

УДК 535.36

Рассеяние света осесимметричными частицами в приближении Рэлея-Ганса-Дебая

Константин А. Шаповалов*

Красноярский государственный медицинский университет
имени профессора В.Ф.Войно-Ясенецкого,
Партизана Железняка, 1, Красноярск, 660022,
Россия

Получена 06.01.2012, окончательный вариант 25.06.2012, принята к печати 30.08.2012

Получены формулы для амплитуды светорассеяния различных частиц, имеющих ось вращения, в приближении Рэлея-Ганса-Дебая (РГД). Указан общий подход для нахождения форм-фактора и амплитуды светорассеяния в цилиндрической системе координат частиц произвольного сечения, имеющих ось вращения. Кроме широко известных форм частиц шара, сфероида, цилиндра, тора, рассмотрены конус, полушар, параболоид вращения и тело, полученное вращением овалов Кассини. Для данных частиц проведено также численное сравнение факторов эффективности и индикатрисы светорассеяния РГД.

Ключевые слова: фактор эффективности светорассеяния, индикатриса светорассеяния, оптически „мягкие“ частицы.

Введение

В оптике аэрозолей, биологических взвесей, коллоидной химии для быстрого анализа характеристик светорассеяния частицами произвольной формы и структуры используются различные приближения [1–4]. Если светорассеивающие частицы оптически „мягкие“ ($|m - 1| \ll 1$, где $m = n + i\chi$ — относительный показатель преломления частицы), то чаще применяют приближения Рэлея-Ганса-Дебая (РГД) и аномальной дифракции (АД). Ранее автором получены [5, 6] выражения для гексагональных и тороидальных частиц [7] в приближении РГД.

Целью настоящей работы является анализ светорассеяния частицами произвольного сечения, имеющими ось вращения, в приближении РГД.

1. Амплитуда светорассеяния и форм-фактор

Предположим, что на частицу с осью симметрии, ориентированной вдоль оси z , падает плоская электромагнитная волна (рис. 1). На рис. 1 показаны сечения частиц плоскостью, проходящей через ось вращения z .

Используем интегральное представление амплитуды светорассеяния в приближении РГД в скалярном виде [2, 4, 8]:

$$f(\theta, \beta) = \frac{k^2}{4\pi} \int (m^2 - 1) e^{i\vec{k}_s \cdot \vec{r}} dV, \quad (1)$$

*sh_const@mail.ru

где \vec{s}, \vec{i} — единичные векторы вдоль направления рассеяния и распространения света соответственно, \vec{r} — радиус-вектор точки внутри частицы, $\vec{k}_s = k(\vec{i} - \vec{s})$, $|\vec{k}_s| = 2k \sin(\frac{\theta}{2})$, θ — угол между векторами \vec{i} и \vec{s} , β — угол между осью z и вектором \vec{k}_s .

