УДК 621.313.39: 681.5.015: 004.421.6

КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ СОЗДАНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С ПОСТОЯННЫМИ МАГНИТАМИ

Солтыс О.О., Канайкина Ю.Г.
Научный руководитель — профессор Бронов С.А.

Сибирский федеральный университет

Синхронные двигатели с постоянными магнитами (СДПМ) остаются одним из самых распространённых классов электрических машин, используемых в космической технике, роботах, станках и других технических приложениях. Они всё более заменяют собой двигатели постоянного тока. Это связано с развитием мехатроники, базовым принципом которой является тесная интеграция электродвигателей, датчиков, силовой электроники и микропроцессорных средств управления. При этом обеспечивается комплекс характеристик электропривода, существенно отличающихся от характеристик отдельного двигателя. Чтобы обеспечить это, необходимо использовать математические модели СДПМ. В литературе приводятся такие модели, но лишь для некоторых наиболее распространённых режимов работы, принятых допущений, форм записи. В то же время, часто требуются иные модели, которые сложно каждый раз разрабатывать вручную.

В настоящее время для разработки математических моделей в аналитической форме можно использовать универсальные математические пакеты программ типа MathCAD, Matlab, Maple и др. Этому способствует также хорошая проработка методики получения математических моделей электромеханических устройств в разных системах координат, с разным числом фаз, при различных допущениях.

В основе автоматизированной методики получения математических моделей СДПМ лежат уравнения электрического равновесия, уравнения связи между токами и потокосцеплениями обмоток и потокосцеплений от постоянных магнитов.

Математическая модель СДПМ может быть представлена различным образом — в виде системы алгебро-дифференциальных уравнений со смешанными переменными состояния (токами и потокосцеплениями), с переменными состояния в виде только потокосцеплений и с переменными состояния в виде только токов.

Обобщённый алгоритм получения математических моделей СДПМ выглядит следующим образом (на примере двухфазного СДПМ).

1. Задание векторов и матриц (токи, напряжения, потокосцепления обмоток, потокосцепления от постоянных магнитов ротора, матрица активных сопротивлений, матрица индуктивностей в общем виде):

$$I_{ab} := \begin{pmatrix} i_{1a} \\ i_{1b} \end{pmatrix} \quad U_{ab} := \begin{pmatrix} u_{1a} \\ u_{1b} \end{pmatrix} \quad \Psi_{ab} := \begin{pmatrix} \psi_{1a} \\ \psi_{1b} \end{pmatrix} \quad \Psi_{\mu ab} := \begin{pmatrix} \psi_{\mu 1a} \\ \psi_{\mu 1b} \end{pmatrix} \quad R_{ab} := \begin{pmatrix} R_{1a} & 0 \\ 0 & R_{1b} \end{pmatrix} \quad L_{ab} := \begin{pmatrix} l_{1a1a} & l_{1a1b} \\ l_{1a1b} & l_{1b1b} \end{pmatrix}$$

2. Определение уравнений электрического равновесия со смешанными переменными состояния (токами и потокосцеплениями):

$$d\Psi_{ab} := -R_{ab} \cdot I_{ab} + U_{ab} \rightarrow \begin{bmatrix} (-R_{1a}) \cdot i_{1a} + u_{1a} \\ (-R_{1b}) \cdot i_{1b} + u_{1b} \end{bmatrix}$$

3. Определение электромагнитного момента:

3.1 подготовка выражений потокосцеплений к дифференцированию по углу поворота:

$$\Psi_{\theta ab} := \Psi_{iab} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, l_{1a1a} = l_{1a1a}(\theta_r) \\ \text{substitute}, l_{1b1b} = l_{1b1b}(\theta_r) \\ \text{substitute}, l_{1a1b} = l_{1a1b}(\theta_r) \\ \text{substitute}, l_{1b1a} = l_{1b1a}(\theta_r) \\ \text{substitute}, \psi_{\mu 1a} = \psi_{\mu 1a}(\theta_r) \\ \text{substitute}, \psi_{\mu 1b} = \psi_{\mu 1b}(\theta_r) \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} l_{1a1a}(\theta_r)\cdot i_{1a} + l_{1a1b}(\theta_r)\cdot i_{1b} + \psi_{\mu 1a}(\theta_r) \\ l_{1a1b}(\theta_r)\cdot i_{1a} + l_{1b1b}(\theta_r)\cdot i_{1b} + \psi_{\mu 1b}(\theta_r) \end{pmatrix}$$

