УДК 517.55

Голоморфное продолжение функций вдоль конечных семейств комплексных прямых в шаре

Александр М. Кытманов*
Симона Г. Мысливец†
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 29.03.2012, окончательный вариант 31.06.2012, принята к печати 31.08.2012

В данной статье рассматриваются непрерывные функции, заданные на границе шара B в $\mathbb{C}^n$, $n>1$, и обладающие одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых, проходящих через конечное число точек в шаре. Исследуется вопрос о существовании голоморфного продолжения таких функций в шар B.

Ключевые слова: голоморфное продолжение, интеграл Пуассона.

Эта статья содержит некоторые результаты, связанные с голоморфным продолжением функций f, заданных на границе шара $B \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в этот шар. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны. Поэтому наши результаты существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, был получен в [1] М.Л. Аграновским и Р.Е. Вальским, изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

В [2] Э.Л. Стаутом, использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского была перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено в [3] Кытмановым, применившим интеграл Бохнера–Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера–Мартинелли, Коши–Фантаппье, логарифмического вычета) оказалась полезной при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения (см. обзор [4]).

Вопрос о нахождении различных семейств комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения, был поставлен в [5]. Ясно, что семейство комплексных прямых, проходящих через одну точку, не является достаточным. Как показано в [6], семейство всех комплексных прямых, проходящих через конечное число точек, также, вообще говоря, не является достаточным. Таким образом, простых аналогов теоремы Гартогса ожидать не следует.

В работе [6] доказано, что семейство комплексных прямых, пересекающее росток порождающего многообразия γ, является достаточным для голоморфного продолжения. В работе [7] рассмотрены семейства комплексных прямых, проходящих через росток комплексной гиперповерхности, росток порождающего многообразия на комплексной гиперповерхности, росток вещественно-аналитического многообразия, вещественной размерности $n-1$. В частности, в $\mathbb{C}^2$ это может быть любая вещественно-аналитическая кривая. Различные другие семейства приведены в работах [8–11]. Отметим здесь работы [9, 11], в которых показано,

*akytmanov@sfu-kras.ru
†smyslivets@sfu-kras.ru

что семейство комплексных прямых, проходящих через некоторым образом расположенное конечное число точек, является достаточным для голоморфного продолжения. Правда, это утверждается только для вещественно-аналитических или бесконечно дифференцируемых функций, заданных на границе шара. Так, в $\mathbb{C}^2$ Аграновским и Глобевником для вещественно-аналитических функций, заданных на границе шара, показано, что достаточно 2 точек, лежащих в замыкании шара. Следующий пример Глобевника показывает, что для функций непрерывных на границе шара 2 точек не достаточно для голоморфного продолжения.

Пример 1. Рассмотрим в шаре $B = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |(z,w)| < 1\}$ часть комплексного многообразия

$$\Gamma = \{(z,w) \in B : \ w = 0\},$$

то, как показал Глобевник, функция $f = \dfrac{w^{k+2}}{\bar{w}}$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 0)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения с ∂B вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\Gamma$, является гладкой на ∂B, но не продолжается голоморфно в B.

Рассмотрим комплексные прямые, пересекающие Γ:

$$l_a = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ z = a + bt,\ w = ct,\ t \in \mathbb{C}\}. \tag{1}$$

Эти прямые проходят через точку $(a,0) \in \Gamma$. При $|a| < 1$ точка $(a,0) \in B$, при $|a| > 1$ точка $(a,0) \notin \overline{B}$. Без ограничения общности можно считать, что $|b|^2 + |c|^2 = 1$. Пересечение $l_a \cap \partial B$ образует окружность

$$|t|^2 + a\bar{b}\bar{t} + \bar{a}bt = 1 - |a|^2 \quad \text{или} \quad |t + a\bar{b}|^2 = 1 - |c|^2|a|^2. \tag{2}$$

Действительно, так как для комплексных прямых вида (1) на ∂B выполнено равенство

$$\bar{t} = \frac{1 - |a|^2 - \bar{a}bt}{t + a\bar{b}},$$

то функция f на ∂B примет вид

$$f = \frac{(t + a\bar{b})}{1 - |a|^2 - \bar{a}bt} \cdot (ct)^{k+2}.$$

Знаменатель данной дроби обращается в 0 в точке $t_0 = \dfrac{1 - |a|^2}{\bar{a}b}$. Подставляя эту точку в выражение (2), получим

$$\frac{(1 - |a|^2)^2}{|a|^2|b|^2} + 1 - |a|^2 > 0 \quad \text{при} \quad |a| < 1.$$

Поэтому точка прямой l_a, соответствующая t_0, лежит вне шара B. Так что функция f голоморфно продолжается в $l_a \cap B$.

