Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(4), 527–546

УДК 513.88

Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре

Валерий В. Карачик*
Южно-Уральский государственный университет,
Ленина, 76, Челябинск, 454080,
Россия

Получена 21.03.2012, окончательный вариант 01.04.2012, принята к печати 21.06.2012

Найдено полиномиальное решение задачи Дирихле для неоднородного 3-гармонического уравнения с полиномиальной правой частью и полиномиальными граничными данными в единичном шаре.

Ключевые слова: 3-гармоническое уравнение, формула Альманси, гармонические полиномы, задача Дирихле, полиномиальные решения.

Введение

Классическое представление Альманси [1] для полигармонической функции $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x) = H_0(x) + |x|^{2s}H_1(x) + \cdots + |x|^{2s}H_s(x), \tag{1}$$

где $H_k(x)$ — некоторые гармонические функции. Оно успешно применяется при построении решений модельных задач для гармонического, бигармонического и полигармонического уравнений. Имеются многочисленные работы, посвященные обобщению представления Альманси на дифференциальные операторы, отличные от оператора Лапласа, например [2–4]. В настоящей работе представления Альманси (1) сначала применяются для построения решения однородной задачи Дирихле для неоднородного 3-гармонического уравнения $\Delta^3 u(x) = Q(x)$ (раздел 1), а затем и для построения решения общей задачи Дирихле для неоднородного 3-гармонического уравнения в единичном шаре (раздел 2).

Для построения решения конкретной задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения традиционным способом (см., например, [5, с.200]) при полиномиальных граничных данных (f_0, f_1 и f_2 — следы полиномов степени k) поступают по следующей схеме. Берут полную систему ортонормальных на единичной сфере $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ однородных степени $i \leq k$ гармонических полиномов $G_j^i(x)$, $j = 1, \ldots, h_i$, где $h_i = (1 + 2i/(n-2))\binom{i+n-3}{n-3}$ (например, систему из [6]), составляют 3-гармонические полиномы вида $G_j^i(x)$, $|x|^2 G_j^i(x)$ и $|x|^4 G_j^i(x)$ и ищут решение задачи Дирихле в форме

$$u(x) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{h_i}\left(C_j^i + D_j^i|x|^2 + E_j^i|x|^4\right)G_j^i(x).$$

Неизвестные коэффициенты легко определяются из уравнений

$$C_j^i + D_j^i + E_j^i = \int_{\partial\Omega} G_j^i(s) f_0(s)\,ds, \quad iC_j^i + (i+2)D_j^i + (i+4)E_j^i = \int_{\partial\Omega} G_j^i(s) f_1(s)\,ds,$$

$$i(i-1)C_j^i + (i+2)(i+1)D_j^i + (i+4)(i+3)E_j^i = \int_{\partial\Omega} G_j^i(s) f_2(s)\,ds,$$

*karachik@susu.ru

где $j = 1, \dots, h_i$ и $0 \leqslant i \leqslant k$. Определитель этой системы — это определитель Вандермонда $W[i, i+2, i+4]$ с факториальными степенями. При большой размерности пространства n и степени полиномов k такая процедура довольно сложна даже при простых полиномах f_0, f_1 и f_2, поскольку нужно вычислять много поверхностных интегралов и $h_k \sim 2k^{n-2}/(n-2)!$, $k \to \infty$. В данной работе предлагается иной способ построения полиномиального решения задачи Дирихле, требующий лишь нахождения степеней оператора Лапласа от некоторых вспомогательных полиномов.

В работе [7] с помощью формулы Альманси были построены полиномиальные решения уравнения Пуассона $\Delta u(x) = Q(x)$, полигармонического уравнения $\Delta^m u(x) = Q(x)$ и неоднородного уравнения Гельмгольца $\Delta u(x) + \lambda u = Q(x)$, где $Q(x)$ — произвольный полином. На этой основе в работе [8] были построены полиномиальные решения задачи Дирихле, а также обобщенной третьей краевой задачи для уравнения Пуассона, а в работе [9] исследовалась задача Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре. Настоящая работа является продолжением этих исследований на задачу Дирихле для 3-гармонического уравнения $\Delta^3 u(x) = Q(x)$ в единичном шаре Ω.

В разделе 2 настоящей работы с помощью исследования свойств представлений Альманси, описанных в леммах 1–3, в лемме 5 строится решение однородной задачи Дирихле для неоднородного 3-гармонического с простейшей правой частью. Затем в теореме 1 строится решение этой же задачи с произвольной правой частью, а в теореме 2 это решение упрощается. В теоремах 2 и 3 будут даны формулы (21) и (25), позволяющие легко вычислять полиномиальное решение однородной задачи Дирихле для неоднородного 3-гармонического уравнения. В разделе 2 в теореме 6, на основании теорем 3, 4 и 5 получена формула (43) для представления полиномиального решения общей задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения с полиномиальными данными. Решения всех рассмотренных задач иллюстрируются примерами 2–5. Полученные полиномиальные решения для записи их в обычном виде требуют вычисления степеней оператора Лапласа от некоторых многочленов, определяемых данными краевой задачи. Эта процедура облегчается с помощью применения символьных вычислений на компьютере (см. примеры 1 и 6).

1. Полиномиальное решение однородной задачи Дирихле для неоднородного 3-гармонического уравнения

Рассмотрим следующую однородную краевую задачу для неоднородного 3-гармонического уравнения в единичном шаре $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

$$\Delta^3 u(x) = Q(x), \quad x \in \Omega; \tag{2}$$

$$u_{|\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}_{|\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

с полиномиальной правой частью $Q(x)$ и при $n > 2$. В работе [7, теорема 3] установлено, что некоторое полиномиальное решение 3-гармонического уравнения (2) можно записать в виде

$$u(x) = \frac{|x|^6}{2 \cdot 4!!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+6)!!} \int_0^1 (1-\alpha)^{k+2} \alpha^{k+n/2-1} (-\Delta)^k Q(\alpha x)\, d\alpha. \tag{4}$$

Предположим, что $Q(x) = Q_m(x)$ — однородный полином степени m. В [7, теорема 4] показано, что в этом случае решение (4) может быть записано также в виде

$$u(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(s+2)(s+1)|x|^{2s+6} \Delta^s Q_m(x)}{2(2,2)_{s+3}(2m-2s+n,2)_{s+3}}. \tag{5}$$

где $(a,b)_k = a(a+b)\cdots(a+(k-1)b)$ с соглашением $(a,b)_0 = 1$. В знаменателе дроби под знаком суммы стоит выражение $(2m-2s+n,2)_{s+3} = (2m-2s+n)\cdots(2m+n+4)$, которое не обращается в нуль, поскольку $2s \leqslant m$. В [7, теорема 1] установлено, что некоторое полиномиальное решение уравнение Пуассона $\Delta v = Q(x)$ имеет вид

$$v(x) = \frac{|x|^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1(1-\alpha)^k\alpha^{k+n/2-1}(-\Delta)^kQ(\alpha x)\,d\alpha. \tag{6}$$

Кроме этого, в [7, теорема 2] показано, что при $Q(x) = Q_m(x)$ решение (6) может быть записано в ином виде:

$$v(x) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{|x|^{2s+2}\Delta^sQ_m(x)}{(2,2)_{s+1}(2m-2s+n,2)_{s+1}}. \tag{7}$$

Введем в рассмотрение следующий оператор:

$$\Delta_{-m} = \frac{|x|^{2m}}{2(2m-2)!!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2m)!!}\int_0^1(1-\alpha)^{k+m-1}\alpha^{k+n/2-1}(-\Delta)^k\cdot(\alpha x)\,d\alpha.$$

В [7, теорема 3] установлено, что полином $u(x) = \Delta_{-k}Q(x)$ является решением полигармонического уравнения $\Delta^ku = Q(x)$, т.е. $\Delta^k\Delta_{-k}Q(x) = Q(x)$. Тогда решение (4) можно записать более коротко в виде $u(x) = \Delta_{-3}Q(x)$.

Лемма 1. *Пусть $Q_l(x)$ — однородный полином степени l, тогда справедливо равенство*

$$(\Delta_{-1})^mQ_l(x) = |x|^{2m}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{k+m-1}{m-1}\frac{|x|^{2k}\Delta^kQ_l(x)}{(2,2)_{k+m}(n+2l-2k,2)_{k+m}}.$$

В [9, лемма 1] доказано, что лемма 1 верна при $m = 2$, а в [7, теорема 2] установлено, что она верна и при $m = 1$.