3.2 дифференцирование потокосцеплений по углу поворота:

$$d\Psi_{\theta ab} := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..1 \\ \quad d\Psi_{ab_k} \leftarrow \frac{d}{d\theta_r}\Psi_{\theta ab_k} \\ d\Psi_{ab} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{d\theta_r} l_{1a1a}(\theta_r)\cdot i_{1a} + \frac{d}{d\theta_r} l_{1a1b}(\theta_r)\cdot i_{1b} + \frac{d}{d\theta_r}\psi_{\mu 1a}(\theta_r) \\ \frac{d}{d\theta_r} l_{1a1b}(\theta_r)\cdot i_{1a} + \frac{d}{d\theta_r} l_{1b1b}(\theta_r)\cdot i_{1b} + \frac{d}{d\theta_r}\psi_{\mu 1b}(\theta_r) \end{pmatrix}$$

3.3 электромагнитный момент:

$$M_{\theta ab} := d\Psi_{\theta ab}^{T}\cdot I_{ab} \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{d}{d\theta_r} l_{1a1a}(\theta_r)\cdot i_{1a}^2 + 2\cdot i_{1a}\frac{d}{d\theta_r} l_{1a1b}(\theta_r)\cdot i_{1b} + i_{1a}\frac{d}{d\theta_r}\psi_{\mu 1a}(\theta_r) + \frac{d}{d\theta_r} l_{1b1b}(\theta_r)\cdot i_{1b}^2 + i_{1b}\frac{d}{d\theta_r}\psi_{\mu 1b}(\theta_r)$$

4. Выражение токов через потокосцепления:

$$I_{\psi ab} := L_{ab}^{-1}\cdot(\Psi_{ab} - \Psi_{\mu ab}) \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, \left(l_{1a1a}\cdot l_{1b1b} - l_{1a1b}^2\right) = L_\Sigma \\ \text{substitute}, (-l_{1a1a})\cdot l_{1b1b} + l_{1a1b}^2 = -L_\Sigma \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{l_{1b1b}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1a} - \psi_{\mu 1a}) - \frac{l_{1a1b}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1b} - \psi_{\mu 1b}) \\ \frac{-l_{1a1b}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1a} - \psi_{\mu 1a}) + \frac{l_{1a1a}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1b} - \psi_{\mu 1b}) \end{bmatrix}$$

5. Преобразование уравнений электрического равновесия к единым переменным состояния (потокосцеплениям):

$$d\Psi_{a.b} := -R_{ab}\cdot I_{ab} + U_{ab} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, i_{1a} = I_{\psi ab_0} \\ \text{substitute}, i_{1b} = I_{\psi ab_1} \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} (-R_{1a})\left[\frac{l_{1b1b}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1a} - \psi_{\mu 1a}) - \frac{l_{1a1b}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1b} - \psi_{\mu 1b})\right] + u_{1a} \\ (-R_{1b})\left[\frac{-l_{1a1b}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1a} - \psi_{\mu 1a}) + \frac{l_{1a1a}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1b} - \psi_{\mu 1b})\right] + u_{1b} \end{bmatrix}$$

6. Преобразование электромагнитного момента к единым переменным состояния (потокосцеплениям):

