Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(4), 576–580

УДК 517.55+517.96

Задача Коши для многомерного разностного уравнения в конусах целочисленной решетки

Татьяна И. Некрасова*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 28.06.2012, окончательный вариант 28.07.2012, принята к печати 10.08.2012

Сформулировано условие, обеспечивающее существование и единственность решения задачи Коши для многомерного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами в симплициальном конусе целочисленной решетки. На основе понятия фундаментального решения получена формула для решения этой задачи.

Ключевые слова: многомерное разностное уравнение, задача Коши.

Введение

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, а $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$ — n-мерная целочисленная решетка. *Конусом* K в $\mathbb{Z}^n$ будем называть линейную комбинацию из s векторов $a^1, \ldots, a^s \in \mathbb{Z}^n$ вида

$$K = \{x : x = \lambda_1 a^1 + \ldots + \lambda_s a^s,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}_+,\ i = 1, \ldots, s\},$$

где $\mathbb{Z}_+$ — целые неотрицательные числа.

Будем рассматривать *симплициальные конусы*, то есть такие, в которых каждый элемент выражается через образующие *единственным* образом. В частности, это означает, что векторы $a^1, \ldots, a^s$ линейно независимы и их число $s \leqslant n$. Заметим, что симплициальный конус является заостренным, т. е. из того, что $x \in K$ и $-x \in K$, следует, что $x = 0$.

Обозначим $A = \{\alpha\} \subset K$ — некоторое фиксированое конечное множество точек n-мерной целочисленной решетки. Очевидно, что вместе с каждой точкой $x \in K$ конусу принадлежат и все точки $x + \alpha,\ \alpha \in A$.

Рассмотрим разностное уравнение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = 0,\ x \in K, \tag{1}$$

где c_α — коэффициенты (постоянные) уравнения.

Определим отношение частичного порядка $\geqslant_K$ между точками m и $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. А именно, будем писать $m \geqslant_K \alpha$, если $m + K \subset \alpha + K$.

И, кроме того, обозначим $m \ngeqslant_K \alpha$, если $m \in K \backslash \{K + \alpha\}$, т. е. отношение $m \geqslant_K \alpha$ не выполняется.

Зафиксируем $m \in N_p \cap \mathbb{Z}^n$ и обозначим $K_m = \{x \in K : x \ngeqslant_K m\}$

Сформулируем задачу. *Найти решение уравнения* (1), *совпадающее на* K_m *с заданной функцией* φ:

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in K_m. \tag{2}$$

*tinkler-9@ya.ru

Задача Коши для многомерных разностных уравнений рассматривалась в работе [1] в связи с применением в комбинаторном анализе. В этой работе, в частности, приведены условия, обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши.

В работе [2] эти условия сформулированы с использованием понятия многогранника Ньютона, кроме того, приведена формула, выражающая решение задачи Коши через фундаментальное решение разностного оператора.

Отметим, что разностные уравнения в конусах целочисленной решетки возникают естественным образом в некоторых задачах комбинаторного анализа. Например, в задаче об *обобщенных путях Дика* (см., например, [1, 3, 4]).

Пусть дан набор L шагов $h^1, \dots, h^s \in \mathbb{Z}^n$ и заостренный конус K. Обозначим $f(x)$ — число путей, которыми можно дойти из начала координат до точки x, используя только шаги из L и оставаясь в конусе K. Очевидно, что искомое число путей удовлетворяет рекуррентному соотношению вида $f(x) = \sum_j f(x - h^j)$.

Сделаем замену $x \to x + h^1 + \ldots + h^s$. Тогда уравнение перепишется в виде

$$f(x + h^1 + \ldots + h^s) = \sum_j f(x + h^1 + \ldots [j] \ldots + h^s),$$

который можно легко свести к виду (1). Таким образом, задача о числе путей сводится к отысканию решений многомерного разностного уравнения в конусе, порожденном векторами $h^1, \dots, h^s$.

Для формулировки теоремы о разрешимости задачи (1)–(2) и формулы для ее решения нам потребуются некоторые понятия и результаты теории амеб алгебраических гиперповерхностей (см. [5]).

Характеристическим многочленом для разностного уравнения (1) назовем многочлен Лорана

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha =: P(z),$$

где $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, а $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство.