Доказательство. В работе [9, теорема 3] доказано, что $\Delta_{-m} = \Delta_{-(m-1)}\Delta_{-1}$, а значит, по индукции $\Delta_{-m} = (\Delta_{-1})^m$. Кроме того, в [9, теорема 4] установлено, что

$$\Delta_{-m}Q_l(x) = |x|^{2m}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{k+m-1}{m-1}\frac{|x|^{2k}\Delta^kQ_l(x)}{(2,2)_{k+m}(n+2l-2k,2)_{k+m}}.$$

Поэтому

$$(\Delta_{-1})^mQ_l(x) = \Delta_{-m}Q_l(x) = |x|^{2m}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{k+m-1}{m-1}\frac{|x|^{2k}\Delta^kQ_l(x)}{(2,2)_{k+m}(n+2l-2k,2)_{k+m}}.$$

□

Рассмотрим полигармоническое уравнение со специальной правой частью

$$\Delta^ku = |x|^{2m}\cdot P_s(x), \quad x \in D, \tag{8}$$

где $P_s(x)$ — однородный гармонический полином степени s, а $D \subset \mathbb{R}^n$ — звездная область с центром в начале координат. Из результатов работы [8, теорема 3] следует, что решение уравнения $\Delta v = |x|^{2m}\cdot P_s(x)$, записанное в форме (7), имеет вид

$$v(x) = \frac{|x|^{2m+2}\cdot P_s(x)}{(2m+2)(2m+2s+n)} \tag{9}$$

или

$$\Delta_{-1}\big(|x|^{2m}\cdot P_s(x)\big)=\frac{|x|^{2m+2}\cdot P_s(x)}{(2m+2)(2m+2s+n)}.$$

Справедливо более общее утверждение.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\Delta_{-k}\big(|x|^{2m}\cdot P_s(x)\big)=\frac{|x|^{2m+2k}\cdot P_s(x)}{(2m+2,2)_k(2m+2s+n,2)_k}. \tag{10}$$

Доказательство. В работе [9, теорема 3] доказано, что $\Delta_{-k}=\Delta_{-(k-1)}\Delta_{-1}$, а значит,

$$\Delta_{-k}\big(|x|^{2m}\cdot P_s(x)\big)=(\Delta_{-1})^k\big(|x|^{2m}\cdot P_s(x)\big)=(\Delta_{-1})^{k-1}\Delta_{-1}\big(|x|^{2m}\cdot P_s(x)\big)=$$
$$=\frac{1}{(2m+2)(2m+2s+n)}(\Delta_{-1})^{k-1}\big(|x|^{2m+2}\cdot P_s(x)\big)=$$
$$=\cdots=\frac{1}{(2m+2,2)_k(2m+2s+n,2)_k}|x|^{2m+2k}\cdot P_s(x).$$

□

Разложим однородный полином $Q_m(x)$ с помощью формулы Альманси (1) на слагаемые вида $|x|^{2s}R_{m-2s}(x)$:

$$Q_m(x)=R_m(x)+|x|^2R_{m-2}(x)+\cdots+|x|^{2s}R_{m-2s}(x),\quad m-2s\ge 0. \tag{11}$$

Применим к обеим частям оператор Δ_{-k}. Тогда по лемме 2 решение уравнения $\Delta^k v(x)=Q_m(x)$, задаваемое формулой (5), имеет вид

$$v(x)=\sum_{s=0}^{[m/2]}\frac{|x|^{2s+2k}R_{m-2s}(x)}{(2s+2,2)_k(2m-2s+n,2)_k}, \tag{12}$$

где $[a]$ — целая часть числа a, а однородные гармонические полиномы $R_k(x)$ определяются формулой Альманси (11). Из явного вида полиномов $R_k(x)$, найденного в [10], аналогично формуле (7) верно утверждение.

Лемма 3 ([8])**.** *Гармонические полиномы $R_{m-2k}(x)$ в разложении однородного полинома $Q_m(x)$ по формуле Альманси* (11) *имеют вид*

$$R_{m-2k}(x)=\frac{2m-4k+n-2}{(2,2)_k}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s|x|^{2s}\Delta^{s+k}Q_m(x)}{(2,2)_s(2m-4k-2s+n-2,2)_{s+k+1}}.$$

Исследуем задачу Дирихле (2)–(3) при $Q(x)=|x|^{2s}R_{m-2s}(x)$. Рассмотрим оператор

$$\Lambda u(x)=\sum_{k=1}^{n}x_k u_{x_k}(x),$$

который определен на функциях из $C^1(\Omega)$. Он обладает легко проверяемыми свойствами: если функция u — гармоническая в Ω, то функция Λu тоже гармоническая в Ω; верно равенство $\Lambda(uv)=v\Lambda u+u\Lambda v$; если $P_m(x)$ — однородный полином степени m, то $\Lambda P_m(x)=mP_m(x)$. Сформулируем еще одно важное свойство оператора Λ.

Лемма 4. *На единичной сфере $\partial\Omega$ имеет место равенство*

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}_{|\partial\Omega} = \Lambda^{[k]} u_{|\partial\Omega},$$

где факториальная степень $t^{[k]}$ определяется равенством $t^{[k]} = t(t-1)\cdots(t-k+1)$ [11].

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{|x|} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}_{|\partial\Omega} = \frac{1}{|x|}\Lambda u(x)_{|\partial\Omega},$$

поэтому

$$\frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k}_{|\partial\Omega} = \Big(\frac{1}{|x|}\Lambda\Big)^k u(x)_{|\partial\Omega}. \tag{13}$$

Докажем, что

$$\Big(\frac{1}{|x|}\Lambda\Big)^k = \frac{1}{|x|^k}\Lambda^{[k]}. \tag{14}$$

При $k = 1$ это равенство очевидно. Пусть оно верно при $k = l$. Докажем его верность при $k = l+1$. Действительно, поскольку $\Lambda(uv) = v\Lambda u + u\Lambda v$ и $\Lambda|x|^\alpha = \alpha|x|^\alpha$, то

$$\Big(\frac{1}{|x|}\Lambda\Big)^{l+1} = \frac{1}{|x|}\Lambda\Big(\frac{1}{|x|^l}\Lambda^{[l]}\Big) = \frac{1}{|x|^{l+1}}\Big(-l\Lambda^{[l]} + \Lambda\Lambda^{[l]}\Big) = \frac{1}{|x|^{l+1}}\Lambda^{[l]}(\Lambda - l) = \frac{1}{|x|^{l+1}}\Lambda^{[l+1]}.$$

Индукция доказана. На основании (14) из (13) находим

$$\frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k}_{|\partial\Omega} = \Big(\frac{1}{|x|}\Lambda\Big)^k u(x)_{|\partial\Omega} = \Lambda^{[k]} u(x)_{|\partial\Omega}.$$

Лемма доказана. □

Пусть $P_k(t) = \sum\limits_{s=0}^{k} c_s t^s$ — некоторый многочлен. Определим факториальный многочлен, соответствующий многочлену $P_k(t)$ равенством $P_{[k]}(t) = \sum\limits_{s=0}^{k} c_s t^{[s]}$ [12].

Следствие 1. Справедливо равенство

$$P_k\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big) u_{|\partial\Omega} = P_{[k]}(\Lambda) u_{|\partial\Omega}.$$

Лемма 5. *Решение $v_s(x)$ однородной задачи Дирихле* (2)-(3) *при* $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$ *имеет вид*

$$v_s(x) = C_{m,s}\left(|x|^{2s+6} - \frac{(s+1)(s+2)}{2} + (s+1)(s+3)|x|^2 - \frac{(s+2)(s+3)}{2}|x|^4\right) R_{m-2s}(x), \tag{15}$$

где $1/C_{m,s} = (2s+2,2)_3(2m-2s+n,2)_3$.

Доказательство. Пусть полином $v_s(x)$ определяется формулой

$$v_s(x) = C_{m,s}\left(|x|^{2s+6} R_{m-2s}(x) - H^0_{m-2s}(x) - |x|^2 H^1_{m-2s}(x) - |x|^4 H^2_{m-2s}(x)\right), \tag{16}$$

где $H^i_{m-2s}(x)$ — однородные гармонические полиномы степени $m-2s$. Используя лемму 2, получим равенство $\Delta^3 v_s(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$. Будем подбирать полиномы $H^i_{m-2s}(x)$ так, чтобы выполнялись однородные граничные условия (3). Тогда будем иметь

$$R_{m-2s}(x) - H^0_{m-2s}(x) - H^1_{m-2s}(x) - H^2_{m-2s}(x) = 0 \Rightarrow v_{s|\partial\Omega} = 0.$$

Используя лемму 4, получим

$$(m+6)R_{m-2s}(x) - (m-2s)H^0_{m-2s}(x) - (m-2s+2)H^1_{m-2s}(x) - (m-2s+4)H^2_{m-2s}(x) = 0,$$
$$\Rightarrow (\Lambda^{[1]} v_s)_{|\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_s}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = 0,$$
$$(m+6)(m+5)R_{m-2s}(x) - (m-2s)(m-2s-1)H^0_{m-2s}(x) -$$
$$-(m-2s+2)(m-2s+1)H^1_{m-2s}(x) - (m-2s+4)(m-2s+3)H^2_{m-2s}(x) = 0,$$
$$\Rightarrow (\Lambda^{[2]} v_s)_{|\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v_s}{\partial \nu^2}_{|\partial\Omega} = 0,$$

и поэтому необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} H^0_{m-2s}(x) + H^1_{m-2s}(x) + H^2_{m-2s}(x) = R_{m-2s}(x), \\ (m-2s)H^0_{m-2s}(x) + (m-2s+2)H^1_{m-2s}(x) + (m-2s+4)H^2_{m-2s}(x) = (m+6)R_{m-2s}(x), \\ (m-2s)(m-2s-1)H^0_{m-2s}(x) + (m-2s+2)(m-2s+1)H^1_{m-2s}(x) + \\ +(m-2s+4)(m-2s+3)H^2_{m-2s}(x) = (m+6)(m+5)R_{m-2s}(x). \end{gathered} \tag{17}$$

Обозначим для краткости $\delta = m-2s$. Тогда определитель $\mathcal{D}$ этой системы уравнений относительно $H^i_{m-2s}(x)$ имеет вид

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta & \delta+2 & \delta+4 \\ \delta(\delta-1) & (\delta+2)(\delta+1) & (\delta+4)(\delta+3) \end{vmatrix}.$$

Если прибавить к третьей строке определителя вторую, то будем иметь определитель Вандермонда $\mathcal{D} = W[\delta, \delta+2, \delta+4] = (\delta+4-\delta)(\delta+2-\delta)(\delta+4-\delta-2) = 16$.

