Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 1 (2008) 85-93

УДК 510.643; 517.11

Явный базис допустимых правил вывода логик конечной ширины

Виталий В.Римацкий*

Институт архитектуры и строительства,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 82, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 10.10.2007, принята 20.11.2007

В статье описывается явный конечный базис для допустимых правил вывода модальных логик конечной ширины, расширяющих логику $S4$. Полученный базис состоит из последовательности правил, которые имеют компактную и легко обозримую форму.

Ключевые слова: *модальная логика, фрейм и модель Крипке, допустимое правило вывода, базис допустимых правил.*

Введение

Понятие (структурного) допустимого правила вывода было впервые введено Лоренценем [2] в 1955 г. Для произвольной логики допустимы те правила вывода, которые не изменяют множество доказуемых теорем данной логики. Понятно, что любое выводимое правило является допустимым в заданной логике, но обратное в общем случае не верно, как показывают примеры Р. Харропа, Г. Минца и Дж. Порта. Непосредственно из определения можно также заключить, что множество всех допустимых в логике λ правил вывода образует *наибольший* класс правил вывода, которыми мы можем расширить аксиоматическую систему данной логики, не изменяя множество доказуемых теорем. Кроме того, допустимые правила значительно усиливают дедуктивную систему заданной логики, т.к. могут существенно сократить доказательство и верификацию формул.

Начало истории изучения допустимых правил может быть датировано 1975 г. с появления проблемы Х. Фридмана [3] о существовании алгоритмического критерия допустимости правил в интуиционистской логике Int. В классической логике вопрос допустимости решался тривиально — допустимы только выводимые, доказуемые правила. В случае неклассических логик существуют допустимые, но не доказуемые правила вывода. В середине 70-х гг. Г. Минц получил достаточные условия выводимости правил специальной формы. Положительное решение проблемы Фридмана о существовании алгоритма, распознающего допустимость правил вывода в интуиционистской логике Int, было получено В.В. Рыбаковым в 1984 г. [4]. Для широкого класса транзитивных модальных и суперинтуиционистских логик критерий допустимости правил вывода был позднее сформулирован в [1].

К проблеме А.Кузнецова (1973) о существовании конечного базиса для допустимых правил вывода логики Int восходит другой способ описания всех допустимых правил логики. При наличии базиса для допустимых правил все остальные выводятся из него в заданной логике как следствия. Первый положительный результат в изучении базисов для допустимых правил вывода был получен А. Циткиным [5], который нашел базис для всех допустимых в Int квазихарактеристических правил вывода. В общем проблема Кузнецова о существовании конечного базиса для допустимых правил вывода решалась отрицательно не только для Int (Рыбаков, [6]), но и для большинства других базовых логик (В.В. Рыбаков, гл. 4 [1]): логики Int, KC, $K4$, $S4$, Grz и многие другие базовые логики не имеют конечного базиса для допустимых правил от конечного числа переменных.

*e-mail: Gemmeny@rambler.ru

Учитывая отрицательное решение проблемы Кузнецова для многих базовых неклассических логик, к концу 20-го века базис для допустимых правил вывода мог быть получен только из известного алгоритмического критерия допустимости (гл. 3.5 [1]). Однако этот критерий является вычислительно сложным и неприменимым для описания такого базиса в легко обозримой форме. Поэтому становится актуальной проблема явного описания легко обозримого базиса для всех допустимых правил вывода хотя бы для основных базовых логик, а также для тех "сильных"табличных логик, которые имеют конечный базис допустимых правил ([7], [8]). Первый шаг в этом направлении был сделан в 2000 г.: в статье [9] был получен рекурсивный базис для допустимых правил интуиционистской логики Int, состоящий из правил в полуредуцированной форме. Позже Р. Иемхоффом [10] был получен явный базис допустимых правил логики Int. В статье [11] В.В. Рыбаков построил точный базис для всех допустимых правил логики $S4$.

В представленной работе мы описываем явный конечный базис для допустимых правил целого класса (по крайней мере счетного) финитно аппроксимируемых логик конечной ширины, расширяющих логику $S4$. Полученный базис имеет компактную и наглядную форму.

1. Определения, предварительные результаты

Вначале кратко напомним необходимые определения и результаты (для детального знакомства с предметом рекомендуем [1]). Далее мы рассматриваем только логики, расширяющие $S4$, поэтому все фреймы рефлексивны и транзитивны.

Фрейм $\mathcal{F} := \langle F, R\rangle$ есть пара, где F – непустое множество и R – бинарное отношение на F. Базисное множество и сам фрейм далее будем обозначать одной и той же буквой. Напомним, что если $\langle W, R\rangle$ – некоторый фрейм, то множество $C \subseteq W$ называется *сгустком*, если: 1) для любых x, y из C выполняется xRy; 2) для любых $x \in C$ и $y \in W$ $(xRy\&yRx) \Longrightarrow y \in C$. Сгусток называется *собственным,* если $|C| > 1$; в противном случае – *одноэлементным или вырожденным.* Для элемента $a \in F$ через $C(a)$ обозначим сгусток, порожденный элементом a.

