УДК 735.29.(32)

О ЗАДАЧЕ КОШИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Яковлев А.А.
Научный руководитель – профессор Цих А.К.

Сибирский федеральный университет

Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{*}$$

на функцию $u(x,t)$ можно ставить две задачи Коши, поскольку это уравнение одновременно разрешимо как относительно старшей производной t , так и относительно старшей производной по x . Соответствующие задачи Коши характеризуются следующими начальными данными

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{1}$$

либо

$$u(0,t) = \varphi(t),\ \ u_x{}'(0,t) = \psi(t). \tag{2}$$

При этом известно (по теореме Коши-Ковалевской), что вторая задача всегда локально аналитически разрешима при локально аналитических начальных данных $\varphi(t), \psi(t)$. Первая задача не всегда разрешима в классе аналитических функций.

Цель сообщения состоит в исследовании ситуации, когда в уравнении (*) добавляются производные меньших порядков:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \ b\ \frac{\partial u}{\partial x} - au. \tag{**}$$

Теорема. *Для любых $a, b\ \in \mathbb{C}$ задача Коши (1) для уравнения (**) не всегда разрешима в классе аналитических функций.*

Для доказательства строится разрешающий оператор $\varphi(x) \to u(x,t)$ для задачи (1) на языке коэффициентов Тейлора.

$$u_{ij} = \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{\infty} G_{jk}\,\frac{(i+2j-k)!}{i!}\,u_{i+2j-k,0} \tag{3}$$

где G_{jk} - коэффициенты Тейлора в $(x,t) = (0,0)$ для рациональной функции

$$\frac{1}{1 - x + bxy + axy^2}.$$

Подбираются начальные значения $u_{s,0}$ так, что построенные по (3) коэффициенты $u_{0,n}$ быстро растут: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_{0n}t^n$ имеет пустую область сходимости