

УДК 517.977

## Эвентологическое измерение суперпозиционного спроса и предложения функциями распределения

Елена Е.Голденок\*

Кирилл В.Голденок

Факультет математики и информатики,  
Сибирский федеральный университет,  
пр. Свободный 79, Красноярск, 660041,  
Россия

Получена 10.10.2007, принята 10.11.2007

*Предложен метод эвентологического исследования спроса и предложения, использующий классический аппарат теории вероятностей: функции распределения. Метод основан на эвентологических соотношениях «вероятность — ценность» события и на свойстве вложенности событий в системах событий спроса и предложения, что позволяет провести эффективные измерения совместного эвентологического распределения этих двух систем рыночных событий. В итоге построена эвентологическая модель рыночного креста спроса и предложения, дополняющая классическую модель рыночного креста Маршалла двумя кривыми совпадения и различия спроса и предложения, которые определяют новое для экономики понятие интервала равновесных цен.*

*Ключевые слова:* функция распределение, модель спроса и предложения, интервал равновесия цен.

Эвентологические измерения производятся над системами событий, такими как разумные субъекты, их группы, или общества. Результатами эвентологических измерений служат события-терраски, порожденные системами событий, и вероятности, с которыми эти события-терраски происходят. Эвентологические измерения на рынках товаров и услуг — это измерения эвентологического распределения некоторой системы событий спроса и предложения, создаваемых поведением разумных субъектов — участников рынка — покупателей и продавцов, потребителей и производителей. Простейшие события спроса и предложения, определяемые ценой спроса и предложения, образуют две взаимозависимые системы событий с вложенной структурой индивидуальных зависимостей. Вложенность событий в этих системах следует из линейного порядка на множестве значений случайной величины — цены спроса или предложения. Свойство вложенности событий в системах событий спроса и предложения позволяет провести эффективные эвентологические измерения совместного эвентологического распределения этих двух систем событий. Это объясняется тем, что система из  $N$  вложенных событий порождает  $N$ , а не  $2^N$  событий-террасок, порождаемых произвольной системой событий. Поэтому совместное эвентологическое распределение двух систем вложенных событий состоит из  $N^2$  (вместо  $2^{2N}$ ) вероятностей соответствующих событий-террасок, получающихся в результате пересечения  $N$  событий-террасок, порожденных каждой из двух исходных систем вложенных событий. В ситуации эвентологического измерения спроса и предложения параметр  $N$  имеет смысл количества градаций цены спроса и предложения. Вложенность событий спроса и предложения позволяет использовать в эвентологических измерениях технику функций распределения случайных величин. Имеются в виду функции распределения  $F_d$  и  $F_s$  случайных величин  $\xi_d$  и  $\xi_s$  — цен спроса и предложения соответственно, а также совместная функция распределения  $F_{ds}$  этих случайных величин, которая определяет совместное эвентологическое распределение двух систем вложенных событий спроса и предложения. При этом  $\mathbf{P}(\xi_d > \pi, \xi_s < \pi)$  — вероятность покупки-продажи товара или услуги по цене  $\pi$ ,  $\mathbf{P}(\xi_d < \pi, \xi_s < \pi)$  — вероятность неудовлетворенного предложения по цене  $\pi$ ,  $\mathbf{P}(\xi_s > \pi, \xi_d > \pi)$  — вероятность неудовлетворенного спроса по цене  $\pi$ , определяются совместной функцией распределения  $F_{ds}$  цен спроса и предложения.

\*e-mail: ellen\_gold@rambler.ru

© Siberian Federal University. All rights reserved

**Событийный рынок.** Любой рынок товара — это всегда *событийный рынок*: рынок *событий-спросов* и *событий-предложений* данного товара. События-спроса и события-предложения — это всегда результат такой деятельности разумных субъектов — участников рынка, которая связана с данным товаром, поэтому любой событийный рынок определяется и товаром, и некоторым множеством разумных субъектов, имеющих отношение к данному товару.