Обозначим через $\mathcal{D}_i$ определитель, получающийся из определителя $\mathcal{D}$ заменой столбца с номером i на столбец свободных членов системы (17). Тогда имеем

$$\mathcal{D}_0 = R_{m-2s}(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m+6 & \delta+2 & \delta+4 \\ (m+6)(m+5) & (\delta+2)(\delta+1) & (\delta+4)(\delta+3) \end{vmatrix}.$$

Аналогично вычислению определителя $\mathcal{D}$ запишем $\mathcal{D}_0/R_{m-2s}(x) = W[m+6, \delta+2, \delta+4] = (\delta+4-m-6)(\delta+2-m-6)(\delta+4-\delta-2) = (\delta-m-2)(\delta-m-4)2 = 8(s+1)(s+2)$.

Вычисления показывают, что

$$\mathcal{D}_1 = R_{m-2s}(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta & m+6 & \delta+4 \\ \delta(\delta-1) & (m+6)(m+5) & (\delta+4)(\delta+3) \end{vmatrix}$$

и, значит, $\mathcal{D}_1/R_{m-2s}(x) = W[\delta, m+6, \delta+4] = (\delta+4-\delta)(\delta+4-m-6)(m+6-\delta) = 4(\delta-m-2)(m+6-\delta) = -16(s+1)(s+3)$. Вычисления также показывают, что

$$\mathcal{D}_2 = R_{m-2s}(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta & \delta+2 & m+6 \\ \delta(\delta-1) & (\delta+2)(\delta+1) & (m+6)(m+5) \end{vmatrix}$$

и, значит, $\mathcal{D}_2/R_{m-2s}(x) = W[\delta, \delta+2, m+6] = (m+6-\delta)(\delta+2-\delta)(m+6-\delta-2) = (2s+6)2(2s+4) = 8(s+2)(s+3)$. Отсюда сразу следует, что

$$H^0_{m-2s}(x) = \frac{\mathcal{D}_0}{\mathcal{D}} = \frac{(s+1)(s+2)}{2} R_{m-2s}(x),$$
$$H^1_{m-2s}(x) = \frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}} = -(s+1)(s+3) R_{m-2s}(x),$$
$$H^2_{m-2s}(x) = \frac{\mathcal{D}_2}{\mathcal{D}} = \frac{(s+2)(s+3)}{2} R_{m-2s}(x).$$

Подставляя полученные значения $H^i_{m-2s}(x)$ в формулу (16), получим (15). □

Теперь можно построить полином $u_0(x)$ — решение задачи Дирихле (2)-(3) при $Q(x) = Q_m(x)$. Раскладывая однородный полином $Q_m(x)$ по формуле (11), а затем применяя к каждому слагаемому лемму 5 (s заменяется на k, и решение каждой такой однородной задачи обозначается через $v_k(x)$), получим решение нашей задачи в виде

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} v_k(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} C_{m,k} \Big(|x|^{2k+6} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} + \\ + (k+1)(k+3)|x|^2 - \frac{(k+2)(k+3)}{2}|x|^4 \Big) R_{m-2k}(x),$$

где $C_{m,k}$ определены как и в лемме 5. Как было доказано выше, полином

$$\sum_{k=0}^{[m/2]} C_{m,k} |x|^{2k+6} R_{m-2k}(x),$$

равный полиному из (12), записывается в виде (5). Поэтому имеем

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} v_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)|x|^{2k+6}\Delta^k Q_m(x)}{2(2,2)_{k+3}(2m-2k+n,2)_{k+3}} - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[m/2]} C_{m,k} \left((k+1)(k+2) - 2(k+1)(k+3)|x|^2 + (k+2)(k+3)|x|^4 \right) R_{m-2k}(x). \quad (18)$$

Преобразуем полученное решение $u_0(x)$.

Теорема 1. *Пусть* $A = m + n/2$ *и*

$$A_{s,\alpha} = (s-\alpha+1)(s-\alpha+2)(A-2s+2\alpha-1)(A-2s+\alpha-3)(A-2s+\alpha-2) + \\ + 2(s-\alpha+2)\alpha(A-2s+2\alpha-3)(A-2s+\alpha-3)(A-s+\alpha+2) + \\ + \alpha(\alpha-1)(A-2s+2\alpha-5)(A-s+\alpha+2)(A-s+\alpha+1),$$

тогда справедливо равенство

$$u_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{2\cdot 4^{s+3}} \sum_{\alpha=0}^{s+3} \frac{(-1)^{\alpha+1} A_{s,\alpha}|x|^{2\alpha}}{\alpha!(s-\alpha+3)!(A-2s+\alpha-3)_{s+6}}, \quad (19)$$

где $(a)_s = a(a+1)\cdots(a+s-1)$ *— символ Похгаммера.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 3 для преобразования многочлена $u_0(x)$ из (18). Учитывая, что $1/C_{m,s} = (2s+2,2)_3(2m-2s+n,2)_3$, а также $(2,2)_{k+3} = (2k+2)(2k+4)(2k+6)(2,2)_k$ и $(2m+n-4k-2s-2,2)_{s+k+4} = (2m-2k+n)(2m-2k+n+2)(2m-2k+n+4)(2m+n-4k-2s-2,2)_{s+k+1}$, перепишем это решение в виде

$$u_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{(s+1)(s+2)|x|^{2s+6}\Delta^s Q_m(x)}{2(2,2)_{s+3}(2m-2s+n,2)_{s+3}} - \\ - \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(k+1)(k+2)-2(k+1)(k+3)|x|^2+(k+2)(k+3)|x|^4}{2(2,2)_{k+3}} \times \\ \times \sum_{2s+2k\leqslant m} \frac{(-1)^s(2m+n-4k-2)|x|^{2s}\Delta^{s+k}Q_m(x)}{(2,2)_s(2m+n-4k-2s-2,2)_{s+k+4}}.$$

Обозначим $s+k=\alpha$ и учтем при этом, что $2(2,2)_{k+3}(2,2)_s = 2^{\alpha+4}(\alpha-s+3)!s!$ и $(2m+n-4k-2s-2,2)_{s+k+4} = 2^{\alpha+4}(A-2\alpha+s-1)_{\alpha+4}$, где $A=m+n/2$. Тогда, преобразовывая повторное суммирование в предыдущей сумме, приведем $u_0(x)$ к виду

$$u_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{(s+1)(s+2)|x|^{2s+6}\Delta^s Q_m(x)}{2\cdot 4^{s+3}(s+3)!(A-s)_{s+3}} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\Delta^\alpha Q_m(x)}{2\cdot 4^{\alpha+3}} \sum_{s=0}^{\alpha}(-1)^{s+1} \times \\ \times (A-2\alpha+2s-1)\frac{h_0(\alpha-s)|x|^{2s}-h_1(\alpha-s)|x|^{2s+2}+h_2(\alpha-s)|x|^{2s+4}}{(\alpha-s+3)!s!(A-2\alpha+s-1)_{\alpha+4}},$$

где $h_0(k)=(k+1)(k+2)$, $h_1(k)=2(k+1)(k+3)$, $h_2(k)=(k+2)(k+3)$. Заменим в двукратной сумме α на s, s на α и объединим внешние суммы в одну сумму. Разделим внутреннюю сумму на три слагаемых (в первую и во вторую внутренние суммы добавлены нулевые слагаемые):

$$u_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{2\cdot 4^{s+3}}\Big((-1)^s \frac{(s+1)(s+2)|x|^{2s+6}}{(s+3)!(A-s)_{s+3}} + \\ + \sum_{\alpha=0}^{s+2}(-1)^{\alpha+1}\frac{(s-\alpha+1)(s-\alpha+2)(A-2s+2\alpha-1)|x|^{2\alpha}}{(s-\alpha+3)!\alpha!(A-2s+\alpha-1)_{s+4}} - \\ - \sum_{\alpha=0}^{s+1}(-1)^{\alpha+1}\frac{2(s-\alpha+1)(s-\alpha+3)(A-2s+2\alpha-1)|x|^{2\alpha+2}}{(s-\alpha+3)!\alpha!(A-2s+\alpha-1)_{s+4}} + \\ + \sum_{\alpha=0}^{s}(-1)^{\alpha+1}\frac{(s-\alpha+2)(s-\alpha+3)(A-2s+2\alpha-1)|x|^{2\alpha+4}}{(s-\alpha+3)!\alpha!(A-2s+\alpha-1)_{s+4}}\Big). \quad (20)$$