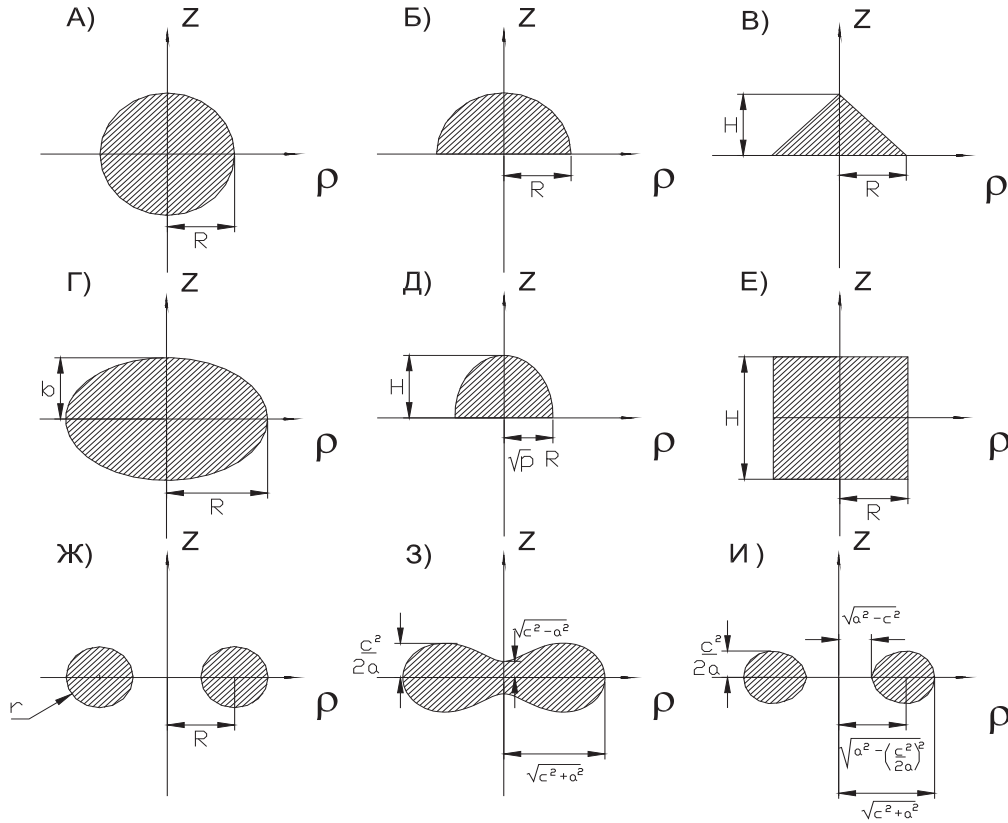


Рис. 1. Геометрия осевых сечений частиц: а – шар; б – полушар; в – конус; г – сфероид; д – параболоид вращения; е – цилиндр; ж – тор; овалы Кассини: з – при $a \leq c$; и – при $a > c$

Выразим амплитуду РГД однородной частицы через форм-фактор [2]:

$$\Phi(\theta, \beta) = \frac{1}{V} \int e^{i\vec{k}_s \vec{r}} dV, \tag{2}$$

Из (1) получим

$$f(\theta, \beta) = \frac{k^2(m^2 - 1)V}{4\pi} \Phi(\theta, \beta). \tag{3}$$

Поэтому в цилиндрической системе координат после интегрирования по углу для форм-фактора однородной частицы имеем

$$\Phi(\theta, \beta) = \begin{cases} \pi \int_{z_1}^{z_2} e^{ik_3 z} (\rho_2^2 - \rho_1^2) dz & \text{при } k_4 = 0, \\ \frac{2\pi}{k_4} \int_{z_1}^{z_2} e^{ik_3 z} (J_1(k_4 \rho_2) \rho_2 - J_1(k_4 \rho_1) \rho_1) dz & \text{при } k_4 \neq 0, \end{cases} \tag{4}$$

где z_1, z_2 — минимальная и максимальная координаты поверхности частицы по z ,
 $\rho_1 = \rho_1(z), \rho_2 = \rho_2(z)$ — минимальная и максимальная координаты поверхности частицы по ρ ,
 $J_1(x)$ — функции Бесселя первого порядка, $k_3 = k_s \cos \beta, k_4 = k_s \sin \beta$.

Заметим, что можно выразить k_3, k_4 через углы в сферической системе координат $\theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s$, указывающие направление падающего и рассеянного света, тогда $k_1 = k(\sin \theta_i \cos \phi_i - \sin \theta_s \cos \phi_s), k_2 = k(\sin \theta_i \sin \phi_i - \sin \theta_s \sin \phi_s), k_3 = k(\cos \theta_i - \cos \theta_s), k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.

Укажем также пределы интегрирования форм-фактора (4) для частиц, имеющих ось вращения (табл. 1 и рис. 1).