Многогранником Ньютона N_p многочлена P называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества A.

Амебой алгебраической поверхности называется образ множества нулей V многочлена $P(z)$ при отображении

$$Log\ :\ z = (z_1, \dots, z_n) \to (\log(|z_1|), \dots, \log(|z_n|)) = Log|z|.$$

Если m — вершина многогранника Ньютона N_P многочлена Лорана $P(z)$, то обозначим соответствующую непустую связную компоненту дополнения амебы $\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{A}_P$ через E_m. *Двойственный конус* C_m к вершине m многогранника N_P определяется следующим образом:

$$C_m = \{s \in \mathbb{R}^n : \max_{x \in N_P} \langle s, x \rangle = \langle s, m \rangle\}.$$

Отметим, что он является асимптотическим, т. е. вместе с каждой точкой $u \in E_m$ этой компоненте принадлежит и сдвиг асимптотического конуса $u + C_m \subset E_m$. Кроме того, отметим, что в области $Log^{-1} E_m \subset \mathbb{C}^n$ функция $1/P(z)$ разлагается в ряд Лорана вида

$$1/P(z) = \sum_{x \in \Lambda_m + m} \mathcal{P}(x)/z^x, \tag{3}$$

где Λ_m — конус, построенный на векторах $m - \alpha,\ \alpha \in A$, а $\mathcal{P}_m(x)$ — фундаментальное решение разностного уравнения, соответствующее вершине m многогранника N_P.

Заметим, что *фундаментальным* называется всякое решение $\mathcal{P}(x)$ разностного уравнения такое, что

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha \mathcal{P}(x+\alpha) = \delta_0(x),\ x\in\mathbb{Z}^n, \tag{4}$$

где

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x\neq 0,\\ 1, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Коэффициенты $\mathcal{P}_m(x)$ разложения (3) получить следующим образом:

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{c_m z^m + \sum\limits_{\alpha\neq m} c_\alpha z^\alpha} = \frac{1}{c_m z^m(1-\sum\limits_{\alpha\neq m}\tilde{c}_\alpha z^{\alpha-m})} =$$
$$= \frac{1}{c_m z^m}\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{\alpha\neq m}\tilde{c}_\alpha z^{\alpha-m})^k = \sum_{x\in\Lambda_m+m}\frac{\mathcal{P}_m(x)}{z^x}.$$

Продолжим функцию φ, задающую начальные данные задачи Коши на множестве K_m на $\mathbb{Z}^n\backslash K_m$ нулем, а именно, положим

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x\in K_m,\\ 0, & \text{если } x\notin K_m,\end{cases}$$

и затем определим функцию μ следующим образом:

$$\mu(x) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha\tilde{\varphi}(x+\alpha),\ x\in\mathbb{Z}^n.$$

Пусть $S=\{x\in\mathbb{Z}^n : \exists\alpha\in A$ такое, что $x+\alpha\in K_m\}$, а $S_K = S\cap K$ и $\hat{S}_K = S\setminus S_K$.

Далее определим функцию

$$\tilde{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(x), x\in\hat{S}_K,\\ 0, \quad x\notin\hat{S}_K,\end{cases}$$

и обозначим $\operatorname{Supp}\mathcal{P} = \{x\in\mathbb{Z}^n : \mathcal{P}(x)\neq 0\}$ — носитель функции $\mathcal{P}$. Нетрудно убедиться, что $\operatorname{Supp}\mathcal{P}_m\subset\Lambda_m$.

Сформулируем основной результат, обобщающий соответствующее утверждение из [2].

Теорема 1. *Пусть K — симплициальный конус и m — вершина многогранника Ньютона N_p, удовлетворяющая условию*

$$m \underset{K}{\geqslant} \alpha,\ \alpha\in A.$$

Тогда задача Коши (1)–(2) имеет единственное решение, которое можно найти по формуле

$$f(x) = \sum_{y\in\hat{S}_K}\tilde{\mu}(y)\mathcal{P}_m(x-y), \tag{5}$$

в правой части которой число слагаемых конечно.

