УДК 519.145

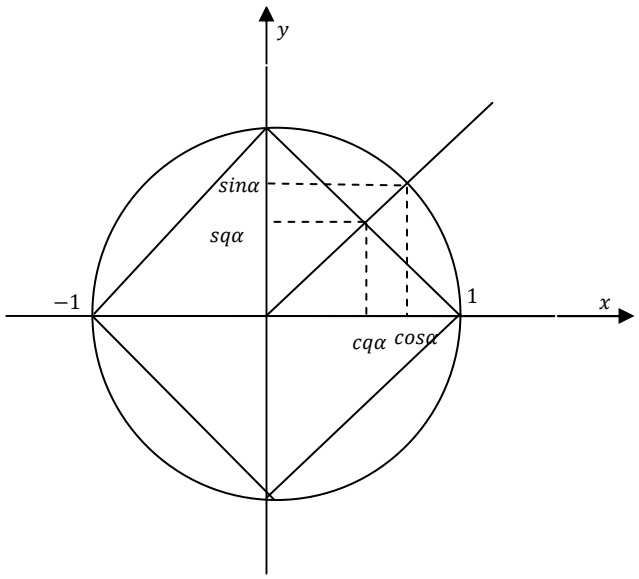
КВАЗИТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Додонова А.Е.

Научный руководитель– доцент Кравцова О.В.

Сибирский федеральный университет

Основные тригонометрические функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определяются как проекции точки на единичной окружности на ось ординат и абсцисс соответственно. В 1939 году румынский математик Алачи предложил рассматривать квадратичные тригонометрические функции. Впишем в единичную окружность квадрат с вершинами, лежащими на координатных осях, и проведемиз начала координат луч под углом α. Квадратичные синус и косинус этого угла Алачи определил как проекции точки пересечения луча и стороны квадрата на ось yи на ось x (см. рисунок).

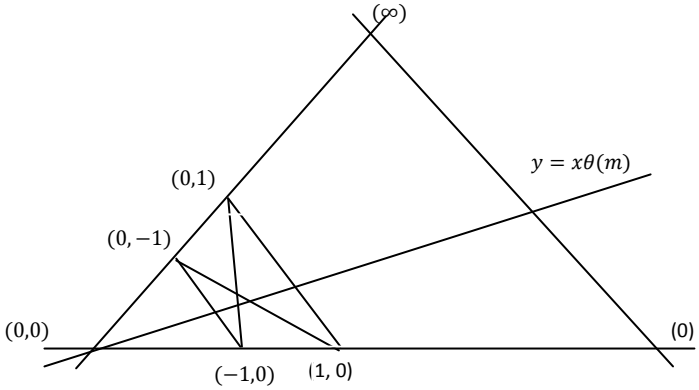


Используем идею Алачи для определения функций, подобных квадратичному косинусу и квадратичному синусу, в проективной плоскости.

Пусть W- линейное пространство над полем F размерности n. Координатами аффинных точек плоскости являются пары элементов $W: (x, y), x, y \in W$, точек на бесконечно удаленной прямой – элементы$W: (m)$, трансляционная точка обозначается символом (∞). Аналогичным образом обозначаются и прямые плоскости: $[m, k], [m], [\infty]$.

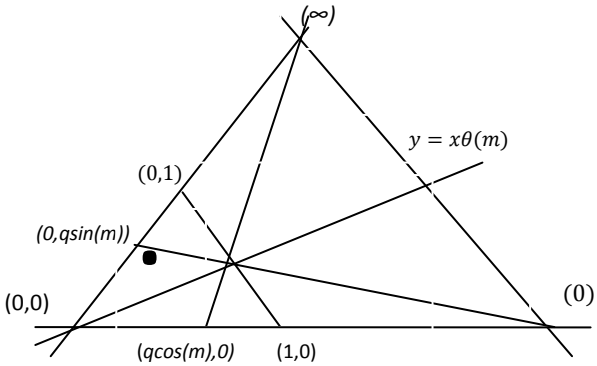
Пусть $R = \{\theta(m) | m \in W\}$ – множество матриц размерности $n \times n$ над полем F, причем R содержит нулевую и единичную матрицы, и все ненулевые матрицы – невырожденные. Тогда любая прямая, проходящая через (0,0), может быть задана уравнением вида $y = x\theta(m)$. Множество R называется регулярным множеством плоскости. Можно определить на W операцию умножения как $x * y = x \cdot$

$\theta(y)$. Нейтральным элементом по умножению в W является вектор $1 = (1,0,\dots,0)$, тогда $-1 = (-1,0,\dots,0)$. Рассмотрим на прямых [0, 0] и [0], соответствующих осям абсцисс и ординат, точки $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, и соединим их прямыми в том же порядке, что и для построения квадратичных функций.