Таблица 1. Пределы интегрирования форм-фактора в цилиндрической системе координат для некоторых тел вращения

Форма	z_1	z_2	ρ_1	ρ_2
шар	$-R$	R	0	$\sqrt{R^2 - z^2}$
полус шар	0	R	0	$\sqrt{R^2 - z^2}$
сфероид	$-b$	b	0	$R\sqrt{1 - (\frac{z}{b})^2}$
цилиндр	$-H/2$	$H/2$	0	R
конус	0	H	0	$R(1 - \frac{z}{H})$
параболоид вращения	0	H	0	$R\sqrt{p(1 - \frac{z}{H})}$
тор	$-r$	r	$R - \sqrt{r^2 - z^2}$	$R + \sqrt{r^2 - z^2}$
овалы Кассини $a > c$	$-\frac{c^2}{2a}$	$\frac{c^2}{2a}$	$\sqrt{a^2 - z^2} - \sqrt{c^4 - 4a^2 z^2}$	$\sqrt{a^2 - z^2} + \sqrt{c^4 - 4a^2 z^2}$
овалы Кассини $\frac{c}{\sqrt{2}} < a \leq c$	$\sqrt{c^2 - a^2}$	$\frac{c^2}{2a}$	$\sqrt{a^2 - z^2} - \sqrt{c^4 - 4a^2 z^2}$	$\sqrt{a^2 - z^2} + \sqrt{c^4 - 4a^2 z^2}$
овалы Кассини $0 < a \leq c$	$-\sqrt{c^2 - a^2}$	$\sqrt{c^2 - a^2}$	0	$\sqrt{a^2 - z^2} + \sqrt{c^4 - 4a^2 z^2}$

Далее в сравнительной табл. 2 собраны форм-факторы светорассеяния, полученные ранее в [1, 2, 4, 7], а также добавлены новые данные автора по конусу, полус шару, параболоиду вращения и овалам Кассини. В табл. 2 использованы обозначения сферических функций Бесселя и Струве нулевого и первого порядков:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, h_0(x) = \frac{1 - \cos x}{x}, j_1(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}, h_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x + x \sin x}{x^2}.$$

Заметим, что форм-фактор светорассеяния может быть получен аналитически для достаточно широкого класса форм частиц, в частном случае при $k_4 = 0$ (табл. 2). Иначе интегрирование форм-фактора (4) не всегда является тривиальным.

Например, для конуса получим форм-фактор только для $k_3 H = k_4 R$ (в общем случае возможно только разложение в ряд):

$$\Phi(\theta, \beta) = 2 \exp(ik_3 H) [\Phi_1(\theta, \beta) + i\Phi_2(\theta, \beta)], \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1(\theta, \beta) &= \cos(k_3 H) J_1(k_3 H) + \sin(k_3 H) J_2(k_3 H), \\ \Phi_2(\theta, \beta) &= \cos(k_3 H) J_2(k_3 H) - \sin(k_3 H) J_1(k_3 H).\end{aligned}$$

Таблица 2. Форм-фактор $\Phi(\theta, \beta)$ и объем некоторых тел вращения

Форма	Объем	Форм-фактор	
		$k_4 = 0$	$k_4 \neq 0$
шар [1,2,4]	$\frac{4}{3}\pi R^3$	$\frac{3}{k_3 R} j_1(k_3 R)$	$\frac{3}{k_s R} j_1(k_s R)$
полушар	$\frac{2}{3}\pi R^3$	$\frac{3}{k_3 R} (j_1(k_3 R) + i h_1(k_3 R))$	—
сфероид [1,2,4]	$\frac{4}{3}\pi R^2 b$	$\frac{3}{k_3 b} j_1(k_3 b)$	$\frac{3 j_1(\sqrt{(k_4 R)^2 + (k_3 b)^2})}{\sqrt{(k_4 R)^2 + (k_3 b)^2}}$
цилиндр [1,2,4]	$\pi R^2 H$	$j_0\left(\frac{k_3 H}{2}\right)$	$\frac{2 J_1(k_4 R)}{k_4 R} j_0\left(\frac{k_3 H}{2}\right)$
конус	$\frac{\pi}{3} R^2 H$	$\frac{6(h_0(k_3 H) - j_1(k_3 H))}{k_3 H} +$ $+ i \frac{6(1 - h_1(k_3 H) - j_0(k_3 H))}{k_3 H}$	при $k_4 R = k_3 H$ см. (5) в тексте
параболоид вращения	$\frac{\pi}{2} R^2 p H$	$\frac{2}{k_3 H} h_0(k_3 H) +$ $+ i \frac{2}{k_3 H} (1 - j_0(k_3 H))$	—
тор [7]	$2\pi^2 R r^2$	$2 J_1(k_3 r) / (k_3 r)$	при $k_3 R < 1$ $\frac{8 J_1(k_4(R+r)) J_1(k_4(R-r)) J_1(k_3 r)}{k_4(R+r) k_4(R-r) k_3 r}$
овалы Кассини $a > c$	$\frac{c^4 \pi^2}{2a}$	$2 J_1\left(\frac{k_3 c^2}{2a}\right) / \left(\frac{k_3 c^2}{2a}\right)$	—
овалы Кассини $0 < a \leq c$	$\frac{\pi \sqrt{c^2 - a^2} (2a^2 + c^2)}{3} +$ $+ \frac{\pi c^4 \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)}{a}$	—	—