В нашей статье рассмотрены семейства комплексных прямых, проходящих через конечное $(n+1)$ число точек, лежащих в шаре B в $\mathbb{C}^n$.

Пусть $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ — единичный шар в $\mathbb{C}^n$ с центром в нуле и $S = \partial B$ граница шара. Рассмотрим инвариантное ядро Пуассона [13, с.48]

$$P(z,\zeta) = c_n \frac{\left(1 - |z|^2\right)^n}{\left|1 - \langle z, \bar{\zeta}\rangle\right|^{2n}} = c_n \frac{\left(1 - \langle z, \bar{z}\rangle\right)^n}{\left(1 - \langle z, \bar{\zeta}\rangle\right)^n \left(1 - \langle \zeta, \bar{z}\rangle\right)^n},$$

где $c_n = \dfrac{(n-1)!}{2\pi^n}$, $\langle z, \zeta\rangle = z_1\zeta_1 + \dots + z_n\zeta_n$.

Если функция $f(z)$ $\mathcal{M}$-гармоническая в B и непрерывная на $\overline{B}$, то справедливо интегральное представление

$$F(z) = \int\limits_S f(\zeta)P(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta), \tag{3}$$

где

$$d\sigma(\zeta) = \frac{2}{i^n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar{\zeta}_k\,d\bar{\zeta}[k]\wedge d\zeta \tag{4}$$

мера Лебега на S, $d\zeta = d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n$, $d\bar{\zeta}[k] = d\bar{\zeta}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_{k-1}\wedge d\bar{\zeta}_{k+1}\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_n$. Граничные значения функции $F(z)$ совпадают с $f(\zeta)$, т.е. $F(z)\Big|_S = f(\zeta)$. Напомним, что $\mathcal{M}$-гармоническая функция удовлетворяет инвариантному уравнению Лапласа [13, с.55-56]

$$\widetilde{\triangle}F(z) = 0,$$

где

$$\widetilde{\triangle}F(z) = 4\big(1-|z|^2\big)\sum_{j,k=1}^{n}(\delta_{jk} - z_j\bar{z}_k)\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}$$

и δ_{jk} — символ Кронекера. Функции, голоморфные в шаре B, являются $\mathcal{M}$-гармоническими. В частности, формула (3) является интегральным представлением для голоморфных функций.

Рассмотрим комплексную прямую вида

$$l_{z,b} = \{\zeta\in\mathbb{C}^n : \zeta = z + bt,\ t\in\mathbb{C}\}, \tag{5}$$

где $z\in\mathbb{C}^n$, $b\in\mathbb{CP}^{n-1}$.

Будем говорить, что функция $f\in\mathcal{C}(S)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль прямой* $l_{z,b}$, если $S\cap l_{z,b}\neq\varnothing$ и существует функция $F_{l_{z,b}}$ со следующими свойствами:

1) $F_{l_{z,b}}\in\mathcal{C}(\overline{B}\cap l_{z,b})$,

2) $F_{l_{z,b}} = f$ на множестве $S\cap l_{z,b}$,

3) функция $F_{l_{z,b}}$ голоморфна во внутренних (относительно топологии $l_{z,b}$) точках множества $\overline{B}\cap l_{z,b}$.

Пусть Γ — некоторое множество в $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $\mathfrak{L}_\Gamma$ семейство всех комплексных прямых $l_{z,b}$ таких, что $z\in\Gamma$, а $b\in\mathbb{CP}^{n-1}$, т. е. это множество всех комплексных прямых, проходящих через $z\in\Gamma$.

Будем говорить, что функция $f\in\mathcal{C}(S)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства* $\mathfrak{L}_\Gamma$, если она обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль любой комплексной прямой $l_{z,b}\in\mathfrak{L}_\Gamma$.

Назовем *множество* $\mathfrak{L}_\Gamma$ *достаточным для голоморфного продолжения*, если из того, что $f\in\mathcal{C}(S)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\Gamma$, следует, что функция f голоморфно продолжается в B (т. е. f является CR-функцией на S). Различные семейства достаточных множеств были рассмотрены в работах Аграновского, Вальского, Стаута, Глобевника, Баракко и авторов этой статьи.