Любое множество попарно несравнимых по отношению к R сгустков фрейма F называется *антицепью.* Антицепь $\mathcal{A}$ называется *нетривиальной*, если $\mathcal{A}$ состоит по крайней мере из двух различных сгустков, в противном случае – *тривиальной.* Для любого элемента $a \in F$ обозначим $a^R = \{x \,|\, aRx\}$ и $a^{<R} = a^R \setminus C(a)$ и будем говорить, что элемент a *порождает как корень* подфрейм a^R фрейма F. Сгусток $C(a)$ из F есть *ко-накрытие* для множества (или антицепи) $X \subseteq F$, если $a^R \setminus C(a) = X^R := \bigcup\{x^R \,|\, x \in X\}$. Говорим, что *элемент a есть ко-накрытие* для $X \subseteq F$, если одноэлементный сгусток $C(a)$ образует ко-накрытие для X. *λ-ко-накрытием* называем ко-накрытие, порождающее как корень λ-фрейм.

Говорим, что фрейм $\mathcal{F}$ является *λ-фреймом*, если все теоремы логики λ истинны на $\mathcal{F}$ при любом означивании переменных. Соответственно, $\lambda(\mathcal{F})$ — множество формул, истинных на $\mathcal{F}$, — есть логика, порожденная фреймом $\mathcal{F}$. Фрейм $\mathcal{F}$ — *корневой*, если существует элемент $a \in \mathcal{F}$ такой, что $\forall b \in \mathcal{F}\ aRb$. Данный элемент a называем также *корнем* $\mathcal{F}$.

Глубиной элемента x модели (фрейма) $\mathcal{F}$ называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка, содержащего x. Множество всех элементов фрейма (модели) $\mathcal{F}$ глубины не более чем n будем обозначать $S_{\leq n}(\mathcal{F})$, а множество элементов глубины n обозначим $S_n(\mathcal{F})$.

Подмножество $\mathcal{X}$ заданной модели $\mathcal{M}$ называется *формульным (определимым)*, если существует формула α такая, что $\forall x \in \mathcal{M}\big[x \Vdash_V \alpha \iff x \in \mathcal{X}\big]$. Соответственно, *элемент $x \in \mathcal{M}$ является формульным*, если множество $\{x\}$ формульное. Означивание V *определимо (формульное)* в модели $\mathcal{M}$, если для любой переменной p из области V множество $V(p)$ формульное.

Для заданного фрейма $\mathcal{F}$, заданного означивания V и правила вывода $r := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k/\beta\}$ говорим, что r *истинно на $\mathcal{F}$ при означивании V* (обозначаем $\mathcal{F} \models_V r$), если как только

$\forall x \in \mathcal{F}\, \forall i\ (x \models_V \alpha_i)$, то $\forall x \in \mathcal{F}\, (x \models_V \beta)$. *Правило r истинно на $\mathcal{F}$*, если r истинно на $\mathcal{F}$ при любом означивании V (обозначаем $\mathcal{F} \models r$). Аналогично определяется истинность правила на заданной модели: r истинно на $\mathcal{M}$, если как только $\forall x \in \mathcal{M}\, \forall i\ (x \models_V \alpha_i)$, то $\forall x \in \mathcal{M}\, (x \models_V \beta)$ при любом означивании V.

Правило вывода $\alpha_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\alpha_k(x_1,\ldots,x_n)/\beta(x_1,\ldots,x_n)$ называется *допустимым* в логике λ [обозначаем $r \in Ad(\lambda)$], если для любых формул $\delta_1,\ldots,\delta_n$ выполняется $(\forall j\ \ \alpha_j(\delta_1,\ldots,\delta_n) \in \lambda) \Longrightarrow \beta(\delta_1,\ldots,\delta_n) \in \lambda$.

Правило r называется *следствием правил $r_1,\ldots,r_k$ в логике* λ, если заключение r выводимо из посылок r с помощью теорем λ, правил $r_1,\ldots,r_k$ и постулированных правил вывода λ. Множество $Ad^*(\lambda)$ допустимых правил логики λ называем *базисом допустимых правил*, если для любого допустимого правила r найдутся правила $r_1,\ldots,r_k \in Ad^*(\lambda)$ такие, что r выводимо из $r_1,\ldots,r_k$ в логике λ.

Модель Крипке $\langle F,R,V\rangle$, где $V : P_n \to 2^F$ и $P_n = \{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$, называется *$n$-характеристической для логики* λ тогда и только тогда, когда для любой формулы α от переменных $p_1,\ldots,p_n$, $\alpha \in \lambda \iff \langle F,R,V\rangle \models \alpha$.

В нашем исследовании существенно будет использоваться строение n-характеристической модели для финитно аппроксимируемых логик, расширяющих логику $S4$, с помощью которой будет описана допустимость правил вывода в этих логиках. Следуя гл. 3 [1], опишем конструкцию и свойства этой модели.

