УДК 517.65

МОДЕЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Савиных Е.Е.
Научный руководитель – к.ф.-м.н., профессор Вайнштейн И.И.
Сибирский федеральный университет

Схема отрывных течений жидкости (склейка вихревых и потенциальных течений) в плоской ограниченной области М.А. Лаврентьева приводит к следующей нелинейной задаче:

В ограниченной области D с границей Γ требуется найти непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \begin{cases} \omega, & если\ \psi < 0, \\ 0, & если\ \psi > 0, \end{cases} \tag{1}$$

при краевом условии

$$\psi|_\Gamma = \varphi(s) \geq 0, \quad \omega = const > 0. \tag{2}$$

Гармоническая функция $\psi_0(x, y)$, удовлетворяющая условию (2), в силу принципа максимума, положительна в области D и является решением задачи (1), (2). Это решение назовем тривиальным. Оно соответствует потенциальному течению во всей области D.

В работе М.А. Гольдштика доказано существование нетривиального (с областью отрицательности) решения задачи (1), (2) при достаточно большом значении величины ω. И.И. Вайнштейном получено неравенство

$$\omega > \frac{4Ke}{R^2}, \tag{3}$$

при котором существует нетривиальное решение задачи, R – радиус наибольшего по площади круга, который можно вписать в область D, $K = max\varphi(s)$.

В задаче (1), (2) предполагается, что завихренность ω постоянна. В общем случае вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости завихренность является произвольной функцией от функции тока $\psi(x, y)$.

$$\omega = F(\psi), \qquad \Delta\psi = F(\psi).$$

Одной из нерешенных задач в задаче о склейке вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости является задача о количестве решений.

В модельной задаче при постоянной завихренности, если область D круг радиуса R и $\varphi(s) = K$, при выполнении неравенства (3) задача (1), (2) имеет два нетривиальных решения. Если

$$\omega = \frac{4Ke}{R^2} \tag{4}$$

одно нетривиальное решение. При

$$\omega < \frac{4Ke}{R^2} \tag{5}$$

нетривиальных решений нет.

Рассмотрим модельную задачу для завихренности

$$\omega = F(\psi) = e^{\lambda\psi}.$$

Учитывая $e^{\lambda\psi} > 0$, приходим к задаче аналогичной по постановке (1), (2)

$$\Delta\psi = \begin{cases} e^{\lambda\psi}, & если\ \psi < 0, \\ 0, & если\ \psi > 0, \end{cases} \tag{6}$$

при краевом условии

$$\psi|_{r=R} = K > 0. \tag{7}$$

Для решения поставленной задачи (6), (7) получены явные решения задачи Дирихле

$$\Delta\psi = e^{\lambda\psi}, \tag{8}$$

$$\psi|_{r=R} = K. \tag{9}$$

Уравнение (8) является уравнением Лиувилля. Явное решение задачи (6), (7) представляет самостоятельный интерес.

В случае $\lambda > 0$ задача (8), (9) имеет единственное решение

$$\psi(r) = K + ln\frac{4}{\left(\left(\sqrt{1+\frac{\lambda R^2}{2}e^{\lambda K}}-1\right)\frac{r^2}{R^2}-\left(\sqrt{1+\frac{\lambda R^2}{2}e^{\lambda K}}+1\right)\right)^2}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{10}$$

В случае $\lambda < 0$, при $\frac{|\lambda|R^2}{2}e^{-|\lambda|K} < 1$ задача Дирихле имеет два решения

$$\psi = K + ln\frac{\left((1\pm\beta)\frac{r^2}{R^2}+(1\mp\beta)\right)^2}{4}, \quad \beta = \sqrt{1-\frac{|\lambda|R^2}{2}e^{-|\lambda|K}}, \tag{11}$$

при $\frac{|\lambda|R^2}{2}e^{-|\lambda|K} = 1$ задача Дирихле имеет одно решение

$$\psi = K + ln\frac{\left(\frac{r^2}{R^2}+1\right)^2}{4}, \quad \beta = 0,$$

при $\frac{|\lambda|R^2}{2}e^{-|\lambda|K} < 1$ - решений нет.

Используя (10), (11), получены решения рассматриваемой задачи (6), (7).

При $\lambda > 0$ задача (6), (7) имеет два нетривиальных решения

$$\psi_i(r) = \begin{cases} ln\frac{4}{\left(\left(\sqrt{1+\frac{\lambda a_i^2}{2}}-1\right)\frac{r^2}{a_i^2}-\left(\sqrt{1+\frac{\lambda a_i^2}{2}}+1\right)\right)^2}, & если\ 0 \le r \le a_i, \\ \frac{C}{ln\frac{R}{a_i}}ln\frac{r}{a_i}, & если\ \ a_i \le r \le R, \end{cases} \qquad i = 1,2$$

где a_i два различных корня уравнения

$$2ln\frac{R}{a}\left(\sqrt{1+\frac{\lambda a^2}{2}}-1\right) - K = 0 \text{ и } K < M, \tag{12}$$

где $M = \max_{x\in[0,R]}\left(2ln\frac{R}{a}\left(\sqrt{1+\frac{\lambda a^2}{2}}-1\right)\right)$. Условие $K < M$ выполняется, если

$$K < \sqrt{1+\frac{\lambda R^2}{2}} - 1.$$

При $\lambda < 0$ задача (6), (7), если

$$K < \frac{|\lambda|R^2}{16},$$

имеет три нетривиальных решения. Решения выписаны в явном виде.

В работе, на модельном примере, установлен эффект существования трех нетривиальных решений задачи о склейке вихревых и потенциальных течений.