6.1 общее выражение электромагнитного момента:

$$M_{\psi ab} := M_{\theta ab} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, i_{1a} = I_{ab_0} \\ \text{substitute}, i_{1b} = I_{ab_1} \\ \text{substitute}, \psi_{1a} - \psi_{\mu 1a} = \psi_{1a\mu} \\ \text{substitute}, \psi_{1b} - \psi_{\mu 1b} = \psi_{1b\mu} \end{array} \right. \rightarrow \frac{d}{d\theta_r} l_{1a1a}(\theta_r)\cdot i_{1a}^2 + 2\cdot i_{1a}\frac{d}{d\theta_r} l_{1a1b}(\theta_r)\cdot i_{1b} + i_{1a}\frac{d}{d\theta_r}\psi_{\mu 1a}(\theta_r) + \frac{d}{d\theta_r} l_{1b1b}(\theta_r)\cdot i_{1b}^2 + i_{1b}\frac{d}{d\theta_r}\psi_{\mu 1b}(\theta_r)$$

6.2 активная составляющая электромагнитного момента (от постоянных магнитов):

$$M_{\psi\mu} := M_{\psi ab} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, l_{1a1a}(\theta_r) = l_{1a1a} \\ \text{substitute}, l_{1b1b}(\theta_r) = l_{1b1b} \\ \text{substitute}, l_{1a1b}(\theta_r) = l_{1a1b} \\ \text{substitute}, i_{1a} = I_{\psi ab_0} \\ \text{substitute}, i_{1b} = I_{\psi ab_1} \end{array} \right. \rightarrow \left[\frac{l_{1b1b}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1a} - \psi_{\mu 1a}) - \frac{l_{1a1b}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1b} - \psi_{\mu 1b})\right]\frac{d}{d\theta_r}\psi_{\mu 1a}(\theta_r) + \left[\frac{-l_{1a1b}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1a} - \psi_{\mu 1a}) + \frac{l_{1a1a}}{L_\Sigma}\cdot(\psi_{1b} - \psi_{\mu 1b})\right]\frac{d}{d\theta_r}\psi_{\mu 1b}(\theta_r)$$

6.3 реактивная составляющая электромагнитного момента от индуктивностей:

$$M_{\psi L}\left|\begin{array}{l} \text{substitute}, \frac{d}{d\theta_r}\psi_{\mu 1a}(\theta_r) = d\psi_{\mu 1a} \\ \text{substitute}, \frac{d}{d\theta_r}\psi_{\mu 1b}(\theta_r) = \psi_{\mu 1b} \\ \text{substitute}, \frac{d}{d\theta_r}l_{1a1a}(\theta_r) = dl_{1a1a} \\ \text{substitute}, \frac{d}{d\theta_r}l_{1b1b}(\theta_r) = dl_{1b1b} \\ \text{substitute}, \frac{d}{d\theta_r}l_{1a1b}(\theta_r) = dl_{1a1b} \end{array}\right. \rightarrow dl_{1a1a} \cdot i_{1a}^2 + 2 \cdot i_{1a} \cdot dl_{1a1b} \cdot i_{1b} + i_{1a} \cdot d\psi_{\mu 1a} + dl_{1b1b} \cdot i_{1b}^2 + i_{1b} \cdot \psi_{\mu 1b} - \left[\frac{l_{1b1b}}{L_\Sigma} \cdot (\psi_{1a} - \psi_{\mu 1a}) - \frac{l_{1a1b}}{L_\Sigma} \cdot (\psi_{1b} - \psi_{\mu 1b})\right] \cdot d\psi_{\mu 1a} - \left[\frac{-l_{1a1b}}{L_\Sigma} \cdot (\psi_{1a} - \psi_{\mu 1a}) + \frac{l_{1a1a}}{L_\Sigma} \cdot (\psi_{1b} - \psi_{\mu 1b})\right] \cdot \psi_{\mu 1b}$$

Идеализация параметров позволяет конкретизировать математическую модель, переходя от обобщённых выражений к таким, которые можно использовать в расчётах.