Рассмотрим ядро вида

$$Q(z,w,\zeta) = c_n\frac{\big(1-\langle z,w\rangle\big)^n}{\big(1-\langle z,\bar{\zeta}\rangle\big)^n\big(1-\langle\zeta,w\rangle\big)^n}. \tag{6}$$

Очевидно, что $P(z,\zeta)=Q(z,\bar z,\zeta)$. Введем функцию

$$\Phi(z,w)=\int\limits_S f(\zeta)Q(z,w,\zeta)\,d\sigma(\zeta).$$

Эта функция голоморфна по переменным (z,w) в $B\times B\subset\mathbb{C}^{2n}$, поскольку при $\zeta\in S$ и $z,w\in B$ знаменатель в ядре (6) не обращается в ноль. Отметим, что $\Phi(z,\bar z)=F(z)$, а производные

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}\Phi}{\partial z^\alpha\partial w^\beta}\bigg|_{w=\bar z}=\frac{\partial^{\alpha+\beta}F}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}, \tag{7}$$

где

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}\Phi}{\partial z^\alpha\partial w^\beta}=\frac{\partial^{\|\alpha\|+\|\beta\|}\Phi}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}\partial w_1^{\beta_1}\cdots\partial w_n^{\beta_n}}$$

и $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ — мультииндексы, $\|\alpha\|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $\|\beta\|=\beta_1+\dots+\beta_n$.

Предложение 1. *Пусть функция $f(\zeta)\in\mathcal{C}(S)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{\{0\}}$, тогда для интеграла*

$$\Phi(z,w)=\int\limits_S f(\zeta)Q(z,w,\zeta)\,d\sigma(\zeta)$$

справедливы свойства $\Phi(0,w)=\mathrm{const}$ и производные $\dfrac{\partial^\alpha\Phi(0,w)}{\partial z^\alpha}$ являются многочленами по w степени не выше чем $\|\alpha\|$.

Доказательство. Рассмотрим производные

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha\partial w^\beta}\left(\frac{1}{\big(1-\langle z,\bar\zeta\rangle\big)^n\big(1-\langle\zeta,w\rangle\big)^n}\right)=\frac{C_{\alpha,\beta}\bar\zeta^\alpha\zeta^\beta}{\big(1-\langle z,\bar\zeta\rangle\big)^{n+\|\alpha\|}\big(1-\langle\zeta,w\rangle\big)^{n+\|\beta\|}}.$$

Нетрудно показать, что производная $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta}Q(0,w)}{\partial z^\alpha\partial w^\beta}$ является суммой слагаемых вида $\dfrac{C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\bar\zeta^{\alpha-\gamma'}\zeta^{\beta-\gamma''}w^\delta}{\big(1-\langle\zeta,w\rangle\big)^{n+\|\beta\|-\|\gamma''\|}}$, $\|\delta\|\leqslant n$ и $\|\gamma''\|\leqslant\|\gamma'\|$. Поэтому производная $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta}\Phi(0,w)}{\partial z^\alpha\partial w^\beta}$ равна линейной комбинации интегралов вида

$$\int\limits_S f(\zeta)\frac{\bar\zeta^{\alpha-\gamma'}\zeta^{\beta-\gamma''}}{\big(1-\langle\zeta,w\rangle\big)^{n+\|\beta\|-\|\gamma''\|}}\,d\sigma(\zeta). \tag{8}$$

Форма $d\sigma(\zeta)$ в переменных b и t, где $\zeta=bt$, $t\in\mathbb{C}$ примет вид ([4])

$$d\sigma(bt)=\frac{2}{i^n}|t|^{2n-2}\bar t\,dt\wedge\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}b_k\,db[k]\right)\wedge\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\bar b_k\,d\bar b[k]\right).$$

Поскольку на сфере S верно равенство $1=|\zeta|=|bt|$, то $|t|=\dfrac{1}{|b|}$ и $\bar t=\dfrac{1}{t|b|^2}$. Тогда

$$d\sigma(bt)=\frac{2}{i^n}\frac{1}{t|b|^{2n}}\,dt\wedge\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}b_k\,db[k]\right)\wedge\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\bar b_k\,d\bar b[k]\right)=\lambda(b)\wedge\frac{dt}{t}.$$

