УДК 735.29.(32)

КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРОВ

Неустроева С.В.

Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Кибардин В.В.

Сибирский федеральный университет

Рассмотрим систему, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f[x(t), u(t), z(t)], \qquad (1)$$
$$x(t_0) = x_0; \quad x(t_к) = x_к;$$

где x - n- мерный вектор состояний; u - m- мерный вектор управления; z - l- мерный вектор возмущений; f - аналитическая векторная функция.

Предполагается, что начальные состояния $x(t_0)$ известны. Решение задачи управления состоит в выборе таких траекторий управления u(t) на интервале $t_0 \le t \le t_k$, чтобы система, описываемая уравнением (1), изменяла свое состояние наилучшим образом. При этом конечный момент времени t_k может быть фиксированным или произвольным. Например, если на систему, находящуюся в устойчивом состоянии, действует какое-либо возмущение, в результате которого система переходит в другое состояние, то желаемое изменение координат системы определяется выбором такого вектора управления u, чтобы некоторая функция состояния системы и управления - к р и т е р и й о п т и м а л ь н о с т и - вдоль траектории принимала экстремальное значение.

Один из возможных путей состоит в выборе такого вектора u, который минимизировал бы функционал

$$J = G[x(t_k), t_k] + \int_{t_0}^{t_k} f_0\,[x(t), u(t), t]\,dt \cdot \qquad (2)$$

В этом выражении *G* и f_0 - обычно скалярные, нелинейные функции. Составляющая *G* обеспечивает в конечный (терминальный) момент времени t_k приближение состояния системы $x(t_k)$ к некоторому требуемому состоянию и называется терминальной частью. В тоже время использование интегральных зависимостей приводит к тому, что внутри интервала управления не используются чрезмерные управляющие воздействия и отсутствуют значительные отклонения от требуемых траекторий, которым должна следовать система. Функционал (2) называется классическим, а решаемая задача - задачей Больца. Если терминальная часть равна нулю, то задача Лагранжа. Если подинтегральная функция равна нулю, то задача Майера.

Не обосновывая выбор критериев оптимальности, укажем некоторые их типы в зависимости от принадлежности к переходному или установившемуся режиму работы объектов и систем управления.

В качестве критерия оптимальности может быть принято время переходного процесса

$$J1 = \int_{t_0}^{t_k} 1\,dt = t_k - t_0 = T \to \min \qquad (3)$$

и система обладает максимальным быстродействием.

При управлении от источников ограниченной мощности можно использовать функционал

$$J2 = \int_{t_0}^{t_k} u(t) \cdot i(t)\ dt \to \min . \tag{4}$$

Система является оптимальной по расходу энергии на управление.

Критерии (3) и (4) являются противоречивыми, так как для своей реализации требуют источников бесконечно большой и бесконечно малой мощности, соответственно. Следовательно, требуется найти закон регулирования, удовлетворяющий наилучшим образом двум или более противоречивым критериям. Необходимо определить компромисное управление $u_k(t)$, которое по возможности лучше удовлетворяло бы двум противоречивым критериям качества $J1$ и $J2$. При этом на управление и переменные состояния наложены ограничения общего вида. Для выработки стратегии управления предварительно рассчитывают оптимальные управляющие воздействия u_1^* и u_2^*, обеспечивающие, при принятых ограничениях, экстремум функционалам $J1 = J1^*$ и $J2 = J2^*$. Их находят методами вариационного исчисления. Для решения поставленной задачи составляют функционал

$$J = \alpha \left| (J1 - J_1^*)/J1^* \right| + \beta \left| (J2 - J2^*)/J2^* \right| , \tag{5}$$

где α и β - весовые коэффициенты, определяемые стратегией управления. В функционале (5) при коэффициентах α и β стоят абсолютные значения величин. Это вызвано тем, что функционалы $J1^*$ и $J2^*$ могут достигать в точке экстремума либо максимум, либо минимум, а разности могут быть и положительными, и отрицательными.

В качестве критерия оптимальности могут быть применены известные в теории автоматического управления интегральные оценки качества переходного процесса. При использовании квадратичной интегральной оценки система будет оптимальной, если обеспечивается минимум интеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_k} \varepsilon^2(t)\ dt \to min, \tag{6}$$

где $\varepsilon(t)$ - отклонение выходной величины от заданного значения.

Лучший результат по показателям перерегулирование, колебательность, время регулирования дает критерий

$$J = \int_{t_0}^{t_k} t \cdot \varepsilon^2(t)\ dt \to min . \tag{7}$$

В практике проектирования систем управления электромеханическими объектами широко распространены обобщённые интегральные критерии (интегральные критерии от квадратичных форм)

$$J = \int_{t_0}^{t_k} [\, x^2 + \gamma_1 (dx/dt)^2 + \ldots + \gamma_{n-1} (d^{n-1}x/dt^{n-1})^2 \,]\ dt \to min, \tag{8}$$

где x - выходная переменная; γ_i - весовые коэффициенты при квадратах производных i - го порядка от выходной координаты.

Первое слогаемое в (8) запрещает длительное существование отклонения x от заданного, а последующие - длительное существование больших производных. Поэтому минимуму интеграла (8) соответствуют достаточно быстрые и плавные переходные процессы. Имея дифференциальное уравнение замкнутой системы и задавая весовые коэффициенты, можно вычислить оптимальное значение функционала (8). Можно решить и обратную задачу.