Пусть задана финитно аппроксимируемая логика λ, расширяющая логику $S4$. И пусть задано множество пропозициональных переменных $P_n = \{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$. Первый слой данной модели $S_1(C_n(\lambda))$ состоит из множества попарно неизоморфных как модели сгустков со всевозможными означиваниями V переменных из множества P_n. Предположим, что $S_{\le m}(C_n(\lambda))$ уже построен. Следующий слой $S_{m+1}(C_n(\lambda))$ глубины $m+1$ получим таким образом. Выберем произвольную антицепь сгустков $\mathcal{X} \subset S_{\le m}(C_n(\lambda))$, содержащую хотя бы один сгусток глубины m, и добавим сгусток C из $S_1(C_n(\lambda))$ как ко-накрытие для антицепи $\mathcal{X}$ при условии: (i) фрейм $C^R = \mathcal{X}^R \cup \{C\}$ является λ-фреймом; (ii) если $\mathcal{X} = \{C_1\}$, то сгусток C не изоморфен подмодели сгустка C_1.

Продолжая описанную процедуру, в итоге получим модель $C_n(\lambda)$. Свойства полученной модели сформулируем в следующих утверждениях.

Утверждение 1 (Th. 3.3.6 [1]). *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4$, модель $C_n(\lambda)$ является n-характеристической, и каждый элемент данной модели — формульный.*

Утверждение 2 (Th. 3.3.3 [1]). *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4$, правило вывода r допустимо в λ если и только если r истинно на фрейме $C_n(\lambda)$ для любого n и при любом формульном означивании переменных r.*

Утверждение 3 (Лем. 4 [8]). *Пусть фрейм $\mathcal{F}$ адекватен логике $\lambda \supseteq S4$. И пусть первый слой данного фрейма содержит хотя бы один одноэлементный сгусток. Тогда если алгебра $\mathcal{F}^+$ не принадлежит квазимногообразию $\mathcal{F}_w^Q(\lambda)$, порожденному свободной алгеброй счетного ранга $\mathcal{F}_w(\lambda)$, то во фрейме $\mathcal{F}$ существует нетривиальная антицепь сгустков, не имеющая λ-ко-накрытия в $\mathcal{F}$ и достижимая по отношению R из некоторого элемента $y \in \mathcal{F}$.*

2. Основной результат

Говорим, что логика λ конечной ширины k, расширяющая логику $S4$, имеет *слабое свойство k-ко-накрытий*, если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathcal{F}$ и произвольной нетривиальной антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $\mathcal{F}$, состоящей не более чем из k сгустков, фрейм $\mathcal{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия ко фрейму $\bigcup\limits_{c \in \mathcal{X}^R} c^R$, также является λ-фреймом.

Пусть задана модальная логика $\lambda \supseteq S4$, удовлетворяющая следующим условиям: *(i) финитно аппроксимируема; (ii) имеет слабое свойство k-ко-накрытий; (iii) ширина логики конечна и равна k.*

Для всех чисел $1 < n \leq k,\ 1 \leq m;\ n, m \in N$, определим формулы:

$$A_n := \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Diamond p_i; \qquad A_{n,m} := \Box\Big[\bigwedge_{1 \leq i \leq n} p_i \to \bigwedge_{1 \leq j \leq m} \neg\Diamond q_j\Big];$$

$$B_m := \bigvee_{\mathcal{D} \subseteq \{1,\ldots,m\}} \Big[\bigwedge_{i \in \mathcal{D}} q_i \wedge \bigwedge_{i \notin \mathcal{D}, 1 \leq j \leq m} \neg\Diamond q_i\Big]$$

Для всех чисел $1 < n \leq k,\ 1 \leq m,\ n, m \in N$, определим также последовательность правил вывода:

$$R_{n,m} := \frac{\Box\big(A_{n,m} \wedge \neg(A_n \wedge B_m)\big)}{\Box\neg A_n}$$

Теорема 1 (Lemma 3.1 [11])**.** *Правила $R_{n,m},\ 1 < n \leq k,\ m \in N$, допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике λ ширины k, расширяющей $S4$, и имеющей слабое свойство k-ко-накрытий.*

Доказательство. Предположим, что правило вывода $R_{n,m}$ не допустимо в логике λ. Тогда по утверждению 2 существует формульное означивание V переменных правила $R_{n,m}$, опровергающее $R_{n,m}$ на некоторой t-характеристической модели $C_t(\lambda)$. Итак, справедливо

$$C_t(\lambda) \Vdash_V \Box\big(A_{n,m} \wedge \neg(A_n \wedge B_m)\big) \ \&\ C_t(\lambda) \nVdash_V \Box\neg A_n. \tag{1}$$