Преобразуем выражение в больших круглых скобках, которое обозначим J_s. В нем в первой сумме выделим отдельно первые два члена при $\alpha=0$ и $\alpha=1$, во второй сумме выделим отдельно первый член при $\alpha=0$ и сдвинем индекс суммирования $\alpha\to\alpha-1$, а в третьей сумме сдвинем индекс суммирования $\alpha\to\alpha-2$, получим

$$J_s = (-1)^s \frac{(s+1)(s+2)|x|^{2s+6}}{(s+3)!(A-s)_{s+3}} + \sum_{\alpha=2}^{s+2}(-1)^{\alpha+1}|x|^{2\alpha} \times \\ \times \Big[\frac{(s-\alpha+1)(s-\alpha+2)(A-2s+2\alpha-1)}{(s-\alpha+3)!\alpha!(A-2s+\alpha-1)_{s+4}} + \frac{2\alpha(s-\alpha+2)(A-2s+2\alpha-3)}{(s-\alpha+3)!\alpha!(A-2s+\alpha-2)_{s+4}} +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(A-2s+2\alpha-5)}{(s-\alpha+3)!\alpha!(A-2s+\alpha-3)_{s+4}}\Big]-\frac{(s+1)(s+2)(A-2s-1)}{(s+3)!(A-2s-1)_{s+4}}+ \\ +\frac{s(s+1)(A-2s+1)|x|^2}{(s+2)!(A-2s)_{s+4}}+\frac{2(s+1)(s+3)(A-2s-1)|x|^2}{(s+3)!(A-2s-1)_{s+4}}.$$

Если обозначить $A_{s,\alpha}=(s-\alpha+1)(s-\alpha+2)(A-2s+2\alpha-1)(A-2s+\alpha-3)(A-2s+\alpha-2)+2(s-\alpha+2)\alpha(A-2s+2\alpha-3)(A-2s+\alpha-3)(A-s+\alpha+2)+\alpha(\alpha-1)(A-2s+2\alpha-5)(A-s+\alpha+2)(A-s+\alpha+1)$ и привести подобные члены, то будем иметь

$$J_s=\frac{(-1)^s(s+1)(s+2)|x|^{2s+6}}{(s+3)!(A-s)_{s+3}}+\sum_{\alpha=2}^{s+2}\frac{(-1)^{\alpha+1}A_{s,\alpha}|x|^{2\alpha}}{\alpha!(s-\alpha+3)!(A-2s+\alpha-3)_{s+6}}- \\ -\frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)!(A-2s)_{s+3}}+\frac{(s+1)|x|^2}{(s+2)!(A-2s)_{s+4}}\big(s(A-2s+1)+2(A-s+3)\big)$$

или

$$J_s=-\frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)!(A-2s)_{s+3}}+\frac{(s+1)(s+2)(A-2s+3)|x|^2}{(s+2)!(A-2s)_{s+4}}+ \\ +\sum_{\alpha=2}^{s+2}\frac{(-1)^{\alpha+1}A_{s,\alpha}|x|^{2\alpha}}{\alpha!(s-\alpha+3)!(A-2s+\alpha-3)_{s+6}}+\frac{(-1)^s(s+1)(s+2)|x|^{2s+6}}{(s+3)!(A-s)_{s+3}}.$$

Нетрудно подсчитать, что $A_{s,0}=(s+1)(s+2)(A-2s-1)(A-2s-2)(A-2s-3)$ и поэтому значение выражения под знаком суммы при $\alpha=0$ равно

$$-\frac{(s+1)(s+2)(A-2s-1)(A-2s-2)(A-2s-3)}{(s+3)!(A-2s-3)_{s+6}}=-\frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)!(A-2s)_{s+3}},$$

т.е. первый член выражения, задающего J_s, может быть включен в сумму при $\alpha=0$. Вычисления показывают, что

$$A_{s,1}=s(s+1)(A-2s+1)(A-2s-2)(A-2s-1)+2(s+1)(A-2s-1)(A-2s-2)(A-s+3)= \\ =(s+1)(A-2s-1)(A-2s-2)(A-2s+3)(s+2).$$

Значит, значение выражения под знаком суммы при $\alpha=1$ равно

$$|x|^2\frac{(s+1)(s+2)(A-2s-1)(A-2s-2)(A-2s+3)}{(s+2)!(A-2s-2)_{s+6}}=\frac{(s+1)(s+2)(A-2s+3)|x|^2}{(s+2)!(A-2s)_{s+4}},$$

т.е. второй член выражения, задающего J_s, также может быть включен в сумму при $\alpha=1$. Таким образом, запишем

$$J_s=\sum_{\alpha=0}^{s+2}\frac{(-1)^{\alpha+1}A_{s,\alpha}|x|^{2\alpha}}{\alpha!(s-\alpha+3)!(A-2s+\alpha-3)_{s+6}}+\frac{(-1)^s(s+1)(s+2)|x|^{2s+6}}{(s+3)!(A-s)_{s+3}}.$$

Теперь вычислим значение выражения под знаком суммы при $\alpha=s+3$. Так как

$$A_{s,s+3}=2(A+5)(A-s)(A-s+1)-2(s+3)(A+3)(A-s)(A+5)+ \\ +(s+3)(s+2)(A+1)(A+5)(A+4)=(A+5)(-2(A-s)(A+4)(s+2)+ \\ +(s+3)(s+2)(A+1)(A+4))=(A+5)(A+4)(s+2)((s+3)(A+1)-2(A-s))= \\ =(A+5)(A+4)(A+3)(s+2)(s+1),$$

то имеем

$$\frac{(-1)^{s+4}A_{s,s+3}|x|^{2s+6}}{(s+3)!(A-s)_{s+6}} = \frac{(-1)^s(s+1)(s+2)(A+5)(A+4)(A+3)|x|^{2s+6}}{(s+3)!(A-s)_{s+6}} = \\ = \frac{(-1)^s(s+1)(s+2)|x|^{2s+6}}{(s+3)!(A-s)_{s+3}}.$$

Поэтому можно записать $J_s = \sum\limits_{\alpha=0}^{s+3} \dfrac{(-1)^{\alpha+1}A_{s,\alpha}|x|^{2\alpha}}{\alpha!(s-\alpha+3)!(A-2s+\alpha-3)_{s+6}}$.

Подставляя вычисленное значение J_s в (20), получим (19). □

Из полученной формулы (19) сразу не видно, что полином $u_0(x)$, находимый из (19), удовлетворяет однородным условиям (3) $u_0(x)_{|x|=1} = 0$, $\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial \nu}_{|x|=1} = 0$, $\dfrac{\partial^2 u_0(x)}{\partial \nu^2}_{|x|=1} = 0$.

Теорема 2. *Решение $u_0(x)$ задачи (2)-(3) при $Q(x) = Q_m(x)$ можно записать в виде*

$$u_0(x) = (|x|^2-1)^3 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1)(s+2)\Delta^s Q_m(x)}{2\cdot 4^{s+3}(s+3)!} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \frac{|x|^{2k}}{(A-2s+k)_{s+3}}, \tag{21}$$

где, как и в теореме 1, для краткости обозначено $A = m + n/2$.

Доказательство. Обозначим полином, определяемый формулой (21), через $v(x)$. Внесем многочлен $(|x|^2-1)^3 = |x|^6 - 3|x|^4 + 3|x|^2 - 1$ под знак внутренней суммы и разобьем эту сумму на четыре слагаемых. Заменяя $k \to k-1$ во второй сумме, $k \to k-2$ в третьей сумме и $k \to k-3$ в четвертой сумме, получим

$$v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{2\cdot 4^{s+3}(s+3)} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{-|x|^{2k} + 3|x|^{2k+2} - 3|x|^{2k+4} + |x|^{2k+6}}{k!(s-k)!(A-2s+k)_{s+3}} = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{2\cdot 4^{s+3}(s+3)} \Big(\sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^{k+1}|x|^{2k}}{k!(s-k)!(A-2s+k)_{s+3}} + \\ + \sum_{k=1}^{s+1} \frac{3(-1)^{k-1}|x|^{2k}}{(k-1)!(s-k+1)!(A-2s+k-1)_{s+3}} + \sum_{k=2}^{s+2} \frac{3(-1)^{k-1}|x|^{2k}}{(k-2)!(s-k+2)!(A-2s+k-2)_{s+3}} + \\ + \sum_{k=3}^{s+3} \frac{(-1)^{k-3}|x|^{2k}}{(k-3)!(s-k+3)!(A-2s+k-3)_{s+3}} \Big)$$

или

$$v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{2\cdot 4^{s+3}(s+3)} \Big(\sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^{k+1}(s-k+3)(s-k+2)(s-k+1)|x|^{2k}}{k!(s-k+3)!(A-2s+k)_{s+3}} + \\ + \sum_{k=1}^{s+1} \frac{3(-1)^{k+1}k(s-k+3)(s-k+2)|x|^{2k}}{k!(s-k+3)!(A-2s+k-1)_{s+3}} + \sum_{k=2}^{s+2} \frac{3(-1)^{k+1}k(k-1)(s-k+3)|x|^{2k}}{k!(s-k+3)!(A-2s+k-2)_{s+3}} + \\ + \sum_{k=3}^{s+3} \frac{(-1)^{k+1}k(k-1)(k-2)|x|^{2k}}{k!(s-k+3)!(A-2s+k-3)_{s+3}} \Big).$$

Учитывая специфику членов у четырех рассматриваемых сумм в круглых скобках, суммирование можно взять в общих пределах от 0 до $s+3$

$$v(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{2\cdot 4^{s+3}(s+3)}\sum_{k=0}^{s+3}\frac{(-1)^{k+1}|x|^{2k}}{k!(s-k+3)!}\Big(\frac{(s-k+3)(s-k+2)(s-k+1)}{(A-2s+k)_{s+3}}+$$
$$+\frac{3k(s-k+2)(s-k+3)}{(A-2s+k-1)_{s+3}}+\frac{3k(k-1)(s-k+3)}{(A-2s+k-2)_{s+3}}+\frac{k(k-1)(k-2)}{(A-2s+k-3)_{s+3}}\Big).$$