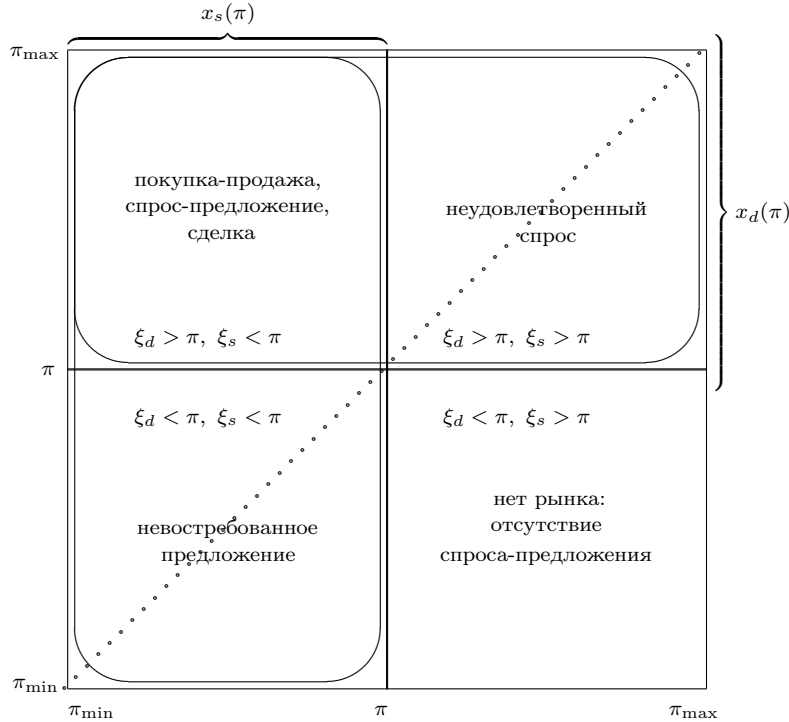


Рис. 1: События спроса  $x_d(\pi)$  и предложения  $x_s(\pi)$  по рыночной цене  $\pi$ , связанные с ними случайные величины  $\xi_d$  и  $\xi_s$  и параметры, определяющие интервал изменения рыночной цены  $\pi \in [\pi_{\min}, \pi_{\max}]$

**Рыночная моноцена и мультицена.** Нас будет интересовать ситуация, когда каждый событийный рынок данного товара определяется общей для всего рынка характеристикой — *единой рыночной ценой товара*. Иначе говоря, мы считаем, что на таком событийном рынке не может существовать одновременно две или более рыночных цены товара. Таким образом, каждая рыночная цена товара определяет собственный событийный рынок, который состоит из товара и множества разумных субъектов, совершающих сделки по данной цене. Рыночная цена товара, конечно, может меняться, однако если рыночная цена вдруг изменилась только на некоторой части событийного рынка, то это сразу приведет к разделению рынка на два отдельных событийных рынка, каждый из которых будет вновь определяться собственной единой рыночной ценой, или *событийными рынками с моно-ценой*. Произвольный событийный рынок данного товара — *событийный рынок с мультиценой* — есть объединение событийных рынков с моноценами по всем существующим на этот момент рыночным моноценам данного товара.

**Понятия и обозначения в эвентологической модели суперпозиционного спроса и предложения.** События спроса и предложения, связанные с ними случайные величины и параметры интерпретируются следующим образом:

- $\xi_d$  — *верхняя граница цен (ценностей) событий-спросов* на товар (или услугу<sup>1</sup>), за ко-

<sup>1</sup>Далее для краткости будем говорить только о рынке товаров, хотя все изложенное справедливо также и для рынка услуг.