Следовательно, существует элемент $a \in C_t(\lambda)$ такой, что $a \nVdash_V \Box\neg A_n$, откуда вытекает $\exists\, a_1 \in C_t(\lambda)\ :\ aRa_1 \& a_1 \Vdash_V A_n$. Тогда найдутся элементы $b_1, \ldots, b_n \in C_t(\lambda),\ n \leq k$, такие, что $a_1 R b_i\ \&\ b_i \Vdash_V p_i$. По слабому свойству k-ко-накрытий существует рефлексивный элемент $b \in C_t(\lambda)$, являющийся ко-накрытием для множества $\{b_1, \ldots, b_n\}$ и по выбору элемента $b \Vdash_V A_n$. По (1) выполняется $b \Vdash_V A_{n,m}$. Рассмотрим множество $D := \{q_j |\ b \Vdash_V q_j\}$. Поскольку b является ко-накрытием для $\{b_1, \ldots, b_n\}$, легко проверить, что дизъюнктивный член B_m, соответствующий такому D, выполняется на элементе b при означивании V. Таким образом, получаем $b \Vdash_V A_n \wedge B_m$, что противоречит $b \Vdash_V \Box\neg(A_n \wedge B_m)$ по предположению (1). $\Box$

Для всех натуральных чисел $n,\ 1 < n \leq k$, определим формулы:

$$A_n := \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Diamond p_i; \quad A_{n,1} := \Box\Big[\bigwedge_{1 \leq i \leq n} p_i \to \neg\Diamond q\Big]; \quad B := q \vee \neg\Diamond q.$$

Определим также для $1 < n \leq k,\ n \in N$, последовательность правил вывода:

$$\mathcal{R}_1 := \frac{\Diamond p \wedge \Diamond\neg p}{p \wedge \neg p}; \qquad \mathcal{R}_n := \frac{\Box\big(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B)\big)}{\Box\neg A_n};\ n = 2, 3, \ldots.$$

Покажем, что последовательность правил вывода $\mathcal{R}_n,\ n \in N$, является базисом для допустимых правил вывода логики $\lambda \supseteq S4$, удовлетворяющей условиям (i) – (iii).

Лемма 1. *Правило $\mathcal{R}_1$ допустимо в любой финитно аппроксимируемой модальной логике $\lambda\ \supseteq\ S4$.*

Доказательство почти очевидно. По построению n-характеристической модели $C_n(\lambda)$ первый слой этой модели содержит вырожденные, одноэлементные сгустки. Соответственно, на элементах, порождающих вырожденные сгустки, посылка правила $\mathcal{R}_1$ не выполняется, что влечет допустимость данного правила вывода в логике λ. $\Box$

Следствие 1. *Правило $\mathcal{R}_1$ опровергается на $S4$-фреймах, первый слой которых состоит только из собственных сгустков.*

Для ДОКАЗАТЕЛЬСТВА достаточно определить означивание переменной p следующим образом. В каждом сгустке первого слоя заданного фрейма, которые, по нашему предположению, состоят не менее чем из двух различных элементов, выбираем и фиксируем произвольный элемент. И полагаем, что на зафиксированных элементах истинна переменная p, а на всех остальных элементах первого слоя истинно $\neg p$. Тогда в силу рефлексивности и транзитивности отношения R посылка правила $\mathcal{R}_1$ истинна на данном фрейме, а заключение — ложно.

Теорема 2. *Правила $\mathcal{R}_n$, $n > 1$, допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике λ, расширяющей $S4$, имеющей слабое свойство ко-накрытий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из Теоремы 1, т.к. правила $\mathcal{R}_n$ являются частным случаем правил $R_{n,m}$ при $m = 1$. □

Пусть задана модальная алгебра $\mathcal{A} := \mathcal{F}^+(X) \in Var(S4)$, порожденная множеством подмножеств $X \subseteq \mathcal{F}$ обертывающей алгебры $\mathcal{F}^+$, где $\mathcal{F}$ – заданный транзитивный и рефлексивный фрейм ширины не более k. И пусть $rf(r)$ – правило вывода в редуцированной форме.

Теорема 3. *Если правило $rf(r)$ допустимо в логике λ, имеет m переменных и опровергается на алгебре $\mathcal{A}$, тогда для некоторого $1 < n \leq k$ правило $\mathcal{R}_n$ также опровергается на алгебре $\mathcal{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правило $rf(r)$ имеет вид $\alpha_1, \ldots, \alpha_n/\beta$. И пусть $\mathcal{F} \Vdash_V \alpha_j, 1 \leq j \leq n$; $\exists b \in \mathcal{F} :\ b \nVdash_V \beta$. Рассмотрим алгебру $(b^R)^+$, порожденную фреймом b^R, и ее подалгебру $\mathcal{B} := (b^R)^+(V(x_0), V(x_1), \ldots, V(x_m))$, порожденную множеством элементов $\{V(x_0), V(x_1) \ldots V(x_m)\}$. Поскольку наше правило $rf(r)$ опровергается на b^R, то $\mathcal{B} \not\models_V rf(r)$. Следовательно, алгебра $\mathcal{B}$ не принадлежит квазимногообразию $\mathcal{F}_w^Q$, порожденному свободной алгеброй счетного ранга $\mathcal{F}_w$ из многообразия $Var(\lambda)$. В противном случае, на этой алгебре истинны все квазитождества, соответствующие допустимым в логике правилам вывода, в том числе и квазитождество, соответствующее правилу $rf(r)$, — противоречие.