Если математическая модель объекта представлена в пространстве состояний

$$dx/dt = Ax + Bu, \qquad (9)$$

где x - n-мерный вектор переменных состояния; u - m-мерный вектор управления; A и B - матрицы размерностью [n×n] и [n×m], соответственно, то функционал качества имеет вид

$$J = 0{,}5\int_{t_0}^{t_k}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i^2 + \sum_{j=1}^{m} r_j u_j^2\right) dt,$$

или в квадратичной форме

$$J = 0{,}5\int_{t_0}^{t_k}(x^T Q\ x + u^T R\ u)\ dt + x^T(t_k)F_k x(t_k). \qquad (10)$$

Здесь Q и R - симметричные положительно определённые матрицы размерностью [n×n] и [m×m], соответственно; F_k - неотрицательно определённая матрица размерностью [n×n]. Требуется найти такой вектор управления u, чтобы функционал (14) принимал минимальное значение. Эта задача получила название аналитического конструирования оптимального регулятора. От весовых коэффициентов q_i и r_j зависят ограничения соответствующих координат. Если какой либо коэффициент равен нулю, то соответствующая координата никаких ограничений не имеет.

Смысл критерия (14) можно пояснить следующим образом: выражение

$$\int_{t_0}^{t_k}(x^T Q\ x\ dt$$

является нормой ||x|| вектора x, т.е. мерой его колебательности в процессе регулирования; выражение

$$\int_{t_0}^{t_k} u^T R\ u\ dt$$

является мерой количества энергии, используемой для управления; выражение

$$x_k^T F_k x_1$$

характеризует норму $||x_k||$ вектора x_k , т.е. отклонение от установившегося значения на конце интервала управления.

При случайном характере внешних воздействий компоненты вектора отклонений ε и управлений u также будут случайными величинами. В качестве критериев оптимальности при случайных сигналах может быть использовано среднее значение квадрата ошибки системы $< \varepsilon^2 >$ или среднее значение квадрата выходной координаты $< x^2 >$

$$J = < \varepsilon^2 > = \lim 1/T\int_0^T \varepsilon^2 dt, \qquad (11)$$

$$J = < x^2 > = \lim 1/T\int_0^T x^2 dt.$$

В качестве критериев оптимальности системы могут быть приняты функционалы, характеризующие взаимную корреляцию между координатами выхода и возмущения.

При синтезе корректирующих устройств рекомендуется использовать функционал невязки

$$J(k)=\int_0^T [f_1(t,k)-f_2(t,k)]^2\,dt=\int_0^T f^2(t,k)dt \Rightarrow min, \qquad (12)$$

где f_1, f_2 - соответственно левая и правая части дифференциальных уравнений замкнутой системы управления, а k - неизвестные параметры регулятора. Однако при этом появляется необходимость учёта δ - функций и её производных, если входной сигнал - единичное входное ступенчатое воздействие. В связи с этим переходят к эквивалентным интегральным уравнениям Вольтерры 2-го рода F_1(t, k) и F_2 (t, k), в которых отсутствуют производные от входного и выходного сигналов. Близость левой и правой частей определяют функционалом

$$J(k)=\int_0^T [F_1(t,k)-F_2(t,k)]^2\,dt=\int_0^T F^2(t,k)dt \Rightarrow min. \qquad (13)$$

При решении задач структурно - параметрической оптимизации используют критерии амплитудного, симметричного и компромиссного оптимумов.

Критерий технического (амплитудного, модульного) оптимума МО обеспечивает выбор параметров регулятора на основании следующих требований к форме АЧХ замкнутой системы: характеристика в как можно более широком диапазоне частот должна быть горизонтальной и равной единице, наклонный участок характеристики должен быть как можно более крутопадающим. Другими словами, критерий МО требует, чтобы настраиваемая система приближалась по своим частотным свойствам к идеальному фильтру нижних частот, имеющему, как известно, прямоугольную частотную характеристику.

Для решения задачи синхронизации скоростей между отдельными машинами и агрегатами применяются астатические системы регулирования как по заданию, так и по нагрузке. Обычно объект управления состоит в этом случае из нескольких инерционных звеньев первого порядка и интегрирующего звена, на входе которого действует возмущающее воздействие (наброс нагрузки). Для получения астатизма как по заданию, так и по нагрузке в контур вводят ПИ - регулятор, а система становится двукратно интегрирующей. Для того, чтобы АЧХ контура была как можно ближе к единице и более плоской, необходимо потребовать, чтобы как можно большее число производных $dA^2(\omega)/d\omega^n \to 0$ при $\omega \to 0$. Критерий симметричного оптимума требует такого выбора постоянной времени контурного регулятора, при котором выполняется это требование.

Если требуется обеспечить плавные и быстрые переходные процессы как по заданию, так и по нагрузке, рекомендуется критерий компромиссного управления. На практике применяются и другие критерии качества переходных процессов.

В зависимости от критерия качества для выбора структуры и параметров регуляторов применяются методы Циглера-Николса, Чина, Кеслера, Латцеля, Куна, Пройса, частотные методы, методы стандартных коэффициентов и т.д. Для одних и тех же систем они дают разные показатели качества переходных процессов и обладают разной трудоёмкостью.