Если обозначить

$$B_{s,k}=(s-k+3)(s-k+2)(s-k+1)(A-2s+k-3)(A-2s+k-2)(A-2s+k-1)+$$
$$+3k(s-k+2)(s-k+3)(A-2s+k-3)(A-2s+k-2)(A-s+k+2)+$$
$$+3k(k-1)(s-k+3)(A-2s+k-3)(A-s+k+1)(A-s+k+2)+$$
$$+k(k-1)(k-2)(A-s+k)(A-s+k+1)(A-s+k+2),$$

то получим

$$v(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{2\cdot 4^{s+3}(s+3)}\sum_{k=0}^{s+3}\frac{(-1)^{k+1}B_{s,k}|x|^{2k}}{k!(s-k+3)!(A-2s+k-3)_{s+6}}. \tag{22}$$

Рассмотрим $B_{s,k}$ и $A_{s,k}$ как многочлены от A, т.е. $B_{s,k}=B_{s,k}(A)$ и $A_{s,k}=A_{s,k}(A)$. Напомним, что

$$A_{s,k}=(s-k+2)(s-k+1)(A-2s+2k-1)(A-2s+k-3)(A-2s+k-2)+$$
$$+2(s-k+2)k(A-2s+2k-3)(A-2s+k-3)(A-s+k+2)+$$
$$+k(k-1)(A-2s+2k-5)(A-s+k+2)(A-s+k+1).$$

Нетрудно заметить, что степени этих многочленов равны трем и коэффициенты при A^3 с помощью факториальных степеней записываются в форме

$$A_{s,k}:(s-k+2)^{[2]}+2(s-k+2)^{[1]}k^{[1]}+k^{[2]}=(s+2)^{[2]},$$
$$B_{s,k}:(s-k+3)^{[3]}+3(s-k+3)^{[2]}k^{[1]}+3(s-k+3)^{[1]}k^{[2]}+k^{[3]}=(s+3)^{[3]}.$$

Здесь мы воспользовались биномиальной теоремой для факториальных степеней [11]. Видно, что старший коэффициент у $B_{s,k}(A)$ в $(s+3)$ раз больше. Вычислим значения этих многочленов в трех точках: $A_1=2s-k+3$, $A_2=s-k-2$, $A_3=2s-k+2$. Имеем

$$B_{s,k}(A_1)=k^{[3]}(s+5)^{[3]},\quad A_{s,k}(A_1)=k^{[3]}(s+5)^{[2]},$$
$$B_{s,k}(A_2)=-(s-k+3)^{[3]}(s+5)^{[3]}\quad A_{s,k}(A_2)=-(s-k+3)^{[3]}(s+5)^{[2]},$$
$$B_{s,k}(A_3)=-3k^{[2]}(s-k+3)(s+4)^{[2]}+k^{[3]}(s+4)^{[3]}=k^{[2]}(s+4)^{[2]}(ks-5s+5k-13),$$
$$A_{s,k}(A_3)=-2k^{[2]}(s-k+2)(s+4)^{[1]}+k^{[3]}(s+4)^{[2]}=k^{[2]}(s+4)^{[1]}(ks-5s+5k-13).$$

Отсюда, многочлен третьей степени $B_{s,k}(A)$ в трех различных точках имеет значения в $(s+3)$ раз больше, чем многочлен третьей степени $A_{s,k}(A)$. Старшие коэффициенты обладают тем же свойством. Значит, $B_{s,k}=(s+3)A_{s,k}$. Подставляя значение $B_{s,k}$ в (22) и сокращая на $(s+3)$, получим (19). Значит, $v(x)=u_0(x)$. □

Лемма 6. *Пусть функция $v(x)$, заданная в $\overline{\Omega}$, может быть записана в виде $v_0(x)=(|x|^2-1)^l S(x)$, где $S(x)\in C^{l-1}(\overline{\Omega})$ и $l\in\mathbb{N}$. Тогда она удовлетворяет условию*

$$P_{l-1}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)v(x)_{|\partial\Omega}=0,$$

где $P_{l-1}(t)$ — произвольный полином степени $l-1$, а значит, $v(x)$ удовлетворяет однородным условиям Дирихле на $\partial\Omega$:

$$v_{|\partial\Omega}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial\nu}_{|\partial\Omega}=0,\ \dots\ \frac{\partial^{l-1}v}{\partial\nu^{l-1}}_{|\partial\Omega}=0.$$

Доказательство. Действительно, в силу равенства $\Lambda(uv) = v\Lambda u + u\Lambda v$ можно записать

$$\Lambda v(x) = \Lambda(|x|^2-1)^l S(x) = lS(x)(|x|^2-1)^{l-1}\Lambda(|x|^2-1) + (|x|^2-1)^l\Lambda S(x) = \\ = (|x|^2-1)^{l-1}(2lS(x)|x|^2 + (|x|^2-1)\Lambda S(x)) \equiv (|x|^2-1)^{l-1}S_1(x),$$

где $S_1(x) \in C^{l-2}(\overline{\Omega})$ и, значит, $\Lambda v(x)_{|\partial\Omega} = 0$. Продолжая, аналогично найдем $\Lambda^{l-1}v(x) = \Lambda^{l-1}(|x|^2-1)^l S(x) = (|x|^2-1)S_{l-1}(x)$, где $S_{l-1}(x) \in C(\overline{\Omega})$ и, значит, $\Lambda^{l-1}v(x)_{|\partial\Omega} = 0$. Поэтому если $P_{l-1}(t)$ — произвольный полином степени $l-1$, то в силу следствия 1 из леммы 4 имеем

$$P_{l-1}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)v(x)_{|\partial\Omega} = P_{[l-1]}(\Lambda)v(x)_{|\partial\Omega} = 0.$$

□

На основании леммы 6 полином $u_0(x)$ из теоремы 2 удовлетворяет однородным условиям Дирихле (3).

Замечание 1. Формулы, задающие решение однородной задачи Дирихле для гармонического уравнения $u_1(x)$ [8], бигармонического уравнения $u_2(x)$ [9] и 3-гармонического уравнения $u_3(x)$ (21), очень похожи и могут быть записаны единообразно следующей формулой:

$$u_l(x) = (|x|^2-1)^l \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+l-1}{l-1} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+l}(s+l)!} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \frac{|x|^{2k}}{(m-2s+k+n/2)_{s+l}}$$

при $l = 1, 2, 3$.

Пример 1. Решение задачи Дирихле (2)–(3) при $Q_6(x) = x_1^3 x_2 x_3^2$, записанное в виде (21), легко вычисляется с помощью пакета "Mathematica" и имеет вид

$$u(x_1,x_2,x_3) = -\frac{x_1x_2(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)^3}{4655851200}\big(-1292 + 903x_1^4 - 252x_2^4 - 4921x_3^2 + 3213x_3^4 + \\ + 7x_1^2(-133 + 93x_2^2 - 2272x_3^2) + 7x_2^2(152 + 423x_3^2)\big).$$

Еще немного преобразуем многочлен $u_0(x)$, являющийся решением задачи Дирихле (2)–(3), при $Q(x) = Q_m(x)$ так, чтобы затем иметь возможность получить формулу для произвольного полинома $Q(x)$.

Лемма 7. *Имеет место равенство*

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2-1)^3}{16} \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(1-t|x|^2)^s(1-t)^{s+2}}{(2s)!!(2s+6)!!} \Delta^s Q_m(tx) t^{n/2-1}\, dt. \tag{23}$$

Доказательство. Пользуясь формулой (21), запишем

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2-1)^3}{16} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{2^s(2s+6)!!} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \frac{(s+1)(s+2)|x|^{2k}}{(A-2s+k)_{s+3}}, \tag{24}$$

где $A = m + n/2$. Преобразуем внутреннюю сумму в полученном выражении. Используя определение символа Похгаммера $(a)_k$ из теоремы 1, свойство гамма функции $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ и связь гамма $\Gamma(x)$ и бета $\mathrm{B}(x)$ функций Эйлера, можем записать

$$\frac{1}{(A-2s+k)_{s+3}} = \frac{1}{(A-2s+k)\cdots(A-s+k+2)} = \frac{\Gamma(m+n/2-2s+k)}{\Gamma(m+n/2-s+k+3)} =$$

$$= \frac{\mathrm{B}(s+3, m+n/2-2s+k)}{\Gamma(s+3)} = \frac{1}{(s+2)!}\int_0^1 (1-t)^{s+2} t^{m+n/2+k-2s-1}\,dt.$$

С помощью этого равенства запишем внутреннюю сумму в (24) в виде

$$\frac{1}{s!}\int_0^1 (1-t)^{s+2} t^{m+n/2-2s-1}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}|x|^{2k}t^k dt = \frac{1}{s!}\int_0^1 (1-t)^{s+2}(1-t|x|^2)^s\, t^{m-2s} t^{n/2-1}\,dt.$$

Следовательно, многочлен $u_0(x)$ можно записать в форме

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2-1)^3}{16}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(1-t)^{s+2}(1-t|x|^2)^s}{(2s+6)!!(2s)!!}\Delta^s Q_m(tx) t^{n/2-1}\,dt,$$

что совпадает с формулой (23). □

Получим решение задачи Дирихле (2)–(3) с неоднородным многочленом $Q(x)$.