2. Индикатриса светорассеяния

Индикатриса светорассеяния (или элемент матрицы рассеяния f_{11}) для естественного света (поляризация хаотична) и при $\beta = 0$ рассчитывалась по формуле [2, 3]

$$f_{11}(\theta, 0) = k^2 |f(\theta, 0)|^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}, \quad (6)$$

где $|f(\theta, \beta)|^2$ — квадрат модуля амплитуды светорассеяния.

На рис. 2 показаны индикатрисы светорассеяния для различных форм частиц, имеющих одинаковый радиус эквиобъемного шара, равный $R_{eq} = 1$, и показатель преломления $m = 1, 1 + i0,001$. Радиус эквиобъемного шара R_{eq} связан с объемом V как $R_{eq} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Очевидно хорошее согласие индикатрис для шара, цилиндра, сфероида в области малых углов рассеяния (кроме конуса при угле падения $\theta_i = 90^\circ$) и сильное различие в области больших углов для полушара и других форм частиц (рис. 2).

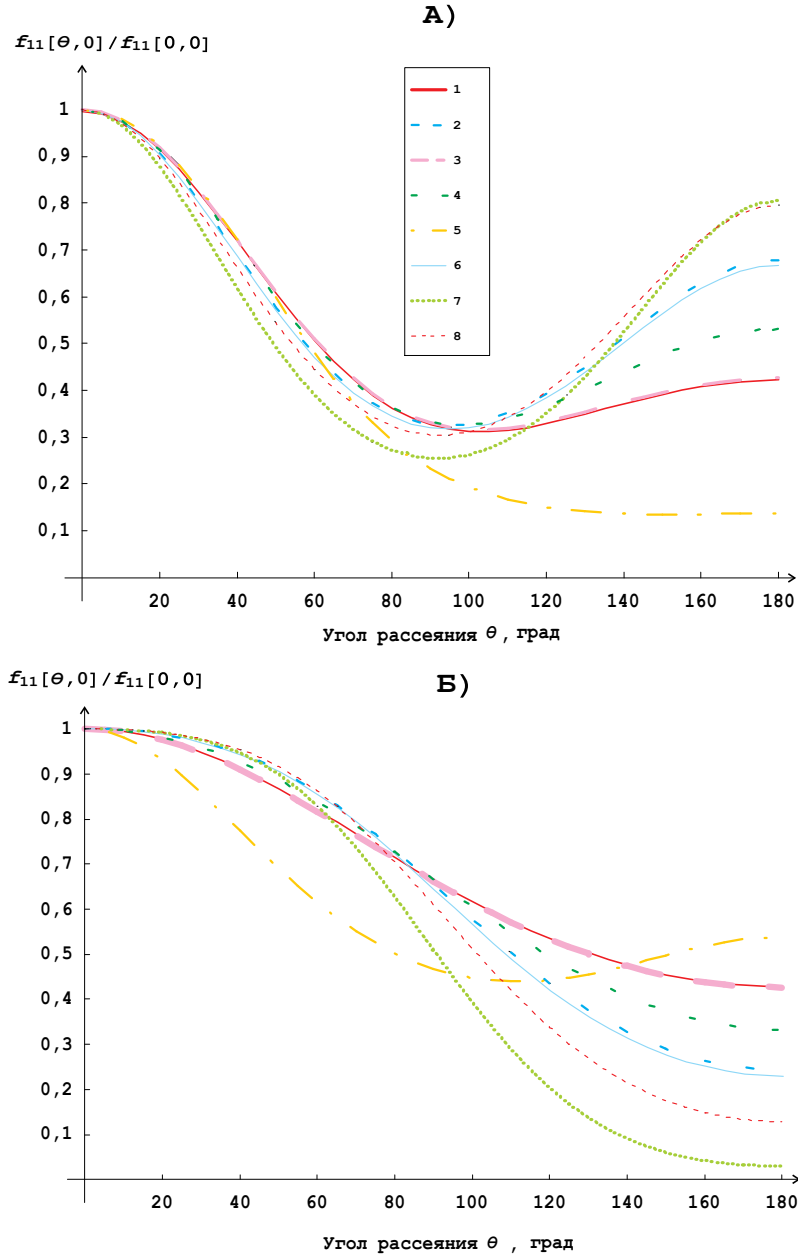


Рис. 2. Индикатриса светорассеяния частиц, имеющих радиус эквиобъемного шара $R_{eq} = 1$, для углов падения (А) $\theta_i = 0$ и (Б) $\theta_i = 90^\circ$: 1 – шар, 2 – полушар, 3 – цилиндр, 4 – сфероид, 5 – конус, 6 – параболоид вращения, 7 – тор, 8 – овалы Кассини при $a = c$

3. Фактор эффективности светорассеяния

Сечение светорассеяния σ_s по [3], нормированное на площадь S проекции частицы на плоскость, перпендикулярную оси пучка, (или фактор эффективности светорассеяния Q_s) равно

$$Q_s = \frac{\sigma_s}{S} = \frac{\int |f(\vec{s}, \vec{i})|^2 d\omega}{S}, \tag{7}$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла (в сферической системе координат $\sin \theta_s d\theta_s d\phi_s$).

На рис. 3 показана зависимость фактора эффективности Q_s от радиуса эквиобъемного