Идеализация, как правило, включает три составляющих:

1) задание конкретных функций изменения индуктивностей и потокосцеплений (косинусоид):

$$l_{ab} := l_{ab}\left|\begin{array}{l} \text{substitute}, l_{1a.1a} = L_{1a.1a} + L_{m1a.1a} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) \\ \text{substitute}, l_{1b.1b} = L_{1b.1b} + L_{m1b.1b} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) \\ \text{substitute}, l_{1a.1b} = L_{1a.1b} \cdot \cos(p_\mu \cdot \theta_{1a.1b}) + L_{m1a.1b} \cdot \cos\left[2 \cdot \left(p_\mu \cdot \theta_r + \frac{\theta_{1a.1b}}{2}\right)\right] \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} L_{1a.1a} + L_{m1a.1a} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) & L_{1a.1b} \cdot \cos(p_\mu \cdot \theta_{1a.1b}) + L_{m1a.1b} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r + \theta_{1a.1b}) \\ L_{1a.1b} \cdot \cos(p_\mu \cdot \theta_{1a.1b}) + L_{m1a.1b} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r + \theta_{1a.1b}) & L_{1b.1b} + L_{m1b.1b} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) \end{pmatrix}$$

$$\psi_{\mu ab} := \psi_{\mu ab}\left|\begin{array}{l} \text{substitute}, \psi_{\mu 1a} = \Psi_{\mu 1a} \cdot \cos(p_\mu \cdot \theta_r) \\ \text{substitute}, \psi_{\mu 1b} = \Psi_{\mu 1a} \cdot \cos[p_\mu \cdot (\theta_r - \theta_{1a.1b})] \end{array}\right. \rightarrow \begin{bmatrix} \Psi_{\mu 1a} \cdot \cos(p_\mu \cdot \theta_r) \\ \Psi_{\mu 1a} \cdot \cos[p_\mu \cdot (\theta_r - \theta_{1a.1b})] \end{bmatrix}$$

2) допущение о геометрической симметрии (размещение обмоток и постоянных магнитов со сдвигом ровно 90°):

$$l_{ab} := l_{ab} \text{ substitute}, \theta_{1a.1b} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{pmatrix} L_{1a.1a} + L_{m1a.1a} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) & L_{1a.1b} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot p_\mu \cdot \pi\right) - L_{m1a.1b} \cdot \sin(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) \\ L_{1a.1b} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot p_\mu \cdot \pi\right) - L_{m1a.1b} \cdot \sin(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) & L_{1b.1b} + L_{m1b.1b} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) \end{pmatrix}$$

$$\psi_{\mu ab} := \psi_{\mu ab} \text{ substitute}, \theta_{1a.1b} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{bmatrix} \Psi_{\mu 1a} \cdot \cos(p_\mu \cdot \theta_r) \\ \Psi_{\mu 1a} \cdot \cos\left[p_\mu \cdot \left(\theta_r - \frac{1}{2} \cdot \pi\right)\right] \end{bmatrix}$$

3) допущение об электрической симметрии (равенстве параметров потокосцеплений от постоянных магнитов, активных сопротивлений и индуктивностей:

$$\psi_{\mu ab} := \psi_{\mu ab}\left|\begin{array}{l} \text{substitute}, \Psi_{\mu 1a} = \Psi_{\mu 1} \\ \text{substitute}, \Psi_{\mu 1b} = \Psi_{\mu 1} \end{array}\right. \rightarrow \begin{bmatrix} \Psi_{\mu 1} \cdot \cos(p_\mu \cdot \theta_r) \\ \Psi_{\mu 1} \cdot \cos\left[p_\mu \cdot \left(\theta_r - \frac{1}{2} \cdot \pi\right)\right] \end{bmatrix} \qquad R_{ab} := R_{ab}\left|\begin{array}{l} \text{substitute}, R_{1a} = R_1 \\ \text{substitute}, R_{1b} = R_1 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}$$

$$l_{ab} := l_{ab}\left|\begin{array}{l} \text{substitute}, L_{1a.1a} = L_1 \\ \text{substitute}, L_{1b.1b} = L_1 \\ \text{substitute}, L_{1a.1b} = L_1 \\ \text{substitute}, L_{m1a.1a} = L_{1m} \\ \text{substitute}, L_{m1b.1b} = L_{1m} \\ \text{substitute}, L_{m1a.1b} = L_{1m} \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} L_1 + L_{1m} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) & L_1 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot p_\mu \cdot \pi\right) - L_{1m} \cdot \sin(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) \\ L_1 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot p_\mu \cdot \pi\right) - L_{1m} \cdot \sin(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) & L_1 + L_{1m} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r) \end{pmatrix}$$

Это позволяет получить аналитические модели в форме, пригодной для расчётов.