Прямая $y = x\theta(m)$ (т.е. прямая $[\, m, 0\,]$), пересекает эти четыре прямые в некоторых точках A_1, A_2, A_3, A_4. Проектируя эти точки на координатные оси, мы получим значения «косинуса» и «синуса» построенного угла, соответствующие данной точке. Таким образом, для одной прямой получаем 4 различных пары функций.

Рассмотрим поле характеристики 2, тогда $-1 = 1$и прямой $[m, 0]$ соответствует только одна пара квазитригонометрических функций.



Формулы, определяющие квазикосинус и квазисинус при помощи умножения матриц, следующие:

$$qcos = 1 \cdot \theta^{-1}(m+1), qsin(m) = 1 \cdot \theta^{-1}(m+1) \cdot \theta(m).$$

Например, если W – двумерное пространство и R– поле, то

$$\theta(m) = \theta(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ bm_2 & m_1 + dm_2 \end{pmatrix}, m_1, m_2, b, d \in F,$$

$qcos(m) = qcos(m_1, m_2) =$

$$\left(\frac{m_1 + dm_2 + 1}{m_1^2 + 2m_1 + dm_1m_2 + dm_2 + 1 - bm_2^2}, \frac{-m_2}{m_1^2 + 2m_1 + dm_1m_2 + dm_2 + 1 - bm_2^2} \right)$$

$$qsin(m) = qsin(m_1, m_2) =$$

$$\left(\frac{m_1^2 + dm_1m_2 + m_1 - bm_2^2}{m_1^2 + 2m_1 + dm_1m_2 + dm_2 + 1 - bm_2^2}, \frac{m_2}{m_1^2 + 2m_1 + dm_1m_2 + dm_2 + 1 - bm_2^2}\right)$$

Для этих функций основное тригонометрическое тождество принимает вид:

$$\forall m \in W qcos(m) + qsin(m) = 1.$$

Для сравнения – в квадратичной тригонометрии

$$|cq\alpha| + |sq\alpha| = 1.$$

Если R – поле, т.е. плоскость дезаргова, то W – тоже поле и можно ввести квазитангенс и квазикотангенс по формулам:

$$qtg(m) = \frac{qsin(m)}{qcos(m)} = 1 \cdot \theta(m),$$

$$qctg(m) = \frac{qcos(m)}{qsin(m)} = \frac{1}{\theta(m)}.$$

Так какW–поле, то можно, используя операции умножения и деления в W, записывать функции в более простом виде:

$$qcos(m) = \frac{1}{m+1}, qsin(m) = \frac{m}{m+1}, qtg(m) = m, qctg(m) = \frac{1}{m}.$$

Формулы сложения в квазитригонометрии могут быть записаны в виде:

$$qcos(m+k) = \frac{qcos(m)qcos(k)}{qcos(m) + qsin(m)qcos(k)},$$

$$qsin(m+k) = \frac{qcos(k) + qcos(m)}{qcos(m) + qsin(m)qcos(k)},$$

$$qtg(m+k) = qtg(m) + qtg(k),$$

$$qctg(m+k) = \frac{1}{qtg(m) + qtg(k)}$$

(здесь умножение и деление рассматриваются как операции в поле W).

В настоящее время проводится вычисление характеристик нелинейности построенных функций. Рассматривается величина $\mu l(f)$ – наибольший порядок подмножества, на котором производная функции по направлению является постоянной.Понятие производной по направлению функции на линейном пространстве использовано в работах по криптоанализу А.А.Сальникова, О.А. Логачева и Н.Д. Подуфалова: разность $f_a^{'} = f(x+a) - f(x)$, где $a \in W$.