торые разумный субъект готов купить этот товар; *случайная величина*, порождаемая свободным *суперпозиционным*<sup>2</sup> состоянием разумного субъекта и определяемая его рыночными вкусами и предпочтениями спроса на товар; *вероятностное распределение границы*, разделяющей приемлемые и неприемлемые для разумного субъекта цены спроса на товар;

- $\xi_s$  — *нижняя граница цен (ценностей) событий-предложений* товара, за которые разумный субъект готов продать этот товар; *случайная величина*, порождаемая свободным *суперпозиционным* состоянием разумного субъекта и определяемая его рыночными вкусами и предпочтениями предложения товара; *вероятностное распределение границы*, разделяющей приемлемые и неприемлемые для разумного субъекта цены предложения товара;
- $\pi$  — рыночная цена событий спроса-предложения, установившаяся на событийном рынке, по которой при данном стечении обстоятельств заключаются рыночные сделки: *предлагаются спрашиваемые* товары или *спрашиваются предлагаемые* товары;
- $[\pi_{\min}, \pi_{\max}]$  — интервал возможных цен событий на «событийном рынке» спроса-предложения товара;
- $x_d(\pi) = \{\omega : \xi_d(\omega) > \pi\}$  — событие-спрос на товар за рыночную цену  $\pi$ ;
- $x_s(\pi) = \{\omega : \xi_s(\omega) > \pi\}$  — событие-предложение товара по рыночной цене  $\pi$ .

**Эвентологическая модель суперпозиционного спроса и предложения.** Эвентологический рынок спроса и предложения данного товара, характеризуемый рыночной моноценой  $\pi$ , образуется двумя множествами (сообществами) разумных субъектов:

- $\mathfrak{D}$  — множеством покупателей, потребителей — разумных субъектов  $d \in \mathfrak{D}$ , спрашивающих данный товар;
- $\mathfrak{S}$  — множеством продавцов, производителей — разумных субъектов  $s \in \mathfrak{S}$ , предлагающих данный товар.

Каждый разумный субъект, будь то покупатель  $d \in \mathfrak{D}$  или продавец  $s \in \mathfrak{S}$ , так же, как и каждое из двух множеств разумных субъектов  $\mathfrak{D}$  и  $\mathfrak{S}$  в каждый момент времени находится в *суперпозиционном (свободном) состоянии* вплоть до момента очередного рыночного взаимодействия — сделки (купли-продажи данного товара). В промежутках между рыночными взаимодействиями *суперпозиционное (свободное) состояние* разумных субъектов или множеств разумных субъектов характеризуется случайными величинами  $\xi_d, \xi_s$  или  $\xi_{\mathfrak{D}}, \xi_{\mathfrak{S}}$  с функциями распределения  $F_d, F_s$  или  $F_{\mathfrak{D}}, F_{\mathfrak{S}}$  соответственно. В результате очередного рыночного взаимодействия *суперпозиционное состояние* разумных субъектов или их множеств меняется непредсказуемым образом, чтобы оставаться неизменным до следующего рыночного взаимодействия.

В рамках предлагаемой модели «событийного рынка» с точки зрения теории вероятностей *суперпозиционное состояние* рынка спроса и предложения полностью характеризуется совместной функцией распределения  $F_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}$  случайных величин  $\xi_{\mathfrak{D}}, \xi_{\mathfrak{S}}$ :

$$F_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi, \pi') = \mathbf{P}(\xi_{\mathfrak{D}} < \pi, \xi_{\mathfrak{S}} < \pi').$$

Предлагаемое нами эвентологическое описание рыночного взаимодействия разумных субъектов — участников рынка — существенно более экономно. Для него достаточно лишь всех диагональных значений совместной функции распределения, определяемых одномерной функцией распределения (*функцией невостробованного предложения*)

$$\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi) = F_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi, \pi) = \mathbf{P}(\text{невостробованное предложение по рыночной цене } \pi).$$

Поскольку вероятности всех четырех возможных событий (см. рис. 1):

<sup>2</sup> *Суперпозиционный* — термин, заимствованный из квантовой механики, математически означающий здесь понятие, эквивалентное вероятностному распределению некоторой случайной величины, или более узко — некоторой функции распределения.