Теорема 3. *Решение задачи Дирихле* (2)–(3) *можно записать в виде*

$$u(x) = \frac{(|x|^2-1)^3}{16}\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+2}}{(2s)!!(2s+6)!!}\Delta^s Q(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть $Q(x)$ — произвольный полином. Представим его в виде суммы однородных слагаемых $Q(x) = \sum\limits_m Q_m(x)$ и обозначим через $u_m(x)$ полиномиальное решение задачи Дирихле (2)–(3) с правой частью $Q(x) = Q_m(x)$. Тогда очевидно, что искомое решение имеет вид $u(x) = \sum\limits_m u_m(x)$. Из формулы (23) следует, что

$$u(x) = \sum_m u_m(x) = \frac{(|x|^2-1)^3}{16}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+2}}{(2s)!!(2s+6)!!}\,\alpha^{n/2-1}\Delta^s\sum_m Q_m(\alpha x)\,d\alpha =$$

$$= \frac{(|x|^2-1)^3}{16}\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+2}}{(2s)!!(2s+6)!!}\,\Delta^s Q(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.$$

Теорема доказана. □

Замечание 2. Функцию (оператор) Грина задачи Дирихле (2)–(3) в единичном шаре в случае полиномиальных функций $Q(x)$ можно записать в виде

$$G(x;\alpha)\cdot = \frac{(|x|^2-1)^3}{16}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+2}}{(2s)!!(2s+6)!!}\,\alpha^{n/2-1}(\Delta^s\cdot)(\alpha x),$$

и тогда решение (25) имеет вид

$$u(x) = \int_0^1 G(x;\alpha)\,Q(x)\,d\alpha.$$

Пример 2. Проверим формулы (25) и (19). Пусть в задаче Дирихле (2)–(3) $Q(x) = x_i$, а значит, $m = 1$. Тогда в сумме из формулы (25) будет только один член при $s = 0$. Получаем

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2-1)^3}{16}\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^2}{2\cdot 4\cdot 6}(\alpha x_i)\alpha^{n/2-1}d\alpha = x_i\frac{(|x|^2-1)^3}{48(n+2)(n+4)(n+6)}.$$

Проверим это решение. В силу леммы 6 однородные условия (3) выполнены. Далее, используя равенство (см. [10])

$$\Delta\left(|x|^{2s}P(x)\right) = 2s|x|^{2s-2}\left(2\Lambda + 2s + n - 2\right)P(x) + |x|^{2s}\Delta P(x) \tag{26}$$

при $P(x) = x_i$, $s = 3$ и свойства оператора Λ, вычислим

$$\Delta^3 u_0(x) = \Delta^3 \frac{x_i|x|^6}{48(n+2)(n+4)(n+6)} = \Delta^2 \frac{6(n+6)x_i|x|^4}{48(n+2)(n+4)(n+6)} = \\ = \Delta\frac{4(n+4)x_i|x|^2}{8(n+2)(n+4)} = \frac{2(n+2)x_i}{2(n+2)} = x_i.$$

Для нахождения $u_0(x)$ можно воспользоваться и формулой (19). Тогда так как

$$A_{s,\alpha} = (s-\alpha+1)(s-\alpha+2)(A-2s+2\alpha-1)(A-2s+\alpha-3)(A-2s+\alpha-2)+ \\ + 2(s-\alpha+2)\alpha(A-2s+2\alpha-3)(A-2s+\alpha-3)(A-s+\alpha+2)+ \\ + \alpha(\alpha-1)(A-2s+2\alpha-5)(A-s+\alpha+2)(A-s+\alpha+1),$$

и $s=0$, $\alpha = 0,1,2,3$ и $m=1$, то $A_{0,0} = 2(A-1)(A-3)(A-2)$, $A_{0,1} = 2(A-1)(A-2)(A+3)$, $A_{0,2} = 2(A-1)(A+4)(A+3)$, $A_{0,3} = 2A(A+1)(A+5) - 6A(A+3)(A+5) + 6(A+1)(A+4)(A+5) = 2(A+3)(A+4)(A+5)$, $A = (n+2)/2$ и то же решение, но по формуле (19) имеет вид

$$u(x) = \frac{x_i}{2\cdot 4^3}\Big(\frac{-A_{0,0}}{3!(A-3)_6} + \frac{A_{0,1}|x|^2}{2!(A-2)_6} - \frac{A_{0,2}|x|^4}{2!(A-1)_6} + \frac{A_{0,3}|x|^6}{3!(A)_6}\Big) = \\ = \frac{x_i}{2\cdot 4^3}\Big(-\frac{1}{3A(A+1)(A+2)} + \frac{|x|^2}{A(A+1)(A+2)} - \frac{|x|^4}{A(A+1)(A+2)} + \frac{|x|^6}{3A(A+1)(A+2)}\Big) = \\ = \frac{x_i(|x|^2-1)^3}{48\cdot 2A(2A+2)(2A+4)} = x_i\frac{(|x|^2-1)^3}{48(n+2)(n+4)(n+6)}.$$

Заметим, что формула (5) с идейной стороны похожа на формулу представления решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами [13].

2. Полиномиальное решение неоднородной задачи Дирихле для однородного 3-гармонического уравнения

Рассмотрим теперь следующую задачу Дирихле для 3-гармонического уравнения в единичном шаре $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

$$\Delta^3 u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{27}$$

$$u_{|\partial\Omega} = P(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}_{|\partial\Omega} = 0, \tag{28}$$

где ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, с полиномиальным граничным значением $P(x)$ и при $n > 2$.

Наряду с полиномом $P(x)$ рассмотрим производные от него полиномы

$$P_{(0)}(x) = P(x) + \frac{1-|x|^2}{2}\Lambda P(x) + \frac{(1-|x|^2)^2}{8}(\Lambda^2 + 2\Lambda)P(x) \tag{29}$$

и

$$P_{(1)}^{\alpha,s}(x) = \Big(\Delta(\Lambda^2 + 2\Lambda) - 2\frac{1-\alpha}{2s+4}\Delta^2\Lambda + \frac{(1-\alpha)^2}{(2s+4)(2s+6)}\Delta^3\Big)P(x), \qquad (30)$$

где $\alpha \in [0,1]$ и $s \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$. Сформулируем утверждение, дополняющее утверждение теоремы 3.

Теорема 4. *Решение задачи* (27)–(28) *можно записать в виде*

$$v(x) = P_{(0)}(x) + \frac{(1-|x|^2)^3}{16}\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}(\Delta^s P_{(1)}^{\alpha,s})(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha. \qquad (31)$$

Доказательство. Построим решение задачи (27)–(28). Сначала с помощью формулы (25) найдем решение следующей однородной задачи Дирихле:

$$\Delta^3 u(x) = \Delta^3 P(x), \quad x \in \Omega,$$
$$u_{|\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}_{|\partial\Omega} = 0.$$

По теореме 3 это решение имеет вид

$$u(x) = \frac{(|x|^2-1)^3}{16}\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+2}}{(2s)!!(2s+6)!!}\Delta^{s+3}P(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.$$

Далее, пусть бигармонический полином $u_1(x)$ удовлетворяет следующим условиям Дирихле:

$$u_1(x)_{|\partial\Omega} = 2\Lambda P(x)_{|\partial\Omega}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = \Lambda(\Lambda-2)P(x)_{|\partial\Omega}. \qquad (32)$$

Тогда следующий полином

$$v(x) = P(x) - u(x) - \frac{|x|^2-1}{4}u_1(x)$$

является 3-гармоническим, поскольку полином $|x|^2 u_1(x)$ 3-гармонический и, значит, $\Delta^3 v(x) = \Delta^3 P(x) - \Delta^3 u(x) = 0$. В силу леммы 6, свойств оператора Λ и определения полинома $u(x)$ он удовлетворяет и граничным условиям (28). Действительно, во-первых, $v(x)_{|\partial\Omega} = P(x)_{|\partial\Omega}$. Далее, в соответствии с леммой 4 вычислим $\Lambda v(x)$ и $\Lambda^{[2]}v(x)$. Имеем

$$\Lambda v(x) = \Lambda P(x) - \Lambda u(x) - \frac{1}{2}|x|^2 u_1(x) - \frac{|x|^2-1}{4}\Lambda u_1(x)$$

и

$$\Lambda^{[2]}v(x) = \Lambda^2 v(x) - \Lambda v(x) = \Lambda^2 P(x) - \Lambda^2 u(x) - |x|^2(\Lambda+1)u_1(x) - \frac{|x|^2-1}{4}\Lambda^2 u_1(x) - \Lambda v(x).$$

Поэтому в силу условий (32) запишем

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = \Lambda v(x)_{|\partial\Omega} = \frac{1}{2}(2\Lambda P(x) - u_1(x))_{|\partial\Omega} = 0.$$

Далее, по лемме 4 найдем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}_{|\partial\Omega} = \Lambda^{[2]}v(x)_{|\partial\Omega} = \big(\Lambda^2 P(x) - (\Lambda+1)u_1(x)\big)_{|\partial\Omega} = \big(\Lambda^2 P(x) - 2\Lambda P(x)\big)_{|\partial\Omega} - \frac{\partial u_1}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = 0.$$