Понятно, что в таком случае по утверждению 3 существует нетривиальная антицепь сгустков $X \subset b^R$, не имеющая λ-ко-накрытия ε в $\mathcal{F}$ (и значит, в b^R), порождающего как корень λ-фрейм; или все сгустки первого слоя фрейма $\mathcal{F}$ являются собственными. Зафиксируем эту нетривиальную антицепь $X \subset b^R$ и рассмотрим сначала первый случай.

Определим теперь на фрейме $\mathcal{F}$ означивание V переменных правила $\mathcal{R}_n$ следующим образом. Пусть зафиксированная выше антицепь $X \subset b^R$ состоит из сгустков $\{C_1,\ C_2,\ \ldots, C_n\}$. Определим $V(q) := S_1(\mathcal{F})$; $V(p_i) := C_i$, т.е. $\forall x \in C_i\ x \models_V p_i$. Покажем теперь, что при таком означивании V правило $\mathcal{R}_n$ опровергается на фрейме $\mathcal{F}$. Непосредственно из определения означивания V вытекает

$$\forall x \in \mathcal{F}\ x \models_V \Diamond q; \quad x \models_V p_i \iff x \in C_i. \tag{2}$$

Тогда для всех элементов фрейма $\mathcal{F}$, глубина которых больше 1, выполняется $e \not\models_V q \vee \neg\Diamond q$, откуда заключаем $e \not\models_V A_n \wedge B$. Для элементов первого слоя фрейма $\mathcal{F}$ очевидно не может выполниться $e \models_V \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Diamond p_i$, т.к. данные элементы не могут быть R-предшественниками для антицепи X. Таким образом, заключаем $\forall x \in \mathcal{F}\ x \models_V \neg(A_n \wedge B)$. Далее, по определению означивания переменных p_i очевидно выполнено $\forall x \in \mathcal{F}\ x \not\models_V \bigwedge_{1 \leq i \leq n} p_i$. Отсюда следует $\forall x \in \mathcal{F}\ x \models_V \neg[\bigwedge_{1 \leq i \leq n} p_i \wedge \Diamond q]$, т.е. справедливо $\forall x \in \mathcal{F}\ x \models_V A_{n,1}$.

Итак, мы показали, что при таком определении означивания V посылка правила истинна на всех элементах фрейма $\mathcal{F}$. Т.к. элемент b является R-предшественником сгустков $\{C_1,\ C_2,\ \ldots, C_n\}$ и $\forall x \in C_i\ x \models_V p_i$, следовательно, выполнено $b \models_V \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Diamond p_i$, т.е. $b \models_V A_n$. Откуда заключаем $b \not\models_V \Box\neg A_n$, что доказывает опровержимость правила $\mathcal{R}_n$ на фрейме $\mathcal{F}$ при данном означивании V.

Во втором случае, когда все сгустки первого слоя фрейма $\mathcal{F}$ являются собственными, на $\mathcal{F}$ опровергается правило $\mathcal{R}_1$ по следствию 1. □

Из теорем 2 и 3 непосредственно следует

Теорема 4. *Пусть задана модальная логика $\lambda \supseteq S4$ такая, что: (i) финитно аппроксимируема; (ii) имеет слабое свойство k-ко-накрытий; (iii) ширина логики конечна и ограничена числом k.*

Тогда множество правил $\{\mathcal{R}_n,\ 1 \le n \le k\}$ образует конечный базис допустимых правил вывода логики λ.

Следствие 2. *Правила $R_{n,m},\ 1 < n \le k, m \in N$, образуют базис допустимых правил вывода логики λ, удовлетворяющей условиям теоремы 4.*

Доказательство. Действительно, по теореме 2 правила $\mathcal{R}_n,\ 1 \le n \le k$, являются следствиями правил $R_{n,m},\ 1 < n \le k, m \in N$. Поскольку по теореме 4 все допустимые правила логики выводятся из правил $\mathcal{R}_n$, то они также будут выводиться из множества правил $R_{n,m}$, что доказывает данное следствие. $\square$

Из определения слабого свойства k-ко-накрытий видно, что этим свойством могут также обладать логики конечной глубины. Учитывая, что конечность ширины и глубины логики приводит к ее табличности, получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть табличная модальная логика $\lambda \supseteq S4$ имеет слабое свойство k-ко-накрытий и ширина логики равна k.*

Тогда множество правил $\{\mathcal{R}_n,\ 1 \le n \le k\}$ образует конечный базис допустимых правил вывода логики λ.

Заметим, что по теореме 2 слабое свойство k-ко-накрытий является достаточным для допустимости правил $\mathcal{R}_n,\ 1 \le n \le k$. Покажем, что данное свойство также необходимо для их допустимости.