Полные потокосцепления обмоток:

$$\Psi ab := l_{ab} \cdot i_{ab} + \psi_{\mu ab} \rightarrow \begin{bmatrix} (L_1 + L_{1m} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r)) \cdot i_{1a} + \left(L_1 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot p_\mu \cdot \pi\right) - L_{1m} \cdot \sin(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r)\right) \cdot i_{1b} + \Psi_{\mu 1} \cdot \cos(p_\mu \cdot \theta_r) \\ \left(L_1 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot p_\mu \cdot \pi\right) - L_{1m} \cdot \sin(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r)\right) \cdot i_{1a} + (L_1 + L_{1m} \cdot \cos(2 \cdot p_\mu \cdot \theta_r)) \cdot i_{1b} + \Psi_{\mu 1} \cdot \cos\left[p_\mu \cdot \left(\theta_r - \frac{1}{2} \cdot \pi\right)\right] \end{bmatrix}$$

Электромагнитная энергия:

$$W_{ab} := \frac{1}{2} \cdot \left(\Psi ab^T \cdot i_{ab}\right)$$

Электромагнитный момент:

$$M_{ab} := \frac{d}{d\theta_r} W_{ab} \left| \begin{matrix} \text{collect}, L_{1m}, \sin(2\cdot\theta_r\cdot p_\mu) \\ \text{collect}, p_\mu, \Psi_{\mu 1} \end{matrix} \right. \rightarrow \left[\left[\frac{-1}{2}\cdot\sin(p_\mu\cdot\theta_r)\cdot i_{1a} - \frac{1}{2}\cdot\sin\left[p_\mu\cdot\left(\theta_r - \frac{1}{2}\cdot\pi\right)\right]\cdot i_{1b}\right]\cdot\Psi_{\mu 1} + \left[\left[\left(-i_{1a}^2\right) - i_{1b}^2\right]\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) - 2\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot i_{1b}\cdot i_{1a}\right]\cdot L_{1m}\right]\cdot p_\mu$$

Для получения выражений через потокосцепления, необходимо исключить из них токи, выразив их через потокосцепления:

$$I_{\psi ab} := l_{ab}^{-1}\cdot(\psi_{ab} - \psi_{\mu ab})$$

$$I_{\psi ab} := I_{\psi ab}\ \text{simplify} \rightarrow \left[\begin{matrix} -\frac{\left[(-L_1)\cdot\psi_{1a} + L_1\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos(p_\mu\cdot\theta_r) - L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\psi_{1a} + L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos(p_\mu\cdot\theta_r) \ldots + L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot\psi_{1b} - L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\left[(-2)\cdot\theta_r + \pi\right]\right] - L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\psi_{1b} + L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\left[(-2)\cdot\theta_r + \pi\right]\right]\right]}{L_1^2 + 2\cdot L_1\cdot L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) + 2\cdot L \ldots {}_{1m}^2\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)^2 - L_1^2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)^2 + 2\cdot L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) - L_{1m}^2} \\ -\frac{\left[L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot\psi_{1a} - L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos(p_\mu\cdot\theta_r) - L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\psi_{1a} + L_{1m}\cdot\sin \ldots (2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos(p_\mu\cdot\theta_r) - L_1\cdot\psi_{1b} + L_1\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\left[(-2)\cdot\theta_r + \pi\right]\right] - L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\psi_{1b} + L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\left[(-2)\cdot\theta_r + \pi\right]\right]\right]}{L_1^2 + 2\cdot L_1\cdot L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) + 2\cdot L \ldots {}_{1m}^2\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)^2 - L_1^2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)^2 + 2\cdot L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) - L_{1m}^2} \end{matrix}\right]$$