Применяя теорему Фубини, получим

$$\int\limits_S f(\zeta)\frac{\bar\zeta^{\alpha-\gamma'}\zeta^{\beta-\gamma''}}{\big(1-\langle\zeta,w\rangle\big)^{n+\|\beta\|-\|\gamma''\|}}\,d\sigma(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{CP}^{n-1}}\lambda(b)\int\limits_{S\cap l_{0,b}} f(bt)\frac{\bar t^{\|\alpha\|-\|\gamma'\|}t^{\|\beta\|-\|\gamma''\|}}{t\big(1-t\langle b,w\rangle\big)^{n+\|\beta\|-\|\gamma''\|}}\,dt=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{CP}^{n-1}}\lambda(b)\int\limits_{S\cap l_{0,b}} f(bt)\frac{t^{\|\beta\|-\|\gamma''\|}}{t^{\|\alpha\|-\|\gamma'\|+1}\big(1-t\langle b,w\rangle\big)^{n+\|\beta\|-\|\gamma''\|}}\,dt=0,$$

если $\|\beta\|>\|\alpha\|$ (тогда $\|\beta\|-\|\gamma''\|>\|\alpha\|-\|\gamma'\|$), а функция $\dfrac{1}{1-t\langle b,w\rangle}$ голоморфна в замкнутом круге $|t|<\dfrac{1}{|b|}$, т. е. в $\overline{B}\cap l_{0,b}$. Отсюда в силу (8)

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}\Phi(0,w)}{\partial z^\alpha\partial w^\beta}=0 \qquad (9)$$

при $\|\beta\|>\|\alpha\|$.

Поэтому по формуле Тейлора для функции $\Phi(z,w)$ в точке $(0,0)$ получим, что $\Phi(0,w)=$ const и производные $\dfrac{\partial^\alpha\Phi(0,w)}{\partial z^\alpha}$ есть многочлены по w степени не выше $\|\alpha\|$.

$\square$

Следствие 1. *В условиях предложения 1 производные* $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta}F(0,0)}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}=0$ *при* $\|\beta\|>\|\alpha\|$.

Доказательство. Подставляя в равенство (9) $w=\bar z$ и используя равенство (7), получим требуемое утверждение.

$\square$

Напомним, что автоморфизм шара $\varphi_a(u)$, переводящий точку a в 0 и наоборот, имеет вид

$$z=\varphi_a(u)=\frac{a-\dfrac{\langle u,\bar a\rangle}{\langle a,\bar a\rangle}a-\sqrt{1-|a|^2}\Big(u-\dfrac{\langle u,\bar a\rangle}{\langle a,\bar a\rangle}a\Big)}{1-\langle u,\bar a\rangle}$$

и $\varphi_a(u)$ является инволюцией, т. е. $\varphi_a^{-1}=\varphi_a$ [13, с. 34]. Отметим, что $\big(\varphi_a(u),\varphi_{\bar a}(v)\big)$ служит автоморфизмом $B\times B$, переводящим точку $(a,\bar a)$ в точку $(0,0)$ и наоборот.

Как показано в [13, с.52, замечание], верно равенство

$$d\sigma(\varphi_a(\eta))=P(a,\eta)\,d\sigma(\eta),\qquad \eta\in S,$$

а используя равенство (6), получим

$$d\sigma(\varphi_a(\eta))=P(a,\eta)\,d\sigma(\eta)=Q(a,\bar a,\eta)\,d\sigma(\eta),\qquad \eta\in S.$$

По теореме 2.2.2 [13, с. 34] автоморфизм $\varphi_a(u)$ является гомеоморфизмом шара $\overline{B}$ на себя и гомеоморфизмом сферы $S\to S$. Так же по теореме 3.3.5 [13, с. 50] верно равенство

$$P\big(\varphi_a(u),\varphi_a(\eta)\big)=\frac{P(u,\eta)}{P(a,\eta)}.$$

Поэтому

$$Q\big(\varphi_a(u),\varphi_{\bar a}(\bar u),\varphi_a(\eta)\big)=\frac{Q(u,\bar u,\eta)}{Q(a,\bar a,\eta)}. \qquad (10)$$

Поскольку многообразие $v = \bar{u}$ является порождающим в $\mathbb{C}^n$, а функции, входящие в равенство (10), вещественно-аналитическими, то

$$Q\big(\varphi_a(u), \varphi_{\bar{a}}(v), \varphi_a(\eta)\big) = \frac{Q(u, v, \eta)}{Q(a, \bar{a}, \eta)}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z, w) = \Phi\big(\varphi_a(u), \varphi_{\bar{a}}(v)\big) = \int\limits_S f(\zeta) Q\big(\varphi_a(u), \varphi_{\bar{a}}(v), \zeta\big)\, d\sigma(\zeta).$$