Теорема 5. *Если правила $\{\mathcal{R}_n, n \in N,\ 1 < n \le k\}$ допустимы в финитно аппроксимируемой логике λ ширины k, тогда логика λ имеет слабое свойство k-ко-накрытий.*

Доказательство. Предположим, что все правила $\mathcal{R}_n,\ 1 < n \le k, n \in N$, допустимы в финитно аппроксимируемой логике λ ширины k и в то же время логика не имеет слабого свойства k-ко-накрытий. Т.е. найдется конечный корневой λ-фрейм $G = b^R$ и нетривиальная антицепь $\mathcal{X} \subset G$, состоящая не более чем из k сгустков, такие, что фрейм $\varepsilon^R := \bigcup\limits_{c \in \mathcal{X}^R} c^R \cup \{\varepsilon\}$, полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия ε ко фрейму $\bigcup\limits_{c \in \mathcal{X}^R} c^R$, не является λ-фреймом. Хотим показать, что в таком случае хотя бы одно из правил $\mathcal{R}_n$, $n \le k$, будет не допустимо в логике λ. Для этого построим λ-фрейм, содержащий фрейм G как открытый подфрейм и опровергающий некоторое правило $\mathcal{R}_n,\ 1 < n \le k$, при некотором означивании. Затем определим p-морфизм из фрейма m-характеристической модели на полученный фрейм. Перенося означивание на m-характеристическую модель, опровергнем на ней данное правило, откуда будет следовать его недопустимость в логике.

Зафиксируем эту нетривиальную антицепь $\mathcal{X}$ и рассмотрим λ-фрейм $G \sqcup \{e\}$, где $\{e\}$ – вырожденный рефлексивный сгусток. Построим теперь λ-последователь $\mathcal{M}$ этого фрейма следующим образом. Определим $S_1(\mathcal{M}) := S_1(G \sqcup \{e\})$. Затем в первом слое данного фрейма выбираем *все нетривиальные антицепи, не имеющие одноэлементных ко-накрытий в $G \sqcup \{e\}$ и состоящие не более чем из k сгустков,* и приписываем к ним снизу одноэлементные рефлексивные ко-накрытия при условии, что добавленные одноэлементные сгустки порождают как корни λ-фреймы. Второй слой ко-последователя $\mathcal{M}$ построен.

Предположим теперь, что $S_{\le t}(\mathcal{M})$ уже построен. Для построения слоя $S_{t+1}(\mathcal{M})$ выбираем *все нетривиальные антицепи из $S_{\le t}(\mathcal{M})$, состоящие не более чем из k сгустков, не имеющие одноэлементных ко-накрытий в $S_{\le t}(\mathcal{M})$ и содержащие хотя бы один сгусток глубины k,* и приписываем к ним снизу одноэлементные рефлексивные ко-накрытия при условии, что добавленные одноэлементные сгустки порождают как корни λ-фреймы. Продолжая описанную процедуру, получим в итоге некоторый фрейм, который является λ-последователем $\mathcal{M}$ фрейма $G \sqcup \{e\}$.

Заметим, что непосредственно по построению фрейм $\mathcal{M}$ имеет следующие свойства:

- первый слой фрейма $\mathcal{M}$ содержит по крайней мере один вырожденный сгусток e;
- зафиксированная антицепь $\mathcal{X} \subset G$ не имеет ко-накрытия в $\mathcal{M}$, т.к. на каждом шаге построения добавляли только те ко-накрытия, которые порождают как корень λ-фрейм;
- фрейм G является открытым подфреймом фрейма $\mathcal{M}$;
- любая нетривиальная антицепь сгустков из $\mathcal{M}$, отличная от $\mathcal{X}$ и состоящая не более чем из k сгустков, имеет в $\mathcal{M}$ одноэлементное λ-ко-накрытие.

Утверждение 4. *Для некоторого* $1 < n \leq k$ *выполняется* $\mathcal{M} \not\models \mathcal{R}_n$.

Пусть зафиксированная выше нетривиальная антицепь $\mathcal{X} \subset b^R$ состоит из сгустков $\{C_1,\ C_2, \ldots C_n\}$, $\ n \leq k$. Определим на фрейме $\mathcal{M}$ означивание переменных правила $\mathcal{R}_n$, где $n \ \leq \ k$ – число различных сгустков в антицепи $\mathcal{X} \subset b^R$, следующим образом. Определим $V(q) := S_1(\mathcal{M})$; $V(p_i) := C_i$, т.е. $\forall x \in C_i \ x \models_V p_i$. Покажем теперь, что при таком означивании V правило $\mathcal{R}_n$ опровергается на фрейме $\mathcal{M}$.

Непосредственно из определения означивания V вытекает

$$\forall x \in \mathcal{M}\ [x \models_V \Diamond q; \quad x \models_V p_i \iff x \in C_i].$$

Тогда для всех элементов фрейма $\mathcal{M}$, глубина которых больше 1, выполняется $e \not\models_V q \vee \neg\Diamond q$, откуда заключаем $e \not\models_V A_n \wedge B$. Для элементов первого слоя фрейма $\mathcal{M}$ очевидно не может выполниться $e \models_V \bigwedge_{1\leq i\leq n} \Diamond p_i$, т.к. данные элементы не могут быть R-предшественниками для антицепи $\mathcal{X}$. Таким образом, заключаем $\forall x \in \mathcal{M}\ x \models_V \neg(A_n \wedge B)$. Далее, по определению означивания переменных p_i очевидно выполнено $\forall x \in \mathcal{M}\ x \not\models_V \bigwedge_{1\leq i\leq n} p_i$. Отсюда следует $\forall x \in \mathcal{M}\ x \models_V \neg[\bigwedge_{1\leq i\leq n} p_i \wedge \Diamond q]$, т.е. справедливо $\forall x \in \mathcal{F}\ x \models_V A_{n,1}$.

