УДК 534(076.1)

МАЛЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Горохова Е. Ю.
Научный руководитель – доцент Валькова Т. А.
Сибирский федеральный университет

Разработанный в теории механических колебаний формализм Лагранжа применим для составления дифференциального уравнения движения механической системы на примере конкретного механизма (рис. 1).

Механическая система, расположенная в вертикальной плоскости, состоит: из колеса 1 массой m_1 = 4 кг радиусом r = 0,15 м с осью вращения O_1; однородного стержня 2 m_2 = 3 кг длиной l = 0,6 м, закрепленного шарниром в точке O_2; катка 3 массой m_3 = 2 кг радиусом $R = 0{,}2$ м, катящегося по горизонтальной плоскости без скольжения; груза 4 массой m_4 = 1 кг, подвешенного на нити, намотанной на колесо 1; невесомых стержней 5 и 6, соединяющих тела системы. К центру C_3 катка 3 прикреплена горизонтальная пружина с коэффициентом жесткости $c = 800$ Н/м и демпфер с коэффициентом сопротивления $\mu = 40$ Н с/м. На колесо 1 действует пара сил с переменным моментом $M(t) = M_0 \sin(pt)$ Н м, где $M_0 = 0{,}4$ Н м, $p = 15$ с$^{-1}$. В начальный момент времени $(t = 0)$ механизм находится в равновесии, при этом стержень 2 занимает вертикальное положение, причем $O_2B = 2l/3$.

Определить закон малых колебаний системы около положения равновесия, если в начальный момент времени $t = 0$ колесу 1 сообщили начальную угловую скорость $\omega_0 = 0{,}1$ с$^{-1}$. При вычислении моментов инерции колесо 1 считать однородным круглым цилиндром, а массу катка 3 $-$ распределенной по его ободу.

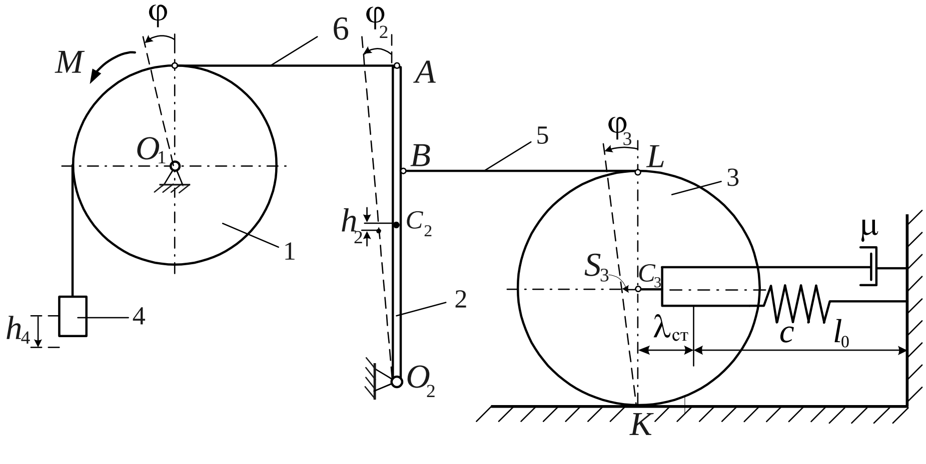

Рисунок 1

Рассмотрим произвольное положение механической системы, когда она выведена из состояния равновесия (рис. 1).

Поскольку система обладает одной степенью свободы, то выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота φ колеса 1 в направлении действия момента $M(t)$; тогда обобщенная скорость $\dot{\varphi} = \omega_1 -$ угловая скорость колеса 1.

Уравнение Лагранжа второго рода для данной системы имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q^{\Pi} + Q^{\Phi} + Q(t), \qquad (1)$$

Вычислим T, $Q^{П}$, $Q^{Ф}$ и $Q(t)$, входящие в (1), как функции $\dot{\varphi}$ и φ. Считая угол φ и обобщенную скорость $\dot{\varphi}$ малыми, в выражениях для T и $П$ ограничимся только слагаемыми не выше второго порядка малости по обобщенной координате φ и обобщенной скорости $\dot{\varphi}$, так как в уравнении (1) эти функции стоят под знаками первых производных по φ и $\dot{\varphi}$, а при дифференцировании степенного многочлена его степень понижается на единицу.