Доказательство основного результата

Сформулируем вспомогательную лемму:

Лемма 1. *Пусть существует фундаментальное решение $\mathcal{P}$ разностного уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям:*

(i) для любого $x \in K$ множество $Supp\mathcal{P} \cap (x - \hat{S}_K)$ состоит из конечного числа точек;

(ii) для любого $x \in K_m$ множество $Supp\mathcal{P} \cap (x - S_K) = \emptyset$.

Тогда функция (5) *удовлетворяет уравнению* (1) *и начальным данным* (2).

Доказательство. Из условия (i) следует, что сумма в правой части (5) конечная и $\sum\limits_{\alpha\in A} c_\alpha f(x+\alpha) = \sum\limits_{\alpha\in A} c_\alpha \sum\limits_{y\in\hat{S}_K} \mathcal{P}(x-y+\alpha) = \sum\limits_{y\in\hat{S}_K} \tilde{\mu}(y) \sum\limits_{\alpha\in A} c_\alpha \mathcal{P}(x-y+\alpha) = \sum\limits_{y\in\hat{S}_K} \tilde{\mu}(y)\delta_0(x-y) = \tilde{\mu}(x) = 0$ для $x \in K$.

Из условия (ii) следует, что для $x \in K_m$ суммирование в (5) можно проводить по $y \in S$ (так как для $y \in S_K$ имеем $\mathcal{P}(x-y) = 0$), тогда

$$f(x) = \sum_{y\in S} \mu(y)\mathcal{P}(x-y) = \sum_{y\in S}(\sum_{\alpha\in A} c_\alpha \tilde{\varphi}(y+\alpha))\mathcal{P}(x-y) =$$
$$= \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \sum_{y\in S} \tilde{\varphi}(y+\alpha)\mathcal{P}(x-(y+\alpha)+\alpha).$$

Меняя во внутренней сумме индекс суммирования $y+\alpha$ на y и пользуясь свойством (4), получим $f(x) = \sum\limits_{\alpha\in A} c_\alpha \sum\limits_{y\in S} \tilde{\varphi}(y)\mathcal{P}(x-y+\alpha) = \sum\limits_{y\in S} \tilde{\varphi}(y) \sum\limits_{\alpha\in A} c_\alpha \mathcal{P}(x-y+\alpha) = \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$.

Что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство основного результата. Докажем сначала существование и единственность решения задачи (1)–(2). Так как m — вершина многогранника Ньютона, то $c_m \neq 0$, и из уравнения (1) можно найти $f(x+m)$: $f(x+m) = \sum_{\alpha\neq m\ \alpha\in A} \tilde{c}_\alpha f(x+\alpha)$, где $\tilde{c}_\alpha = -\dfrac{c_\alpha}{c_m}$. По условию теоремы $m \geqslant_K \alpha$, поэтому $m + K \subset \alpha + K$ и, кроме того, $\alpha \in K_m$. Далее при $x = 0$ получим, что значение f в точке m выражается через «начальные» данные $\varphi(\alpha)$.

В силу симплициальности всякую точку из K можно единственным образом представить в виде линейной комбинации образующих его векторов $a^1, \ldots, a^s$, т. е. $x = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_s a^s$, $\lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, s$. Теперь обозначим $||x||_K = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ и воспользуемся индукцией по $||\ ||_K$. Предположим, что значения f вычислены для всех x таких, что $||x+m||_K < k$. Так как $||x+\alpha||_K = ||(x+m)-(m-\alpha)||_K = ||x+m||_K - ||m-\alpha||_K < k$, то значения $f(x+m)$ выражаются через «начальные» данные $\varphi(x)$. Таким образом, существование и единственность решения задачи (1)–(2) доказаны.