Тогда уравнения электрического равновесия:

$$d\Psi_{ab} := -R_{ab}\cdot i_{ab} + u_{ab} \left| \begin{matrix} \text{substitute}, i_{ab_1} = I_{\psi ab_1} \\ \text{substitute}, i_{ab_2} = I_{\psi ab_2} \\ \text{simplify} \end{matrix} \right. \rightarrow \left[\begin{matrix} \frac{(-R_1)\cdot L_1\cdot\psi_{1a} + R_1\cdot L_1\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos(p_\mu\cdot\theta_r) - R_1\cdot L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\psi_{1a} \ldots}{\ldots} \\ \frac{R_1\cdot L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot\psi_{1a} - R_1\cdot L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos(p_\mu\cdot\theta_r) - \ldots}{\ldots} \end{matrix}\right. \rightarrow$$

$$\frac{R_1\cdot L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos(p_\mu\cdot\theta_r) + R_1\cdot L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot\psi_{1b} - R_1\cdot L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\left[(-2)\cdot\theta_r + \pi\right]\right] - R \ldots}{L_1^2 + 2\cdot L_1\cdot L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) + 2\cdot L_{1m}^2\cdot\cos(2 \ldots}$$

$$\frac{{}_1\cdot L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\psi_{1a} + R_1\cdot L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos(p_\mu\cdot\theta_r) - R_1\cdot L_1\cdot\psi_{1b} + R_1\cdot L_1\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\left[(-2)\cdot\theta_r + \pi\right]\right] - R_1\cdot L \ldots}{L_1^2 + 2\cdot L_1\cdot L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) + 2\cdot L_{1m}^2\cdot\cos(2 \ldots} \rightarrow$$

$$\frac{R_1\cdot L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\psi_{1b} + R_1\cdot L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\left[(-2)\cdot\theta_r + \pi\right]\right] + u_{1a}\cdot L_1^2 + 2\cdot u_{1a}\cdot L_1\cdot L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) + 2\cdot \ldots}{2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)^2 - L_1^2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)^2 + 2\cdot L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) - L_{1m}^2}$$

$$\frac{L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\psi_{1b} + R_1\cdot L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)\cdot\Psi_{\mu 1}\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\left[(-2)\cdot\theta_r + \pi\right]\right] + u_{1b}\cdot L_1^2 + 2\cdot u_{1b}\cdot L_1\cdot L_{1m}\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) + 2\cdot u \ldots}{2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)^2 - L_1^2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)^2 + 2\cdot L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) - L_{1m}^2} \rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{\cdot u_{1a}\cdot L_{1m}^2\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)^2 - u_{1a}\cdot L_1^2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)^2 + 2\cdot u_{1a}\cdot L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) - u_{1a}\cdot L_{1m}^2}{} \\ \frac{{}_{1b}\cdot L_{1m}^2\cdot\cos(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r)^2 - u_{1b}\cdot L_1^2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)^2 + 2\cdot u_{1b}\cdot L_1\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot p_\mu\cdot\pi\right)\cdot L_{1m}\cdot\sin(2\cdot p_\mu\cdot\theta_r) - u_{1b}\cdot L_{1m}^2}{} \end{matrix}\right]$$

Даже для двухфазного СДПМ получаются весьма громоздкие выражения, которые сложно получать вручную. Автоматизированное получение гарантирует от ошибок и позволяет исследователю сосредоточиться на использовании моделей, а не на утомительных элементарных выкладках. В настоящее время получены также модели для трёхфазного СДПМ — в собственных и в единой системах координат обмоток, с преобразованием трёхфазной модели к двухфазной и наоборот, при различных допущениях и переменных состояния (токах, потокосцеплениях).