УДК 004.932.4

# ДВУМЕРНЫЙ АЛГОРИТМ КУЛИ – ТЬЮКИ ДЛЯ СИГНАЛА С ОТСЧЕТАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВИДА

**Старовойтов А.В., Тутатчиков В.С.**
**Научный руководитель – профессор, д. ф.-м. н., Носков М.В.**
***Сибирский федеральный университет***

Многомерная цифровая обработка сигналов имеет ряд инструментов, основанных на преобразовании Фурье. Для дискретного случая получено много алгоритмов, которые позволяют снизить количество вычислений. Данные алгоритмы позволяют уменьшить время выполнения их реализации на вычислительных машинах, а также снизить вероятность появления ошибки при вычислении. Одним из широко распространенных алгоритмов является алгоритм Кули – Тьюки для сигнала, где количество отсчетов по координатам должно быть степенью двойки. В докладе рассмотрен двумерный случай для сигнала, где каждая из координат имеет количество отсчетов, равной степени двойки, и когда количество отсчетов по второй координате выше в два раза.

Рассмотрим сигнал $f$, который является двумерным периодическим сигналом с периодом $2^s$ по первой и $2^{s+1}$ по второй координате. Отсчёты задаются, как $f_{k,t}$, где $k = 0{:}\,2^s, t = 0{:}\,2^{s+1}$.

Дискретное преобразование Фурье для данного сигнала $f$ задаётся формулой

$$F_{l,m} = \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^{s+1}-1} f_{k,t} e^{\frac{2\pi ilk}{2^s}} e^{\frac{2\pi imt}{2^{s+1}}}.$$

Часто для вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ) используют алгоритм с применением одномерных дискретных преобразований Фурье. Для этого вычисляют $F$ в следующем виде

$$F_{l,m} = \sum_{k=0}^{2^s-1} \left[ \sum_{t=0}^{2^{s+1}-1} f_{k,t} e^{\frac{2\pi imt}{2^s+1}} \right] e^{\frac{2\pi ilk}{2^s}}.$$

Суммы в квадратных скобках представляют собой одномерные вычисления ДПФ по строкам исходного сигнала $f$. Рассмотрим данный подход с алгоритмом, предложенным ниже.

Во-первых, преобразуем формулу нахождения $F_{l,m}$ следующим образом:

$$F_{l,m} = \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^{s+1}-1} f_{k,t} e^{\frac{2\pi i (lk2+mt)}{2^{s+1}}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t_1=0}^{2^s-1} f_{k,2t_1} e^{\frac{2\pi i (lk2+m2t_1)}{2^{s+1}}} + \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t_1=0}^{2^s-1} f_{k,2(t_1+1)} e^{\frac{2\pi i (lk2+m2(t_1+1))}{2^{s+1}}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t_1=0}^{2^s-1} f_{k,2t_1} e^{\frac{2\pi i (lk2+m2t_1)}{2^{s+1}}} + \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t_1=0}^{2^s-1} f_{k,2(t_1+1)} e^{\frac{2\pi i (lk2+m(2t_1+1))}{2^{s+1}}} = \quad (1)$$

$$= \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^s-1} f_{k,2t} e^{\frac{2\pi i (lk+mt)}{2^s}} + \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^s-1} f_{k,2(t+1)} e^{\frac{2\pi i (lk+mt)}{2^s}} e^{\frac{\pi i m}{2^s}},$$

где $l = 0{:}\,2^s - 1, m = 0{:}\,2^{s+1} - 1$.

Можно показать, что $e^{\frac{\pi i m}{2^s}}$ обладает свойством симметрии относительно $m = 2^s$.

$$e^{\frac{\pi i (2^s+t)}{2^s}} = e^{\frac{\pi i 2^s}{2^s}} \cdot e^{\frac{\pi i t}{2^s}} = -e^{\frac{\pi i t}{2^s}}, \qquad (2)$$

где $t = 0{:}\,2^s - 1$.

Сумма

$$\sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^s-1} f_{k,2t} e^{\frac{2\pi i (lk+mt)}{2^s}}$$

является двумерным ДПФ сигнала $\widetilde{f_{k,t}} = f_{k,2t}$, то есть сигнала, полученного прореживанием исходного сигнала $f_{k,t}$ по чётным отсчётам второй переменной; обозначим данной ДПФ через $F'_{l,m}$. Аналогично видно, что сумма

$$\sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^s-1} f_{k,2t+1} e^{\frac{2\pi i (lk+mt)}{2^s}}$$

является ДПФ сигнала $\widetilde{\widetilde{f_{k,t}}} = f_{k,2t+1}$, полученного из исходного сигнала прореживание по нечётным отсчётам второй переменной; обозначим данное ДПФ, как $F''_{l,m}$.

Из (1) и (2) и введённых выше обозначений получаем, что

$$F_{l,m} = F'_{l,m} + e^{\frac{\pi i m}{2^s}} F''_{l,m}, \qquad (3)$$

$$F_{l,2^s+m} = F'_{l,m} - e^{\frac{\pi i m}{2^s}} F''_{l,m},$$

где $l, m \in 0{:}\,2^s - 1$.

Таким образом, нахождение двумерного дискретного преобразования Фурье сигнала $f_{k,t}$ можно реализовать по следующему алгоритму:

1) Нахождение спектра $F'$ сигнала $\tilde{f}$, где $\widetilde{f_{k,t}} = f_{k,2t}$.
2) Нахождение спектра $F''$ $\tilde{\tilde{f}}$, где $\widetilde{\widetilde{f_{k,t}}} = f_{k,2t+1}$. $\qquad (4)$
3) Домножение отсчётов спектра $F''_{l,m}$ на дополнительный множитель $e^{\frac{\pi i m}{2^s}}$.
4) Определение значений спектра сигнала $f$, используя выражение (3).

Рассмотрим количество комплексных сложений (вычитаний) и умножений в приведенном выше алгоритме. Для сигналов $\tilde{f}$ и $\tilde{\tilde{f}}$ отсчеты спектров $F'$ и $F''$ могут вычислены при помощи $\frac{3}{4}2^{2s}s$ комплексных умножений и $2 \cdot 2^{2s}s$ комплексных сложений (вычитаний).

Данные оценки могут быть доказаны распространением теории об рекуррентных последовательностях в пространстве сигналов на двумерный случай. Отметим, что для одномерного сигнала, где количество отсчетов $N = 2^s$ является степенью двойки, количество комплексных сложений равно $2^s s$, а количество комплексных умножений $\frac{1}{2}2^s s$.

Тогда из алгоритма (4) нахождение спектра сигнала $f_{k,t}$ $(k = 0{:}\, 2^s - 1, t = 0{:}\, 2^{s+1} - 1)$ потребует

$$2 \cdot \frac{3}{4}2^{2s}s + 2^s \cdot 2^s = \frac{3}{2}2^{2s}s + 2^{2s}$$

комплексных умножений и

$$2^{s+1}2^s s + 2^s 2^{s+1}(s+1) = 4 \cdot 2^{2s}s + 2^{2s+1}$$

комплексных сложений.

Отсюда можно сделать вывод, что применение алгоритма (4) более эффективно, чем алгоритма, использующего нахождение одномерных ДПФ. Поскольку происходит уменьшение количества операций комплексного умножения при сохранении количества операций комплексного сложения.