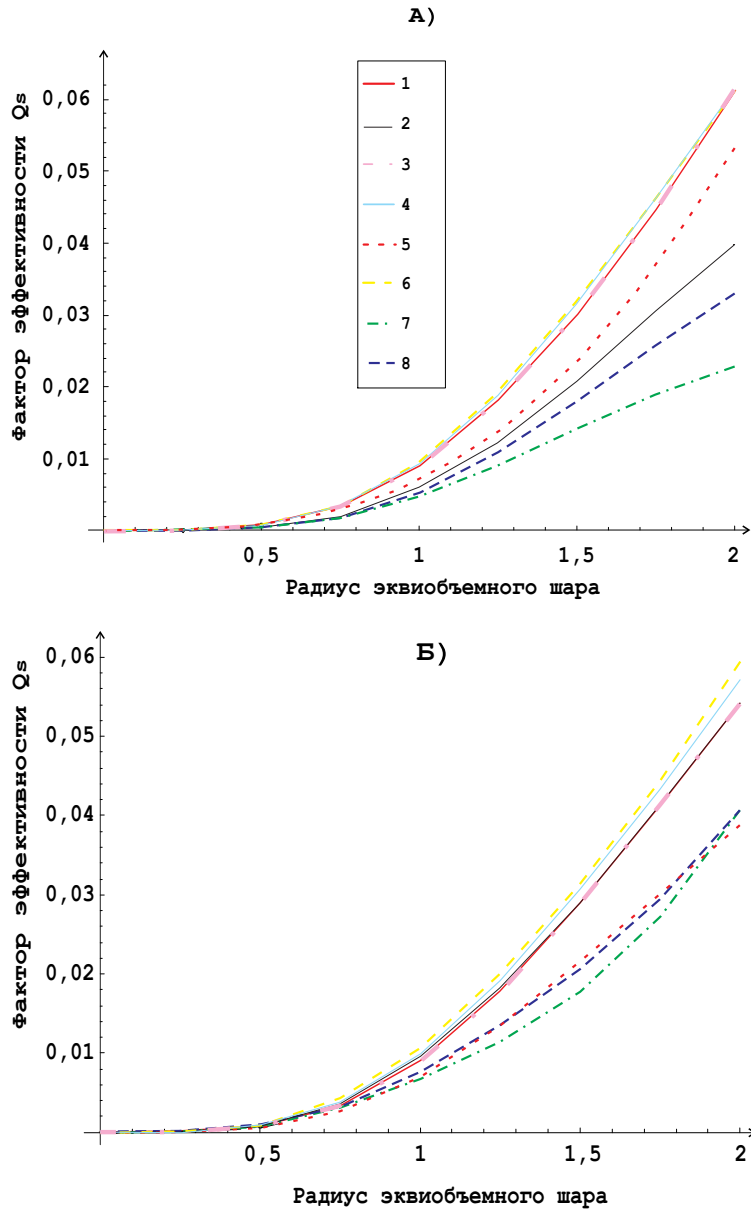


Рис. 3. Факторы эффективности светорассеяния в зависимости от радиуса эквиобъемного шара для углов падения (А) $\theta_i = 0$ и (Б) $\theta_i = 90^\circ$: 1 — шар, 2 — полушар, 3 — цилиндр, 4 — сфероид, 5 — конус, 6 — параболоид вращения, 7 — тор, 8 — овалы Кассини при $a = c$

шара для различных форм частиц при углах падения света $\theta_i = 0$ и $\theta_i = 90^\circ$. Заметим, что при угле падения $\theta_i = 90^\circ$ наблюдается несколько лучшее согласие с поведением шара и сфероида, чем при $\theta_i = 0$.

Заключение

Таким образом, получены формулы для расчета амплитуды и форм-фактора светорассеяния в приближении РГД различных частиц, имеющих ось вращения, в частности конуса, полушара, параболоида вращения и тела, полученного вращением овалов Кассини. Для этих и других форм частиц проведен сравнительный численный расчет значений факторов эффективности светорассеяния и индикатрисы светорассеяния с использованием параметра эквиобъемного радиуса шара. Получено хорошее согласие в области малых углов для индикатрисы светорассеяния всех форм частиц, кроме конуса.

Список литературы

- [1] Ф.Я.Сидько, В.Н.Лопатин, Л.Е.Парамонов, Поляризационные характеристики взвесей биологических частиц, Новосибирск, Наука, 1990.
- [2] Г.Ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, М., ИЛ, 1961.
- [3] К.Борен, Д.Хафмен, Поглощение и рассеяние света малыми частицами, М., Мир, 1986.
- [4] M.Kerker, The scattering of light and other electromagnetic radiation, New York, London, Academic Press, 1969.