В работе [9, теорема 6] установлено, что решение задачи Дирихле

$$\Delta^2 w(x) = Q(x), \quad x \in \Omega; \quad w_{|\partial\Omega} = P(x), \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = R(x)$$

с полиномиальными данными $Q(x)$, $P(x)$ и $R(x)$ имеет вид

$$w(x) = P(x) + \frac{|x|^2-1}{2}(R(x) - \Lambda P(x)) + \frac{(|x|^2-1)^2}{4}\times$$
$$\times \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^s\Big(\Delta(\Lambda P - R) + \frac{1-\alpha}{2s+4}(Q - \Delta^2 P)\Big)(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha. \quad (33)$$

Отсюда следует, что бигармонический полином $u_1(x)$ записывается в форме

$$u_1(x) = 2\Lambda P(x) + \frac{1-|x|^2}{2}(\Lambda^2+2\Lambda)P(x) + \frac{(1-|x|^2)^2}{4}\times$$
$$\times \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^{s+1}\Big((\Lambda^2+2\Lambda) - 2\frac{1-\alpha}{2s+4}\Delta\Lambda\Big)P(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.$$

Поэтому искомое решение $v(x)$ перепишем в виде

$$v(x) = P(x) - u(x) + \frac{1-|x|^2}{4}u_1(x) =$$
$$= P(x) + \frac{(1-|x|^2)^3}{16}\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+2}}{(2s)!!(2s+6)!!}\Delta^{s+3}P(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha +$$
$$+ \frac{1-|x|^2}{2}\Lambda P(x) + \frac{(1-|x|^2)^2}{8}(\Lambda^2+2\Lambda)P(x) + \frac{(1-|x|^2)^3}{16}\times$$
$$\times \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^{s+1}\Big((\Lambda^2+2\Lambda) - 2\frac{1-\alpha}{2s+4}\Delta\Lambda\Big)P(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha =$$
$$= P(x) + \frac{1-|x|^2}{2}\Lambda P(x) + \frac{(1-|x|^2)^2}{8}(\Lambda^2+2\Lambda)P(x) + \frac{(1-|x|^2)^3}{16}\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty}\times$$
$$\times \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^s\Big(\Delta(\Lambda^2+2\Lambda) - 2\frac{1-\alpha}{2s+4}\Delta^2\Lambda + \frac{(1-\alpha)^2}{(2s+4)(2s+6)}\Delta^3\Big)P(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.$$

Решение задачи (27)–(28) найдено, и согласно обозначениям, сделанным перед теоремой, оно имеет вид (31). □

Пример 3. Пусть в задаче (27)–(28) $P(x) = x_j^2$. Тогда в сумме из формулы (31) будет только один член с $s = 0$. Поскольку $\Lambda x_j^2 = 2x_j^2$ и $\Delta x_j^2 = 2$, то

$$P_{(0)}(x) = P(x) + \frac{1-|x|^2}{2}\Lambda P(x) + \frac{(1-|x|^2)^2}{8}(\Lambda^2+2\Lambda)P(x) = x_j^2(1 + (1-|x|^2) + (1-|x|^2)^2)$$

и

$$P_{(1)}^{\alpha,0}(x) = \Big(\Delta(\Lambda^2+2\Lambda) - 2\frac{1-\alpha}{4}\Delta^2\Lambda + \frac{(1-\alpha)^2}{4\cdot 6}\Delta^3\Big)P(x) = 16.$$

По формуле (31) находим

$$v(x) = x_j^2(3 - 3|x|^2 + |x|^4) + \frac{(1-|x|^2)^3}{16}\int_0^1 \frac{1}{2}\cdot 16\alpha^{n/2-1}\,d\alpha =$$

$$= x_j^2(3-3|x|^2+|x|^4)+\frac{1}{n}(1-|x|^2)^3 = 3x_j^2-3x_j^2|x|^2+x_j^2|x|^4-\frac{1}{n}(|x|^6-3|x|^4+3|x|^2-1). \quad (34)$$

Проверим, что найденный полином $v(x)$ действительно является решением задачи (27)–(28) с $P(x)=x_j^2$. Воспользуемся простым равенством, вытекающим из (26):

$$\Delta(|x|^k P_m(x)) = k(2m+k+n-2)|x|^{k-2}P_m(x)+|x|^k\Delta P_m(x).$$

Тогда $\Delta(x_j^2|x|^2)=2(n+4)x_j^2+2|x|^2$, $\Delta(x_j^2|x|^4)=4(n+6)x_j^2|x|^2+2|x|^4$, и мы получаем

$$\Delta v(x) = 6-6(n+4)x_j^2-6|x|^2+4(n+6)x_j^2|x|^2+2|x|^4- \\ -(6(n+4)|x|^4-12(n+2)|x|^2+6n)/n,$$

откуда

$$\Delta^2 v(x) = -12(n+4)-12n+8(n+6)(n+4)x_j^2+8(n+6)|x|^2+8(n+2)|x|^2- \\ -(24(n+4)(n+2)|x|^2-24(n+2)n)/n$$

и, значит, полином $v(x)$ 3-гармонический:

$$\Delta^3 v(x) = 16(n+4)(n+6)+16n(n+2)+16n(n+6)-\frac{48n(n+2)(n+4)}{n} = 16(n+4)\times \\ \times(n+6)+32n(n+4)-48(n+2)(n+4) = 16(n+4)(n+6+2n-3n-6)=0. \quad (35)$$

Кроме этого, из (34) следует, что $v(x)$ удовлетворяет условиям $v_{|x|=1}=(x_j^2)_{|x|=1}$,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}_{|x|=1} = \Lambda v_{|x|=1} = 6\Big(x_j^2-2x_j^2|x|^2+x_j^2|x|^4-\frac{|x|^6-2|x|^4+|x|^2}{n}\Big)_{|x|=1}=0$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}_{|x|=1} = \Lambda^2 v_{|x|=1} = 6\Big(2x_j^2-8x_j^2|x|^2+6x_j^2|x|^4-\frac{6|x|^6-8|x|^4+2|x|^2}{n}\Big)_{|x|=1}=0.$$

Итак, построенный в (34) полином действительно является решением задачи Дирихле.

Теперь рассмотрим другую задачу Дирихле для 3-гармонического уравнения в единичном шаре Ω

$$\Delta^3 u(x)=0, \quad x\in\Omega; \quad (36)$$

$$u_{|\partial\Omega}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial\nu}_{|\partial\Omega}=R(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\nu}_{|\partial\Omega}=S(x) \quad (37)$$

с полиномиальным граничным значением $R(x)$ и при $n>2$. Наряду с полиномами $R(x)$ и $S(x)$ рассмотрим производные от них полиномы

$$R_{(0)}(x)=\frac{1-|x|^2}{2}R(x)+\frac{(1-|x|^2)^2}{8}(2\Lambda+1)R(x), \quad S_{(0)}(x)=\frac{(1-|x|^2)^2}{8}S(x), \quad (38)$$

$$R_{(1)}^{\alpha,s}(x)=\Big(\Delta(2\Lambda+1)-2\frac{1-\alpha}{2s+4}\Delta^2\Big)R(x), \quad S_{(1)}(x)=\Delta S(x), \quad (39)$$

где $\alpha\in[0,1]$ и $s\in\mathbb{N}_0\equiv\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Теорема 5. *Решение задачи* (36)–(37) *можно записать в виде*

$$
\begin{aligned}
v(x) = &-R_{(0)}(x) + S_{(0)}(x)+ \\
&+\frac{(1-|x|^2)^3}{16}\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Big(-\Delta^s R_{(1)}^{\alpha,s} + \Delta^s S_{(1)}\Big)(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha. \quad (40)
\end{aligned}
$$

Доказательство. Пусть бигармонический полином $u_1(x)$ удовлетворяет условиям $u_1(x)_{|\partial\Omega} = R(x)_{|\partial\Omega}$, $\frac{\partial u_1}{\partial \nu}{}_{|\partial\Omega} = \frac{1}{2}(S(x)-R(x))_{|\partial\Omega}$.