Покажем, что в случае, когда вершина m многогранника Ньютона удовлетворяет условию теоремы $m \geqslant_K \alpha,\ \alpha \in A$, соответствующее фундаментальное решение $\mathcal{P}_m$ удовлетворяет условиям (i) и (ii). Учитывая способ построения фундаментального решения $\mathcal{P}(x)$, видно, что условие (i) эквивалентно тому, что для любого $x \in K$ уравнение $y + \beta = x$ имеет конечное число решений y, β, где $y \in \hat{S}_K$, а $\beta \in Supp\mathcal{P} \subset \Lambda_m + m$. Напомним, что Λ_m — конус, построенный на векторах $m - \alpha,\ \alpha \in A$. По определению множества $\hat{S}_K$ найдется $\alpha_0 \in A$ такое, что $y + \alpha_0 \in K_m$. Путь $\beta = m + \nu,\ \nu \in \Lambda_m$, тогда $y + \beta = (y+\alpha_0) + (m-\alpha_0) + \nu$. Следовательно, $y + \beta$ является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами векторов $a^1, \ldots, a^s, m-\alpha, \alpha \in A$. Так как конус, построенный на этих векторах, является заостренным, то вектор $x \in K$ можно представить в виде такой линейной комбинации конечным числом способов (см., например, [6]).

В силу условия $m \geqslant_K \alpha,\ \alpha \in A$ теоремы имеем $x - S_K = x - K_m$. Но тогда $Supp\mathcal{P} \cap (x - K_m) = \emptyset$. Действительно, для $x,\ y \in K_m$ имеем $x \not\geqslant_K m,\ x \geqslant_K 0,\ y \not\geqslant_K m,\ y \geqslant_K 0$. Но если $x \not\geqslant_K m$ и $-y \leqslant_K 0$, то $x - y \geqslant_K m$. $\square$

Приведем пример применения даказанной теоремы. Рассмотрим задачу, возникающую в перечислительном комбинаторном анализе, а именно, в перечислении обобщенных путей Дика.

Задача состоит в том, чтобы найти число путей на $\mathbb{Z}^2$, выходящих из начала координат $(0,0)$, оканчивающихся в точке (x_1, x_2) и использующих только шаги $(1,1)$ и $(1,-1)$. Нетрудно видеть, что все такие пути будут лежать в конусе K, порожденном векторами $(1,1)$ и $(1,-1)$. Обозначим $f(x_1,x_2)$ число путей, которыми можно дойти из начала координат до точки x. Тогда $f(x_1,x_2)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$f(x_1+2,x_2) - f(x_1+1,x_2+1) - f(x_1+1,x_2-1) = 0. \tag{6}$$

Сформулируем задачу Коши: найти решение (6), совпадающее на $K_{(2,0)}$ с заданной функцией φ: $f(x,x) = \varphi(x,x),\ x \geqslant 0, \quad f(x,-x) = \varphi(x,-x),\ x \geqslant 0$. Решение этой задачи имеет вид

$$f(x_1,x_2) = \varphi(0,0)\frac{x_1!}{(\frac{x_1-x_2}{2})!(\frac{x_1+x_2}{2})!} +$$
$$+\sum_{k=-1}^{\frac{x_1+x_2-2}{2}} (\varphi(k+2,k+2) - \varphi(k+1,k+1))\frac{(x_1-k-2)!}{(\frac{x_1-x_2}{2})!(\frac{x_1+x_2-2k-4}{2})!} +$$
$$+\sum_{k=-1}^{\frac{x_1-x_2-2}{2}} (\varphi(k+2,-k-2) - \varphi(k+1,-k-1))\frac{(x_1-k-2)!}{(\frac{x_1-x_2-2k-4}{2})!(\frac{x_1+x_2}{2})!}.$$

Список литературы

[1] M.Bousquet-Mélou, M.Petkovšek, Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case, *Discrete Mathematics*, **225**(2000), 51–75.

[2] Е.К.Лейнартас, Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений, *Сибирский математический журнал*, **48**(2007), №2, 335–340.

[3] T.Mansour, Counting peaks at height k in a Dyck path, *Journal of Integer Sequences*, **5**(2002), 1–10.

[4] D.Merlini, Generating functions for the area below some lattice paths, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science AC, 2003, 217–228.

[5] M.Forsberg, M.Passare, A.Tsikh, Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas, *Advances in Math*, **151**(2000), 45–70.

[6] M.Brion, M.Vergne, Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes, *Journal of AMS*, **10**(1997), №4, 797–833

Cauchy Problem for Multidimensional Difference Equations in Lattice Cones

Tatyana I. Nekrasova

We formulated condition ensuring the existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem for multidimensional linear differential equations with constant coefficients in the lattice cone. Based on the concept of a fundamental solution we deduced the formulae for solution of this problem.

Keywords: multidimensional difference equation, Cauchy problem.