Итак, мы показали, что при таком определении означивания посылка правила истинна на всех элементах фрейма $\mathcal{M}$. Поскольку элемент b является R-предшественником сгустков $\{C_1,\ C_2,\ \ldots, C_n\}$ и $\forall x \in C_i\ x \models_V p_i$, следовательно, выполнено $b \models_V \bigwedge_{1\leq i\leq n} \Diamond p_i$, т.е. $b \models_V A_n$. Откуда заключаем $b \not\models_V \Box\neg A_n$, что доказывает опровержимость правила $\mathcal{R}_n$ на фрейме $\mathcal{M}$ при данном означивании V.

Утверждение 5. *Правило* $\mathcal{R}_n$*, где* $n > 1$ *– число сгустков в антицепи* $\mathcal{X}$*, не допустимо в логике* λ*.*

Выберем наименьшее число m так, чтобы выполнилось $\mathcal{M} \sqsubseteq C_m(\lambda)$. Т.к. фрейм $\mathcal{M}$ является открытым подфреймом фрейма m-характеристической модели $C_m(\lambda)$, то можем определить требуемый р-морфизм из $C_m(\lambda)$ в себя, на подфрейм, изоморфный фрейму $\mathcal{M}$. Определим р-морфизм f из фрейма $C_m(\lambda)$ на фрейм $\mathcal{M}$ следующим образом:

- на подфрейме $\mathcal{M} \sqsubseteq C_m(\lambda)$ р-морфизм f определим как тождественный, т.е. $\forall x \in \mathcal{M}$ определим $f(x) := x$;
- для всех элементов $x \in S_1(C_m(\lambda) \setminus \mathcal{M})$ доопределим р-морфизм f как $f(x) := e$, где e – элемент первого слоя $\mathcal{M}$, порождающий вырожденный сгусток;
- пусть для всех элементов $x \in S_{\leq t}(C_m(\lambda) \setminus \mathcal{M})$ р-морфизм f уже определен и элемент $y \in S_{t+1}(C_m(\lambda) \setminus \mathcal{M})$ является ко-накрытием некоторой антицепи сгустков (возможно тривиальной) $\mathcal{A}$. По построению m-характеристической модели $C_m(\lambda)$ фреймы y^R и $\mathcal{A}^R$ — λ-фреймы. По индуктивной гипотезе $f(\mathcal{A}^R)$ уже определен. Т.к. р-морфизм сохраняет истинность формул, то антицепь R-минимальных сгустков фрейма $f(\mathcal{A}^R)$ допускает приписывание снизу одноэлементного рефлексивного λ-ко-накрытия. Тогда по построению фрейма $\mathcal{M}$ одноэлементное рефлексивное ко-накрытие ε для антицепи R-минимальных сгустков фрейма $f(\mathcal{A}^R)$ существует в $\mathcal{M}$. Следовательно, можем определить $f(y) := \varepsilon$. В силу произвольности выбора элемента $y \in S_{t+1}(C_m(\lambda) \setminus \mathcal{M})$, таким образом определяем р-морфизм на всем слое $S_{t+1}(C_m(\lambda))$;

- продолжая доопределение р-морфизма f описанным в предыдущем пункте способом, в итоге определим р-морфизма f из фрейма m-характеристической модели $C_m(\lambda)$ на фрейм $\mathcal{M}$.

Теперь остается заметить, что, перенося с помощью f^{-1} означивание V с фрейма $\mathcal{M}$ на фрейм m-характеристической модели $C_m(\lambda)$, получим р-морфизм моделей

$$\langle C_m(\lambda),\ f^{-1}(V)\rangle \longrightarrow_f \langle \mathcal{M},\ V\rangle,$$

сохраняющий истинность формул. Следовательно, правило $\mathcal{R}_n$ опровергается на m-характеристической модели $C_m(\lambda)$ и, значит, не допустимо в логике λ.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 5. □

Таким образом, из только что доказанной теоремы 5 и теоремы 2 вытекает следующий критерий допустимости правил $\mathcal{R}_n,\ 1 < n \leq k, n \in N$.

Теорема 6. *Пусть финитно аппроксимируемая логика λ конечной ширины k расширяет логику $S4$. Правила $\mathcal{R}_n,\ 1 \leq n \leq k$, допустимы в λ, если и только если λ имеет слабое свойство k-ко-накрытий.*

Покажем теперь, что число финитно аппроксимируемых логик, удовлетворяющих условиям теоремы 4, *не менее чем счетно.* Для этого определим последовательность Grz-фреймов $\mathcal{F}_i,\ i > 2,\ i \in N$, следующим образом. Зафиксируем произвольное число $K > 2$. Первый слой фрейма $\mathcal{F}_i$ для каждого i состоит из i одноэлементных сгустков, образующих антицепь. Для построения второго слоя фрейма $\mathcal{F}_i$ выбираем все нетривиальные антицепи, содержащие не более чем K сгустков первого слоя, и к каждой такой антицепи приписываем снизу вырожденный сгусток как ко-накрытие. Для построения третьего слоя опять выбираем все нетривиальные антицепи, состоящие не более чем из K сгустков первого и второго слоев и содержащие хотя бы один сгусток второго слоя. Затем к каждой такой антицепи приписываем снизу вырожденный сгусток как ко-накрытие. Продолжая описанную процедуру для последующих слоев, получим фрейм ширины K, в котором любая нетривиальная антицепь, состоящая не более чем из K сгустков, имеет ко-накрытие.

