УДК 735.29.(32)

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ДВУМЕРНОГО БПФ ПО АНАЛОГУ КУЛИ-ТЬЮКИ

Старовойтов А.В., Тутатчиков В.С., Киселёв О.И.
Научный руководитель – профессор Носков М.В.

Сибирский федеральный университет

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) имеет несколько важных приложений благодаря тому, что существуют эффективные алгоритмы его вычисления, например, ДПФ можно использовать для спектрального анализа многомерных сигналов (космоснимки).

В работе рассмотрены алгоритмы вычисления ДПФ, значительно отличающиеся по своей вычислительной сложности: вычисление двумерного ДПФ методом разбиения на столбцы и строки, вычисляемые при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ), а также двумерное БПФ по аналогу с алгоритмом Кули-Тьюки.

Рассмотрим сигнал f, который является двумерным периодическим сигналом с периодом 2^s по первой и по второй координате. Отсчёты задаются, как $f_{k,t}$, где $k = 0{:}\,2^s, t = 0{:}\,2^s$.

Дискретное преобразование Фурье для данного сигнала f задаётся формулой

$$F_{l,m} = \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^s-1} f_{k,t} e^{\frac{2\pi ilk}{2^s}} e^{\frac{2\pi imt}{2^s}}.$$

Двумерное ДПФ Фурье можно вычислить при помощи одномерных ДПФ. Для этого вычисляют F в следующем виде:

$$F_{l,m} = \sum_{k=0}^{2^s-1} \left[\sum_{t=0}^{2^s-1} f_{k,t} e^{\frac{2\pi imt}{2^s}} \right] e^{\frac{2\pi ilk}{2^s}}.$$

Суммы в квадратных скобках представляют собой одномерные вычисления ДПФ по строкам исходного сигнала f. Преобразуем данную формулу:

$$F_{l,m} = \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^s-1} f_{k,t} e^{\frac{2\pi i(lk2+mt)}{2^s}}$$

$$= \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^{s-1}-1} f_{k,2t} e^{\frac{2\pi i(lk+mt)}{2^s}} + \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^{s-1}-1} f_{k,2(t+1)} e^{\frac{2\pi i(lk+mt)}{2^s}} e^{\frac{\pi im}{2^s}},$$

Где $l, m = 0{:}\,2^s - 1$.

Сумма

$$\sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^{s-1}-1} f_{k,2t} e^{\frac{2\pi i(lk+mt)}{2^s}}$$

является двумерным ДПФ сигнала $\widetilde{f_{k,t}} = f_{k,2t}$, то есть сигнала, полученного прореживанием исходного сигнала $f_{k,t}$ по чётным отсчётам второй переменной; обозначим данной ДПФ через $F'_{l,m}$. Аналогично видно, что сумма

$$\sum_{k=0}^{2^s-1}\sum_{t=0}^{2^{s-1}-1} f_{k,2t+1}e^{\frac{2\pi i(lk+mt)}{2^s}}$$

является ДПФ сигнала $\widetilde{\widetilde{f_{k,t}}} = f_{k,2t+1}$, полученного из исходного сигнала прореживание по нечётным отсчётам второй переменной; обозначим данное ДПФ, как $F''_{l,m}$.

Таким образом, нахождение двумерного дискретного преобразования Фурье сигнала $f_{k,t}$ можно реализовать по следующему алгоритму:

1) Нахождение спектра F' сигнала $\tilde{f}$, где $\widetilde{f_{k,t}} = f_{k,2t}$.
2) Нахождение спектра F'' $\tilde{\tilde{f}}$, где $\widetilde{\widetilde{f_{k,t}}} = f_{k,2t+1}$.
3) Вычисление отсчётов спектра

$F_{l,m} = F'_{l,m} + e^{\frac{\pi i m}{2^s}} F''_{l,m}, F_{l,2^s+m} = F'_{l,m} - e^{\frac{\pi i m}{2^s}} F''_{l,m}$, где $l, m \in 0: 2^s - 1$.

Для тестирования алгоритма была написана программа на языке программирования C++ с использованием библиотеки MPI.

Тестирование проводилось на персональном компьютере с характеристиками:

- Процессор: Intel Core 2 Duo CPU T8100 2.1 GHz;
- Оперативная память: 2 Гб;
- Операционная система: Windows XP Service Pack 3.

Время работы двумерного БПФ в миллисекундах:

размер	последовательный		параллельный	
	БПФ2 по строчкам и столбцам	БПФ2 по аналогу Кули-Тьюки	БПФ2 по строчкам и столбцам	БПФ2 по аналогу Кули-Тьюки
1024	235	187	172	172
2048	1125	797	750	641
4096	4219	3485	2797	2547
8192	19797	14937	12485	10203

Вывод: в целом, модифицированный алгоритм по аналогу Кули-Тьюки даёт выигрыш в скорости около 15%.