- [5] К.А.Шаповалов, Рассеяние света частицами цилиндрической формы в приближении Рэлея-Ганса-Дебая. 1. Строго ориентированные частицы, *Оптика атмосферы и океана*, **17**(2004), №2, 350–353.
- [6] К.А.Шаповалов, Рассеяние света частицами цилиндрической формы в приближении Рэлея-Ганса-Дебая. 2. Хаотично ориентированные частицы, *Оптика атмосферы и океана*, **17**(2004), №8, 627–629.
- [7] К.А.Шаповалов, Рассеяние света частицами тороидальной формы в приближении Рэлея-Ганса-Дебая, *Оптика и спектроскопия*, **110**(2011), №5, 858–861.
- [8] А.Исимару, Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах, т.1, М., Мир, 1981.

Light Scattering by Particles with Axis of Symmetry in Rayleigh-Gans-Debye Approximation

Konstantin A. Shapovalov

The formulas for light scattering amplitude in Rayleigh-Gans-Debye (RGD) approximation for different particles having axis of rotation are obtained. The general approach for calculation light scattering form-factor and amplitude in the cylindrical coordinate system of particles with arbitrary cross-section having axis of rotation are given. Besides well-known forms of particles ball, spheroid, cylinder, torus, another forms such as cone, halfball, paraboloid of revolution and the body obtained by rotating Cassini ovals are treated. Also numerical results of light scattering efficiency factor and phase function for given particles in RGD approximation are obtained.

Keywords: efficiency factor of light scattering, light scattering phase function, optically "soft" particles.