Затем определим логики $\lambda_i := \lambda(\mathcal{F}_i),\ i \in N$. Непосредственно из определения следует, что полученные логики λ_i являются финитно аппроксимируемыми и имеют ширину K. Из определения фреймов $\mathcal{F}_i$ также следует, что логики λ_i имеют слабое свойство K-ко-накрытий. Таким образом, число логик, удовлетворяющих условиям теоремы 4, *не менее чем счетно.* Заметим, что если процесс построения фрейма $\mathcal{F}_i$ будем обрывать на слое глубины l, то полученный фрейм $\mathcal{F}_i^l$ ширины K и глубины l будет порождать табличную логику $\lambda_i^T := \lambda(\mathcal{F}_i^l),\ i \in N$, удовлетворяющую условиям теоремы 3, и число таких логик снова *не менее чем счетно.*

Напомним также, что Т-перевод Гёделя-Маккинси-Тарского σ расширения λ интуиционистской логики Int в наибольший модальный напарник $\sigma(\lambda)$ сохраняет многие важные свойства логики: финитную аппроксимируемость, дизъюнктивное свойство, ширину логики и др. (см., например, теоремы 2.7.2, 2.7.21 [1]). Кроме того, логика $\lambda \supseteq Int$ и ее наибольший модальный напарник $\sigma(\lambda) \supseteq Grz$ имеют один и тот же характеристический класс фреймов. По теореме 3.2.2 [1] правило вывода r допустимо в суперинтуиционистской логике λ, если и только если $T(r)$ допустимо в наибольшем модальном напарнике $\sigma(\lambda)$. Отсюда и из теоремы 4 вытекает следующая теорема:

Теорема 7. *Пусть задана логика $\lambda \supseteq Int$, удовлетворяющая условиям (i) – (iii) теоремы 4 или следствию 3.*

Тогда множество правил $\{\mathcal{R}_n^i\ :\ T(\mathcal{R}_n^i) = \mathcal{R}_n,\ 1 < n \leq k,\ n \in N\}$ образует конечный базис допустимых правил вывода логики λ.

Следствие 4. *Множество правил $\{\mathcal{R}_t^i,\ 1 \leq t \leq n+1\}$ образуют базис допустимых правил вывода логики Де Йонга D_n и логик $KC_n,\ D_{n,m},\ KC_{n,m}$.*

Список литературы

[1] V.V.Rybakov, Admissibility of logical inference rules, Vol. 136, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier Sci. Publ., New-York-Amsterdam, 1997.

[2] P.Lorenzen, Einfung in Operative Logik und Mathematik, Berlin–Gottingen–Heidelberg, 1955.

[3] H.Fridman, One hundred and two problems in mathematical logic, *Journal of Symbolic Logic* **40**(1975), №3, 113-130.

[4] В.В.Рыбаков, Критерий допустимости правил вывода в модальной системе $S4$ и интуиционистской логики H, *Алгебра и логика*, **23**(1984), №5, 369-384.

[5] А.И.Циткин, О допустимых правилах интуиционистской логики высказываний, *Мат. сборник*, **102**(1977), №2, 314-323.

[6] В.В.Рыбаков, Базис для допустимых правил логики $S4$ и интуиционистской логики H, *Алгебра и логика*, **24**(1985), №1, 55-68.

[7] В.В.Римацкий, Базисы допустимых правил вывода табличных модальных логик глубины 2, *Алгебра и логика*, **35**(1996), №6, 612-623.

[8] В.В.Римацкий, О конечной базируемости по допустимости модальных логик ширины 2, *Алгебра и логика*, **38**(1999), №4, 436-455.

[9] V.V.Remazki, V.V.Rybakov, M.Terziler, Basis in Semi-Redused Form for the Admissible Rules of the Intuitionistc Logic IPC, *Mathematical Logic Quarterly*, **46**(2000), №2, 207-218.

[10] R.Iemhoff, On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic, *Journal of Symbolic Logic*, **66**(2001), №2, 281-294.

[11] V.V.Rybakov, Construction of an Explicit Basis for Rules admissisble in Modal system S4, *Mathematical Logic Quarterly*, **47**(2001), №4, 441-451.

An Explicit Basis for Admissible Rules of Modal Logics of Finite Width

Vitaly V.Rimatsky

We find an explicit basis for all admissible rules of a representative (at least countable) class of modal logics of finite width extending the logic $S4$. Our basis consists of a sequence of rules which have a compact and simple form.

Key words: *modal logic, inference rule, Kripke frame and model, admissible rule, basis of admissible rules.*