- $\{\xi_d > \pi, \xi_s < \pi\}$  — сделка, купля-продажа, спрос-предложение;
- $\{\xi_d < \pi, \xi_s < \pi\}$  — невостребованное предложение;
- $\{\xi_d > \pi, \xi_s > \pi\}$  — неудовлетворенный спрос;
- $\{\xi_d < \pi, \xi_s > \pi\}$  — нет рынка: отсутствие спроса-предложения,

которые могут произойти на рынке спроса и предложения при рыночной цене  $\pi$ , выражаются через три одномерные функции распределения — две маргинальные, *функцию спроса*  $F_{\mathfrak{D}}$  и *функцию предложения*  $F_{\mathfrak{S}}$ , и диагональную, *функцию невостребованного предложения*  $\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}$ :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\text{спрос-предложение по рыночной цене } \pi) = \\ &= \mathbf{P}(\text{предложение}) - \mathbf{P}(\text{невостребованное предложение}) = F_{\mathfrak{S}}(\pi) - \Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi), \\ & \mathbf{P}(\text{неудовлетворенный спрос по рыночной цене } \pi) = \\ &= \mathbf{P}(\text{спрос}) - \mathbf{P}(\text{спрос-предложение}) = F_{\mathfrak{D}}(\pi) - F_{\mathfrak{S}}(\pi) + \Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi), \\ & \mathbf{P}(\text{нет рынка по рыночной цене } \pi) = \\ &= 1 - \mathbf{P}(\text{спрос}) - \mathbf{P}(\text{невостребованное предложение}) = 1 - F_{\mathfrak{D}}(\pi) - \Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi). \end{aligned}$$

*Функция невостребованного предложения*  $\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi)$  для каждого значения рыночной цены  $\pi$  связана с маргинальными функциями распределения спроса и предложения и парной ковариацией событий спроса и предложения соотношением

$$\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi) = F_{\mathfrak{D}}(\pi)F_{\mathfrak{S}}(\pi) + \text{Kov}_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi),$$

где парная ковариация событий спроса и предложения при каждом значении рыночной цены  $\pi$  лежит в пределах известных границ Фреше:

$$\begin{aligned} & \max\{0, F_{\mathfrak{D}}(\pi) + F_{\mathfrak{S}}(\pi) - 1\} - F_{\mathfrak{D}}(\pi)F_{\mathfrak{S}}(\pi) \leq \text{Kov}_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi), \\ & \text{Kov}_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi) \leq \min\{F_{\mathfrak{D}}(\pi), F_{\mathfrak{S}}(\pi)\} - F_{\mathfrak{D}}(\pi)F_{\mathfrak{S}}(\pi). \end{aligned}$$

**Эвентологическая модель суперпозиционного спроса и предложения.** Гиббсовская модель потребительского выбора [1] и ее обобщение: эвентологические соотношения «ценность – вероятность» [3], позволяют нам определить два однопараметрических класса функций распределения спроса и предложения  $F_{\mathfrak{D}}$  и  $F_{\mathfrak{S}}$  (с параметрами  $\beta$  и  $\gamma$ , имеющими смысл *обратного уровня дохода* потребителя и *обратного уровня производительности* производителя). Эти два класса функций распределения случайных величин  $\xi_{\mathfrak{D}}$  и  $\xi_{\mathfrak{S}}$  мы намерены использовать для построения новой *гиббсовской эвентологической модели суперпозиционного спроса и предложения*, существенно опирающейся на вложенную структуру зависимостей событий спроса и предложения и на вновь введенное понятие *суперпозиционного спроса*  $\xi_{\mathfrak{D}}$  и *суперпозиционного предложения*  $\xi_{\mathfrak{S}}$  разумного субъекта или множества разумных субъектов<sup>3</sup>.