Кинетическая энергия механической системы определяется как сумма кинетических энергий, входящих в нее тел. Поскольку колесо 1 вращается вокруг оси проходящей через точку O_1, стержень 2 вращается вокруг оси проходящей через точку O_2, каток 3 движется плоскопараллельно, а груз 4 – поступательно, то

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{O_1} \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_{O_2} \omega_2^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{C_3} \omega_3^2, \quad T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2. \tag{2}$$

где осевые моменты инерции вычисляются по формулам:

$$I_{O_1} = \frac{1}{2} m_1 r^2, \quad I_{O_2} = \frac{1}{3} m_2 l^2, \quad I_{C_3} = m_3 R^2. \tag{3}$$

Выразим все скорости, входящие в (2/3), через обобщенную скорость $\dot{\varphi}$. С учетом данных задачи находим:

$$\begin{gathered} \omega_1 = \dot{\varphi}, \quad V_4 = \omega_1 r = \dot{\varphi} r, \quad \omega_2 = \frac{V_A}{O_2 A} = \frac{\dot{\varphi} r}{l}, \\ \omega_3 = \frac{V_B}{2R} = \frac{\omega_2 \cdot O_2 B}{2R} = \frac{\dot{\varphi} r}{3R}, \quad V_{C_3} = \omega_3 R = \frac{\dot{\varphi} r}{3}. \end{gathered} \tag{4}$$

После преобразований с учетом (2)-(4) и данных задачи, получаем

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 + m_4\right) r^2 \dot{\varphi}^2 = 0{,}05 \dot{\varphi}^2. \tag{5}$$

Определим потенциальную энергию $П = П(\varphi)$ системы как работу потенциальных сил (сил тяжести тел системы и силы упругости пружины) на перемещении системы из отклоненного положения в положение равновесия (рис. 1), считая, что отклонения малы и в положении равновесия системы при $\varphi = 0$ $П(0) = 0$:

$$П = -m_4 g h_4 - m_2 g h_2 + \frac{c}{2}\left(\lambda^2 - \lambda_{ст}^2\right), \tag{6}$$

где h_2, h_4 – вертикальные перемещения центров тяжести тел 2 и 4 соответственно; $\lambda_{ст}$ и λ – деформация пружины в равновесном и в отклоненном от равновесия положениях соответственно.

Выразим в (6/7) вертикальные перемещения h_4, h_2 центров тяжести однородных тел 4 и 2 и деформацию λ пружины через обобщенную координату φ, учитывая, что при стационарных связях малые перемещения точек и тел связаны теми же коэффициентами как их соответствующие скорости (4/5):

$$h_4 = \varphi r, \quad \varphi_2 = \frac{\varphi r}{O_2 A} = \frac{\varphi r}{l},$$
$$h_2 = \frac{l}{2}\left(1 - \cos\varphi_2\right) \approx \frac{l\varphi_2^2}{4} = \frac{r^2\varphi^2}{4l}, \tag{7}$$
$$\lambda = \lambda_{\text{ст}} + S_{C_3} = \lambda_{\text{ст}} + \frac{S_B}{2} = \lambda_{\text{ст}} + \frac{O_2 B \sin\varphi_2}{2} \approx$$
$$\approx \lambda_{\text{ст}} + \frac{l}{3}\varphi_2 = \lambda_{\text{ст}} + \frac{r}{3}\varphi.$$

В (7) использовались разложения в ряд по малому углу φ_2 с точность до φ_2^2: $\sin\varphi_2 \approx \varphi_2$, $\cos\varphi_2 \approx 1 - \varphi_2^2/2$.

