12};\;\; e_{12} = A_{66}\tau_{12};\;\; e_{22} = A_{12}\sigma_{11} + A_{22}\sigma_{12} \qquad (2)$$

Преобразовав систему (1) таким образом, чтобы отделить нелинейную часть, получим:

$$\sigma_{11} = C_{11}e_{11} + C_{12}e_{12} - R_{11};\;\; \tau_{12} = C_{66}e_{12} - R_{12};\;\; \sigma_{22} = C_{12}e_{11} + C_{22}e_{12} - R_{22} \qquad (3)$$

где

$$C_{11} = A_{2222} / \Delta;\ C_{22} = A_{1111} / \Delta;\ C_{12} = -A_{1122} / \Delta;\ C_{66} = 1/ A_{1212};\ \Delta = A_{1111}A_{2222} - A_{1122}^2;$$
$$R_{12} = B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12}\tau_{12} / A_{1212};\quad R_{11} = (A_{2222}B_{1111} - B_{1122}A_{1111})\alpha_1\sigma_{11} / \Delta +$$
$$+(A_{2222}B_{1111} - A_{1122}B_{2222})\alpha_2\sigma_{22} / \Delta + (A_{2222} - A_{1122})B_{1122}\alpha_1\sigma_{22} / \Delta;$$
$$R_{22} = (A_{1111}B_{1122} - B_{1111}A_{1122})\alpha_1\sigma_{11} / \Delta + (A_{1111}B_{2222} - A_{1122}B_{1122})\alpha_2\sigma_{22} / \Delta +$$
$$+(A_{1111} - A_{1122})B_{1122}\alpha_1\sigma_{22} / \Delta;$$

A_{ijkm}, B_{ijkm}– константы, подлежащие определению из экспериментов по деформированию образцов материала.

Очевидно, что напряженное состояние в точке можно характеризовать модулем вектора S и его направляющими косинусами

$$\alpha_{ij} = \sigma_{ij} / S\ .$$

S – модуль вектора полного напряжения в нормированном девятимерном «пространстве», введенном в монографии [1],

$$S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$$

Далее воспользуемся уравнениями равновесия дифференциального элемента оболочки, выраженными через усилия, при условии отсутствия внешних тангенциальных сил [2]

$$\begin{cases} N_{11,1} + N_{12,1} = 0,\quad N_{22,2} + N_{12,1} = 0,\ M_{11,1} + M_{12,2} = Q_1,\ M_{22,2} + M_{12,1} = Q_2, \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} + (w_{,11} - k_1)N_{11} + (w_{,22} - k_2)N_{22} + 2w_{,12}N_{12} = -q_3, \end{cases} \tag{4}$$

где N_{ij} – усилия в срединной поверхности оболочки; Q_k – поперечные силы; M_{ij} – изгибающие и крутящие моменты; $k_i = 1/ R_i$ – начальные кривизны срединной поверхности; R_i – начальные радиусы кривизны срединной поверхности; q_3 – внешняя равномерно распределенная нагрузка.

Ввиду пологости оболочки усилия определяются следующим образом

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}dx_3; M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}x_3dx_3; \tag{5}$$

Геометрические соотношения представляем в рамках уровня точности теории Т.Кармана [2]:

$$e_{11} = \varepsilon_{11} + x_3\chi_{11};\ \ e_{22} = \varepsilon_{22} + x_3\chi_{22};\ \ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} + x_3\chi_{12}, \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = u_{,1} + k_1 w + 0,5w_{,1}^2;\ \varepsilon_{22} = v_{,2} + k_2 w + 0,5w_{,2}^2;\ 2\varepsilon_{12} = u_{,2} + v_{,1} + w_{,1}w_{,2}; \\ \chi_{11} = -w_{,11};\quad \chi_{22} = -w_{,22};\quad \chi_{12} = -2w_{,12}; \end{gathered} \tag{7}$$

ε_{ij} - деформации в срединной поверхности; χ_{ij} - кривизны срединной поверхности; u,v,w – перемещения вдоль координатных осей x_1, x_2 и x_3 соответственно.

Интегрируя выражения для напряжений (3) по толщине оболочки, в соответствии с правилами (5) получаем для внутренних усилий в срединной плоскости

$$N_{11}=C_{11}\varepsilon_1 h+C_{12}\varepsilon_2 h-I_{11};\; N_{22}=C_{12}\varepsilon_1 h+C_{22}\varepsilon_2 h-I_{22}; \tag{8}$$

$$N_{12}=C_{66}\varepsilon_{12}h-I_{12};\; M_{11}=D_{11}\chi_1+D_{12}\chi_2-J_{11};$$

$$M_{22}=D_{12}\chi_1+D_{22}\chi_2-J_{22};\quad M_{12}=D_{66}\chi_{12}-J_{12},$$

где $D_{ij}=C_{ij}h^3/12;\;\; I_{ij}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}R_{ij}dx_3;\;\; J_{ij}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}R_{ij}x_3dx_3;\; h$ – толщина оболочки.

Далее, подставляя в выражения (8) соотношения (7), а затем получившиеся выражения в уравнения равновесия (4), получаем систему из трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными перемещениями

$$\begin{cases}\Delta_1 u+v_{,12}(C_{12}+C_{66})h+L_1(w)-(I_{11,1}+I_{12,2})=0,\quad \Delta_2 v+u_{,12}(C_{12}+C_{66})h+L_2(w)-(I_{12,1}+I_{22,2})=0,\\ -\Delta_3^2 w+(\nabla_1 w-C_{11}hk_1-C_{12}hk_2)(u_{,1}+k_1w+0,5w_{,1}^2)+(\nabla_2 w-C_{12}hk_1-C_{22}hk_2)(v_{,2}+k_2w+0,5w_{,2}^2)+\\ +2C_{66}hw_{,12}(u_{,2}+v_{,1}+w_{,1}w_{,2})-I_{11}(w_{,11}-k_1)-I_{22}(w_{,22}-k_2)-I_{12}\cdot 2w_{,12}-J_{11,11}-J_{22,22}-2J_{12,12}=-q_3,\end{cases}$$

где

$$\Delta_1=C_{11}h\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+C_{66}h\frac{\partial^2}{\partial x_2^2};\;\; \Delta_2=C_{22}h\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+C_{66}h\frac{\partial^2}{\partial x_2^2};\;\; \nabla_1=C_{11}h\frac{\partial}{\partial x_1}+C_{12}h\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\nabla_2=C_{12}h\frac{\partial}{\partial x_1}+C_{22}h\frac{\partial}{\partial x_2};\;\; \Delta_3^2=D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+(D_{12}+2D_{66})\frac{2\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+D_{22}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}.$$

$$L_1(w)=(C_{11}hk_1+C_{12}hk_2)\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\Delta_1 w+\frac{\partial w}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}(C_{12}h+C_{66}h),$$

$$L_2(w)=(C_{12}hk_1+C_{22}hk_2)\frac{\partial w}{\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\Delta_2 w+\frac{\partial w}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}(C_{12}h+C_{66}h).$$

Так, были получены нелинейные разрешающие уравнения для прямоугольных в плане пологих анизотропных оболочек положительной гауссовой кривизны из разносопротивляющихся материалов. Далее они будут линеаризованы модифицированным методом последовательных нагружений под названием «Двухшаговый метод последовательных возмущений параметров» В.В.Петрова и численно реализованы методом конечных разностей.