Два эвентологических соотношения «ценность – вероятность» [3], связывающие для каждого подмножества событий  $X \subseteq \mathfrak{X}$  вероятности  $p(X)$  событий-террасок  $\text{ter}(X)$  с их ценностями восприятия (спроса)  $v(X)$  и деятельности (предложения)  $w(X)$ , в общем виде, когда никаких предположений о структуре зависимостей множества событий  $\mathfrak{X}$  не делается, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} p(X)/p(\emptyset) &= \exp\{-\beta(v(X) - v(\emptyset))\}, \\ p(X)/p(\emptyset) &= \exp\{\gamma(w(X) - w(\emptyset))\}. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>«Каким образом *суперпозиционные* спросы и предложения отдельных разумных субъектов формируют *суперпозиционные* спросы и предложения множества разумных субъектов?» — вопрос, требующий специального внимания, который будет рассмотрен в следующих работах.

В частном виде для множества событий с вложенной структурой зависимостей, которая в ситуации событийного рынка спроса и предложения определяется функциями распределения спроса  $F_{\mathfrak{D}}$  и предложения  $F_{\mathfrak{S}}$  с плотностями  $f_{\mathfrak{D}}$  и  $f_{\mathfrak{S}}$  соответственно, эти два соотношения выглядят более привычным для теории вероятностей образом:

$$f_{\mathfrak{D}}(\pi) = a \exp \{ -\beta \pi \}, \quad f_{\mathfrak{S}}(\pi) = b \exp \{ \gamma \pi \},$$

где  $\pi \in [\pi_{\min}, \pi_{\max}]$  — текущая цена события-спроса или события-предложения, а  $a > 0$  и  $b > 0$  — множители, которые определяются условиями нормировки:

$$\int_{\pi_{\min}}^{\pi_{\max}} f_{\mathfrak{D}}(\pi) d\pi = 1; \quad \int_{\pi_{\min}}^{\pi_{\max}} f_{\mathfrak{S}}(\pi) d\pi = 1.$$

Функции и плотности распределения в эвентологической модели *суперпозиционного* спроса и предложения для  $\pi \in [\pi_{\min}, \pi_{\max}]$  таковы:

$$F_{\mathfrak{D}}(\pi) = \frac{1 - e^{-\beta(\pi - \pi_{\min})}}{1 - e^{-\beta(\pi_{\max} - \pi_{\min})}}, \quad f_{\mathfrak{D}}(\pi) = \frac{e^{-\beta\pi}}{e^{-\beta\pi_{\min}} - e^{-\beta\pi_{\max}}};$$

$$F_{\mathfrak{S}}(\pi) = \frac{e^{\gamma(\pi - \pi_{\min})} - 1}{e^{\gamma(\pi_{\max} - \pi_{\min})} - 1}, \quad f_{\mathfrak{S}}(\pi) = \frac{e^{\gamma\pi}}{e^{\gamma\pi_{\max}} - e^{\gamma\pi_{\min}}}.$$

#### Функции совпадения и различия *суперпозиционного* спроса и предложения.

Маргинальные функции распределения *суперпозиционного* спроса и предложения служат эвентологическими моделями того, что в экономике называется «кривой спроса»:  $1 - F_{\mathfrak{D}}$  и «кривой предложения»:  $F_{\mathfrak{S}}$  (обоснование этого см. в [2]). Вместе с тем эвентологическая модель *суперпозиционного* спроса и предложения предлагает еще две важные с точки зрения эвентологии событийных рынков функциональные характеристики рыночных событий: *функцию совпадения*  $\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}^{\square}(\pi)$  и *функцию различия*  $\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}^{\Delta}(\pi)$  спроса и предложения, которые могут быть выражены через три одномерные функции распределения  $F_{\mathfrak{D}}$ ,  $F_{\mathfrak{S}}$  и  $\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi)$  по формулам

$$\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}^{\square}(\pi) = F_{\mathfrak{S}}(\pi) - \Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi), \quad \Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}^{\Delta}(\pi) = 1 - F_{\mathfrak{D}} - F_{\mathfrak{S}}(\pi) + 2\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}(\pi)$$