Тогда следующий полином $v(x) = \dfrac{1}{2}(|x|^2-1)u_1(x)$ является 3-гармоническим и удовлетворяет условиям $v_{|\partial\Omega} = 0$ и

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \nu}{}_{|\partial\Omega} =&\Lambda v_{|\partial\Omega} = \Big(|x|^2 u_1(x) + \frac{|x|^2-1}{2}\Lambda u_1(x)\Big)_{|\partial\Omega} = u_1(x)_{|\partial\Omega} = R(x)_{|\partial\Omega}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}{}_{|\partial\Omega} =&(\Lambda^2-\Lambda)v_{|\partial\Omega} = \Big(|x|^2 u_1(x) + 2|x|^2\Lambda u_1(x)\Big)_{|\partial\Omega} = \Big(R(x) + 2\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\Big)_{|\partial\Omega} = S(x)_{|\partial\Omega}.
\end{aligned}
$$

Полином $u_1(x)$ по формуле (33) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
u_1(x) = R(x) - &\frac{|x|^2-1}{4}(2\Lambda R(x) + R(x) - S(x)) + \frac{(|x|^2-1)^2}{8}\times \\
&\times \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^{s+1}\Big(2\Lambda R + R - S - 2\frac{1-\alpha}{2s+4}\Delta R\Big)(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha,
\end{aligned}
$$

и поэтому

$$
\begin{aligned}
v(x) = &\frac{|x|^2-1}{2}R(x) - \frac{(|x|^2-1)^2}{8}((2\Lambda+1)R(x) - S(x)) + \frac{(|x|^2-1)^3}{16}\times \\
&\times \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^s\Big(\Delta(2\Lambda+1)R - \Delta S - 2\frac{1-\alpha}{2s+4}\Delta^2 R\Big)(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.
\end{aligned}
$$

Учитывая обозначения (38) и (39), получаем формулу (40). □

Пример 4. Пусть в задаче (36)–(37) $R(x) = x_k^2$, $S(x) = x_m$. Тогда

$$
R_{(0)}(x) = \frac{1-|x|^2}{2}x_k^2 + 5\frac{(1-|x|^2)^2}{8}x_k^2, S_{(0)}(x) = \frac{(1-|x|^2)^2}{8}x_m; \quad R_{(1)}^{\alpha,s}(x) = 10, S_{(1)}(x) = 0.
$$

В сумме из формулы (40) будет только один член $s = 0$. Поэтому запишем

$$
\begin{aligned}
v(x) =&\frac{|x|^2-1}{2}x_k^2 + \frac{(|x|^2-1)^2}{8}(x_m - 5x_k^2) + 5\frac{(|x|^2-1)^3}{16}\int_0^1 \alpha^{n/2-1}d\alpha = \\
=&\frac{|x|^2-1}{2}x_k^2 + \frac{(|x|^2-1)^2}{8}(x_m - 5x_k^2) + 5\frac{(|x|^2-1)^3}{8n}.
\end{aligned}
$$

Проверим, что найденный полином $v(x)$ действительно является решением задачи (36)–(37). Используя формулу (35) из примера 3, заключаем, что полином $v(x)$ 3-гармонический: $\Delta^3 v(x) = -\frac{5}{8}\Delta^3\Big(x_k^2|x|^4 - \frac{|x|^6}{n}\Big) = 0$.

Кроме этого, полином $v(x)$ удовлетворяет условиям (37) при $R(x) = x_k^2$, $S(x) = x_m$. Действительно, $v_{|x|=1} = 0$,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}_{|x|=1} = \Lambda v_{|x|=1} = \Big(x_k^2|x|^2 + (|x|^2-1)x_k^2 + \frac{(|x|^2-1)|x|^2}{2}(x_m - 5x_k^2) + \\ + \frac{(|x|^2-1)^2}{8}(x_m - 10x_k^2) + 15\frac{(|x|^2-1)^2|x|^2}{4n}\Big)_{|x|=1} = (x_k^2)_{|x|=1},$$

и по лемме 4 найдем
$\frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}_{|x|=1} = (\Lambda^2 - \Lambda)v_{|x|=1} = \big(4x_k^2|x|^2 + 2|x|^2x_k^2 + |x|^4(x_m - 5x_k^2)\big)_{|x|=1} - (x_k^2)_{|x|=1} = (x_m)_{|x|=1}$.
Значит, полином $v(x)$ — решение рассматриваемой задачи Дирихле.

Объединяя теоремы 3, 4 и 5, получим следующее общее утверждение.

Теорема 6. *Решение задачи Дирихле*

$$\Delta^3 u(x) = Q(x), \quad x \in \Omega; \tag{41}$$

$$u_{|\partial\Omega} = P(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = R(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}_{|\partial\Omega} = S(x) \tag{42}$$

в единичном шаре Ω *с полиномиальными данными* $Q(x)$, $P(x)$, $R(x)$ *и* $S(x)$ *имеет вид*

$$u(x) = P_{(0)}(x) - R_{(0)}(x) + S_{(0)}(x) + \\ + \frac{(1-|x|^2)^3}{16}\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^s\big(P_{(1)}^{\alpha,s} - R_{(1)}^{\alpha,s} + S_{(1)} - Q_{(1)}^{\alpha,s}\big)(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha, \tag{43}$$

где полиномы $P_{(0)}(x)$, $R_{(0)}(x)$ *и* $S_{(0)}(x)$ *определяются по формулам* (29), (38), *полиномы* $P_{(1)}^{\alpha,s}(x)$, $R_{(1)}^{\alpha,s}(x)$ *и* $S_{(1)}(x)$ *определяются по формулам* (30), (39), *а полином* $Q_{(1)}^{\alpha,s}(x)$ *имеет вид* $Q_{(1)}^{\alpha,s}(x) = \dfrac{(1-\alpha)^2}{(2s+4)(2s+6)}Q(x)$.

Доказательство. Как нетрудно заметить, решение задачи (41)–(42) можно разложить на сумму решений трех задач: (2)–(3), (27)–(28) и (36)–(37). Сумма этих решений, находимых из формул (25), (31) и (40), соответственно, и дает искомое решение (43). □

Пример 5. Найдем решение задачи $\Delta^3 u(x) = x_i, x \in \Omega;$ $u_{|\partial\Omega} = x^2_{j|\partial\Omega},$ $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = x^2_{k|\partial\Omega}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}_{|\partial\Omega} = x_{m|\partial\Omega}$.

В соответствии с примерами 2, 3 и 4 искомое решение будет иметь вид

$$u(x) = x_j^2 + (|x|^2-1)\Big(\frac{1}{2}x_k^2 - x_j^2\Big) + (|x|^2-1)^2\Big(x_j^2 - \frac{5}{8}x_k^2 + \frac{1}{8}x_m\Big) + \\ + (|x|^2-1)^3\Big(\frac{x_i}{48(n+2)(n+4)(n+6)} - \frac{3}{8n}\Big).$$

Рассмотрим более сложный пример, который затруднительно решить без помощи компьютера.

Пример 6. С помощью пакета "Mathematica"вычислим решение следующей задачи Дирихле: $\Delta^3 u(x) = x_1^2 - 2x_3^2, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3;$ $u_{|\partial\Omega} = \big(x_1^4x_2^2 - x_2x_3^5\big)_{|\partial\Omega},$ $\frac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = \big(x_1^6 + 2x_2^4x_3^2\big)_{|\partial\Omega},$ $\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}_{|\partial\Omega} = \big(x_2x_3^5 - 3x_1^2x_2^4\big)_{|\partial\Omega}$ по формуле (43). Обозначая для краткости $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и опуская промежуточные вычисления, будем иметь

$$u(x_1,x_2,x_3) = x_1^4x_2^2 - x_2x_3^5 + \frac{|x|^2-1}{2}\big(x_1^6 - 6x_1^4x_2^2 + 2x_2^4x_3^2 + 6x_2x_3^5\big) -$$

$$-\frac{(|x|^2-1)^2}{8}\big(13x_1^6-48x_1^4x_2^2+3x_1^2x_2^4+26x_2^4x_3^2+47x_2x_3^5\big)+\frac{(|x|^2-1)^3}{665280}\times$$
$$\times\big(71269+870840x_1^4+210600x_2^4-592200x_2^3x_3+4715x_3^2-48960x_3^4+1800x_2x_3(253+1645x_3^2)-$$
$$-5x_1^2(-57979+458064x_2^2+118440x_2x_3+57888x_3^2)+15x_2^2(317+74784x_3^2)\big).$$

Список литературы

[1] E.Almansi, Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n}u=0$, *Ann. Mat. Pura Appl.*, Ser. 3, **2**(1899), 1–51.

[2] В.В.Карачик, Об одном разложении типа Альманси, *Математические заметки*, **83:3**(2008), 370–380.

[3] N. Nicolescu, Probléme de l'analyticité par rapport á un opérateur linéaire, *Studia Math.*, **16**(1958), 353–363.

[4] В.В.Карачик, Разложения Альманси для невырожденных операторов второго порядка, *Вестник ЮУрГУ, Серия "Математика. Механика. Физика"* , 2010, №30, 4–12.

[5] В.С. Владимиров, Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В.С. Владимирова. 3-е изд., исправл., М.,ФИЗМАТЛИТ, 2001.

[6] V.V.Karachik, On one set of orthogonal harmonic polynomials, *Proceedings of American Mathematical Society*, **126**(1998), no. 12, 3513–3519.

[7] В.В.Карачик, Н.А.Антропова, О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца, *Дифференциальные уравнения*, **46**(2010), №3, 384–395.

[8] В.В.Карачик, Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона, *ЖВМиМФ*, **51**(2011), №9, 1674–1694.

[9] В.В.Карачик, Н.А.Антропова, О полиномиальных решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **15**(2012), №2(50), 86–98.

[10] В.В.Карачик, Об одном представлении аналитических функций гармоническими, *Математические труды*, **10**(2007), №2, 142–162.

[11] Г.Бейтмен, А.Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, М., Наука, 1966.

[12] В.В.Карачик, Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре, *Сибирский математический журнал*, **32**, №5, 1991, 51–58.

[13] В.В.Карачик, Метод построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, *ЖВМиМФ*, **52**, 2012, №2, 237–252.

Polynomial Solutions to Dirihlet Boundary Value Problem for the 3-harmonic Equation in a Ball

Valery V. Karachik

Polynomial solution to Dirihlet boundary value problem for the nonhomogeneous 3-harmonic equation in a ball with polynomial right-hand side and polynomial boundary data is found.

Keywords: 3-harmonic equation, Almansi decomposition, harmonic polynomials, Dirihlet boundary value problem, polynomial solutions.