С учетом (7/8) выражение (6/7) принимает вид

$$\Pi = -m_4 g\ \varphi r - m_2 g\ \frac{r^2\varphi^2}{4l} + \frac{c}{2}\left[\left(\lambda_{\text{ст}} + \frac{r}{3}\varphi\right)^2 - \lambda_{\text{ст}}^2\right]. \tag{8}$$

Вычислим обобщенную потенциальную силу

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = m_4 g\ r + m_2 g\ \frac{r^2}{2l}\varphi - c\left(\lambda_{\text{ст}} + \frac{r}{3}\varphi\right)\frac{r}{3}. \tag{9}$$

Статическую деформацию пружины $\lambda_{\text{ст}}$ определим из условия, что в положении равновесия при φ = 0 $Q^{\Pi} = 0$. Подставляя это условие в (9/10), находим уравнение равновесия

$$m_4 g\ r - c\lambda_{\text{ст}}\frac{r}{3} = 0.$$

Отсюда с учетом данных задачи, получим

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{3m_4 g}{c} \approx 0{,}037\,\text{м}. \tag{10}$$

Вычислим обобщенный коэффициент жесткости

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)\Big|_{\varphi=0} = \left(\frac{c}{9} - \frac{m_2 g}{2l}\right) r^2 = 1{,}45 > 0\,.$$

Поскольку для данных задачи он положителен, то потенциальная энергия в положении равновесия имеет минимум, и по теореме Лагранжа – Дирихле равновесие системы при $\varphi = 0$ является устойчивым.

Подставляя (10) в (9), находим окончательное выражение для обобщенной потенциальной силы

$$Q^{\Pi} = -\left(\frac{c}{9} - \frac{m_2 g}{2l}\right) r^2 \varphi = -1{,}45\varphi\ \text{Н} \cdot \text{м}. \tag{11}$$

Вычислим диссипативную функцию Рэлея

$$\Phi == \frac{1}{2}\mu V_{C_3}^2 = \frac{1}{2}\left(\mu\frac{r^2}{9}\right)\dot{\varphi}^2.$$

Тогда обобщенная диссипативная сила имеет вид

$$Q^{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} = -\mu \frac{r^2}{9} \dot{\varphi} = -0,1\dot{\varphi} . \qquad (12)$$

Обобщенную возмущающую силу определим через виртуальную работу возмущающего момента по формуле

$$Q(t) = \frac{\delta A_{M(t)}}{\delta \varphi} = 0,4\sin(15t) . \qquad (13)$$

С учетом (5), (11)-(13) приведем уравнение Лагранжа к канонической форме

$$\ddot{\varphi} + 2b\dot{\varphi} + k^2\varphi = H\sin(pt) , \qquad (14)$$

получаем дифференциальное уравнение малых вынужденных колебаний системы

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + 14,5\varphi = 4\sin(15t) . \qquad (15)$$

Сопоставляя (14) и (15), находим, что $b = 0,5$ с$^{-1}$, $k = 3,8$ с$^{-1}$, $H = 4$ рад. Так как $b < k$ (случай малого сопротивления), то решение уравнения (15) имеет вид

$$\varphi = Ae^{-bt}\sin\left(k^* t + \alpha\right) + D\sin(pt - \beta) , \qquad (16)$$

здесь собственная частота системы

$$k^* = \sqrt{k^2 - b^2} = 3,78 \text{ с}^{-1} . \qquad (17)$$

Амплитуду вынужденных колебаний определяем по формуле

$$D = \frac{H}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} = 0,019 \text{ рад} , \qquad (18)$$

Сдвиг фаз β между вынужденными колебаниями и возмущающим моментом $M(t)$ определяется по формуле

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2} = -0,071 \quad \text{и} \quad \beta = \mathrm{arctg}(-0,071) \approx -0,071 \text{ рад} . \qquad (19)$$

Тогда с учетом (17)-(19) закон малых колебаний системы (16) имеет вид

$$\varphi = Ae^{-0,5t}\sin\left(3,78t + \alpha\right) + D\sin(15t + 0,071) . \qquad (20)$$