и интерпретируются следующим образом:

- $\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}^{\square}(\pi)$  — вероятность совпадения спроса и предложения при рыночной цене  $\pi$ : вероятность сделки по цене  $\pi$ ;
- $\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}^{\Delta}(\pi)$  — вероятность различия спроса и предложения при рыночной цене  $\pi$ : вероятность не востребованного предложения или неудовлетворенного спроса при рыночной цене  $\pi$ .

Именно эти две функции позволяют сформулировать не встречавшиеся ранее в экономике новые определения критерия равновесия рынка вместо предлагаемого экономикой критерия «точки пересечения «кривой спроса» с «кривой предложения»». Эвентологическая модель *суперпозиционного* спроса и предложения определяет еще две характерных рыночных цены:

- одну  $\pi_{\square}$ , при которой максимальна вероятность совпадения спроса и предложения:

$$\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}^{\square}(\pi_{\square}) = \max_{\pi} \Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}^{\square}(\pi),$$

- другую  $\pi_{\Delta}$ , при которой минимальна вероятность различия спроса и предложения:

$$\Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}^{\Delta}(\pi_{\Delta}) = \min_{\pi} \Phi_{\mathfrak{D}\mathfrak{S}}^{\Delta}(\pi).$$

Эти две экстремальные цены предлагают новое для экономики понятие: так называемый *интервал равновесных рыночных цен*:

- интервал  $[\pi_{\square}, \pi_{\Delta}]$ , если  $\pi_{\square} < \pi_{\Delta}$ ;

- интервал  $[\pi_{\Delta}, \pi_{\Gamma}]$ , если  $\pi_{\Gamma} > \pi_{\Delta}$ ,

вместо классического понятия равновесной рыночной цены  $\pi^0$ , определяемой «пересечением «кривой спроса»  $1 - F_{\mathcal{D}}$  и «кривой предложения»  $F_{\mathcal{S}}$ »:

$$1 - F_{\mathcal{D}}(\pi^0) = F_{\mathcal{S}}(\pi^0).$$

**Примеры функций из эвентологической модели суперпозиционного спроса и предложения** (рис. 2)

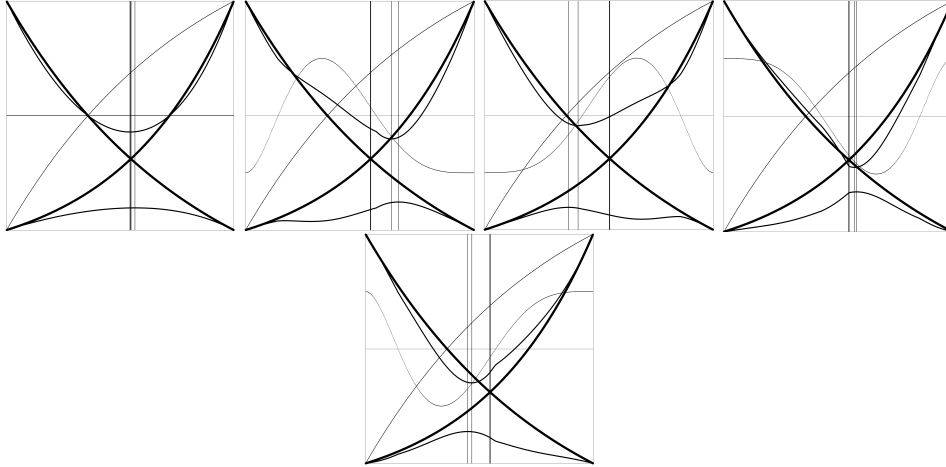


Рис. 2: Эвентологический крест спроса и предложения. Показаны «кривая спроса»  $1 - F_{\mathcal{D}}$  и «кривая предложения»  $F_{\mathcal{S}}$  (толстые линии), функция спроса  $1 - F_{\mathcal{D}}$  (тонкая линия), а также функции совпадения  $\Phi_{\mathcal{D}\mathcal{S}}^{\Gamma}$  и различия  $\Phi_{\mathcal{D}\mathcal{S}}^{\Delta}$ , достигающие максимума и минимума, определяющих интервал равновесных цен, отмеченный вертикальными линиями. 1) в данном примере интервал равновесных цен содержит точку пересечения кривых спроса и предложения; параметры:  $\beta = 0.15, \gamma = 0.25, \pi_{\min} = 1, \pi_{\max} = 9$ , Фреше-корреляция спроса и предложения равна нулю — события независимы (горизонтальная ось в центре соответствует нулевой Фреше-корреляции); 2) и 3) в данных примерах интервал равновесных цен не содержит точки пересечения кривых спроса и предложения; параметры:  $\beta = 0.15, \gamma = 0.25, \pi_{\min} = 1, \pi_{\max} = 9$ , Фреше-корреляция зависит от цены и меняется в пределах от -0.5 до 0.5 как функция, график которой показан пунктиром; 4) и 5) в данных примерах интервал равновесных цен не содержит точки пересечения кривых спроса и предложения; параметры:  $\beta = 0.15, \gamma = 0.25, \pi_{\min} = 1, \pi_{\max} = 9$ , Фреше-корреляция зависит от цены и меняется в пределах от -0.5 до 0.5 как функция, график которой показан пунктиром

**О методах эвентологического измерения суперпозиционного спроса и предложения.** Методы статистического измерения суперпозиционного спроса и предложения, основанные на предлагаемой нами эвентологической модели, предполагают возможность статистической оценки трех одномерных функций распределения: двух маргинальных функций спроса  $F_{\mathcal{D}}$  и предложения  $F_{\mathcal{S}}$  и диагональной функции невостребованного предложения  $\Phi_{\mathcal{D}\mathcal{S}}$ . Следует отметить, что наименее доступна статистика, требуемая для оценки функции спроса  $F_{\mathcal{D}}$ , поскольку спрос включает наиболее трудно контролируемый неудовлетворенный спрос. Вполне доступна статистика, требуемая для оценки функции предложения  $F_{\mathcal{S}}$ , поскольку данные о рыночном предложении товара обычно фиксируются статистиками. Наиболее распространена статистика о рыночных сделках, так называемая чековая статистика, фиксирующая покупки-продажи. Из этой статистики, дополненной статистикой предложения, довольно просто извлечь данные, необходимые для оценки функции невостребованного предложения  $\Phi_{\mathcal{D}\mathcal{S}}$ .

## Список литературы

- [1] Е.Е.Голденок, Структурный анализ зависимостей событий в статистических системах, Автореферат дисс. ... канд. физ-мат. наук, Красноярск, КГТЭИ, 2002.
- [2] Е.Е.Голденок, К.В.Голденок, Эвентологическое обоснование классической модели рынка, *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. науки*, Красноярск, КрасГУ, (2006), №9, 135-139.
- [3] О.Ю.Воробьев, Эвентология, Красноярск, СФУ, КГТЭИ, ИВМ СО РАН, 2007.

## Eventological Measurement of Supply and Demand by Distribution Functions

**Ellen E.Goldenok**  
**Kirill V.Goldenok**

---

*Eventological measurements are made above systems of events such as reasonable subjects, their groups, or their society. Events-terraces generated by systems of events and probabilities of occurring events-terraces serve as the results of eventological measurements. Eventological measurements in commodity markets and services are measurements of eventological distributions of some system of events of the supply and demand created by the behaviour of reasonable subjects, participants of the market, buyers and sellers, consumers and manufacturers.*

Key words: *distribution function, commodity markets and services.*