Вычислим обобщенную скорость

$$\begin{aligned} \omega_1 = \dot{\varphi} = -0,5Ae^{-0,5t}\sin\left(3,78t + \alpha\right) + 3,78Ae^{-0,5t}\cos\left(3,78t + \alpha\right) + \\ + 0,019 \cdot 15 \cdot \cos(15t + 0,071). \end{aligned} \qquad (21)$$

Постоянные интегрирования A и α определяем подстановкой начальных условий движения системы $t = 0$ $\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0 = 0,1$ с$^{-1}$ в (20) и (21), получим

$$\begin{cases} A\sin\alpha = -0,00135; \\ A\cos\alpha = -0,049. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$A = 0,049; \qquad \mathrm{tg}\alpha = 0,028; \qquad \alpha \approx 0,028 \text{ рад.} \tag{22}$$

Подставляя (22) в (20), получаем уравнение малых колебаний рассматриваемой механической системы около положения устойчивого равновесия

$$\varphi = 0,049\ e^{-0,5t} \sin\left(3,78t + 0,028\right) + 0,019\ \sin(15t + 0,071) \text{ рад}. \tag{23}$$

Согласно (23) малые колебания механической системы являются сложными и складываются из собственных затухающих колебаний (первое слагаемое) и вынужденных колебаний (второе слагаемое).

На рис. 3 представлена найденная в (23) зависимость $\varphi(t)$.

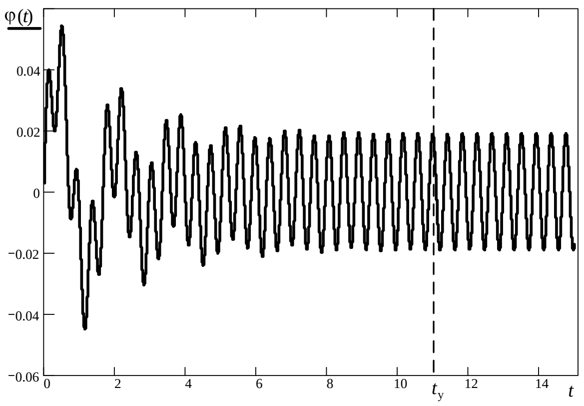

Рисунок 3

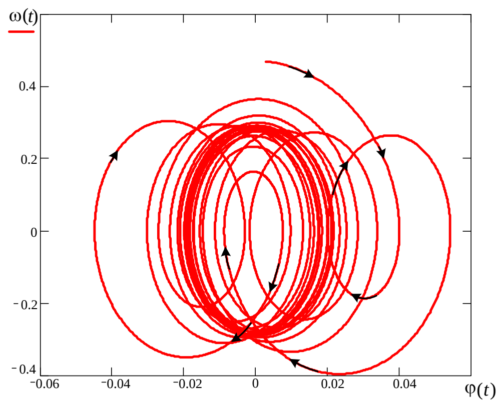

Рисунок 4

Из рис. 3 видно, что собственные колебания по истечении некоторого промежутка времени $t_у$, называемого временем установления, довольно быстро затухают, и характер колебаний системы будут определять только вынужденные колебания. Например, если собственными колебаниями в (23) можно пренебречь, то начиная с момента времени, когда их амплитуда станет меньше $0,01\,D$, то время установления $t_у$ можно определить из равенства $Ae^{-bt_у} = 0,01D$, откуда

$$t_у = \frac{1}{b}\ln\frac{100A}{D} \approx 11,1\text{с.}$$

При $t > t_у$ колебания системы носят гармонический характер, и их период τ определяется по формуле

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 0,42 \text{ с.}$$

Для наглядного представления о характере колебаний системы построим график фазовой траектории. Зависимость $\omega = f(\varphi)$ представлена на рис. 4.

Проведенные исследования показали, что амплитуда D вынужденных колебаний и сдвиг фазы β от начальных условий движения механической системы не зависит; вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления не затухают; частота и период вынужденных установившихся колебаний равны частоте и периоду обобщенной возмущающей силы и от характеристик колеблющейся системы не зависят; даже при больших значениях обобщенной возмущающей силы вынужденные колебания системы около положения устойчивого равновесия будут малыми, если частота этих колебаний p будет много больше собственной частоты k системы.