Сделаем замену $\zeta = \varphi_a(\eta)$ и, обозначая $f(\varphi_a(\eta)) = f_a(\eta)$, получим

$$\Phi(z, w) = \int\limits_S f(\varphi_a(\eta)) Q\big(\varphi_a(u), \varphi_{\bar{a}}(v), \varphi_a(\eta)\big)\, d\sigma(\varphi_a(\eta)) =$$
$$= \int\limits_S f(\varphi_a(\eta)) \frac{Q(u, v, \eta) Q(a, \bar{a}, \eta)}{Q(a, \bar{a}, \eta)}\, d\sigma(\eta) =$$
$$= \int\limits_S f_a(\eta) Q(u, v, \eta)\, d\sigma(\eta) = \Phi_a(u, v). \qquad (11)$$

Предложение 2. *Пусть функция $f(\zeta) \in \mathcal{C}(S)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{\{a\}}$, $a \in B$, тогда $\Phi(a, w) = \mathrm{const}$ и производные $\dfrac{\partial^\alpha \Phi(a, w)}{\partial z^\alpha}$ являются многочленами по $\varphi_{\bar{a}}(w)$ степени не выше чем $\|\alpha\|$.*

Доказательство. С помощью автоморфизма φ_a переведем точку a в 0. Тогда по предложению 1 функция $\Phi_a(0, v) = \mathrm{const}$. Используя равенство (11), получим, что $\Phi\big(a, \varphi_{\bar{a}}(v)\big) = \mathrm{const}$ или $\Phi(a, w) = \mathrm{const}$. Аналогично из предложения 1 и равенства (11) получим, что производные $\dfrac{\partial^\alpha \Phi(a, w)}{\partial z^\alpha}$ являются многочленами от $\varphi_{\bar{a}}(w)$ степени не выше чем $\|\alpha\|$. □

Представим функцию $\Phi(z, w)$ в виде суммы однородных многочленов по z и w. Разложим $Q(z, w, \zeta)$ в ряд по степеням $\langle z, \bar{\zeta}\rangle$, $\langle \zeta, w\rangle$. Поскольку

$$\frac{1}{\big(1 - \langle z, \bar{\zeta}\rangle\big)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k \langle z, \bar{\zeta}\rangle^k,$$
$$\frac{1}{\big(1 - \langle \zeta, w\rangle\big)^n} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{n+l-1}^l \langle \zeta, w\rangle^l$$

(рассматриваемые ряды сходятся абсолютно для $\zeta \in S$, $z, w \in B$, а также равномерно на $S \times K$, где K — произвольный компакт из $B \times B$). Поэтому

$$Q(z, w, \zeta) = c_n\big(1 - \langle z, w\rangle\big)^n \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k C_{n+l-1}^l \int\limits_S f(\zeta) \langle z, \bar{\zeta}\rangle^k \langle \zeta, w\rangle^l d\sigma(\zeta). \qquad (12)$$

Интеграл $\int\limits_S f(\zeta)\langle z, \bar{\zeta}\rangle^k \langle \zeta, w\rangle^l d\sigma(\zeta)$ является однородным многочленом степени однородности k по z и l по w. Умножая сумму в равенстве (12) на множитель $\big(1 - \langle z, w\rangle\big)^n$ и перегруппировывая слагаемые, получим, что

$$\Phi(z, w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} P_{k,l}(z, w), \qquad (13)$$

где $P_{k,l}(z,w)$ — однородные голоморфные многочлены степени однородности k по z и l по w. Причем двойной ряд сходится абсолютно в $B\times B$ и равномерно на любом компакте из $B\times B$.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(\zeta)\in\mathcal{C}(S)$, *точка* $a\in B$ *и функция* $\Phi(z,w)$ *удовлетворяет условиям:* $\Phi(0,w)=\mathrm{const}$, $\Phi(a,w)=\mathrm{const}$, $\dfrac{\partial^\alpha\Phi(0,w)}{\partial z^\alpha}$ *— многочлен по* w *степени не выше чем* $\|\alpha\|$, *тогда для любого фиксированного* z, *принадлежащего комплексной прямой* $l_{0,a}=\{z\in\mathbb{C}^n:\ z=at,\ |t|<1\}$, *выполняется* $\Phi(z,w)=\mathrm{const}$ *по* w, *т. е.* $\dfrac{\partial^\beta\Phi(z,w)}{\partial w^\beta}=0$ *при* $\|\beta\|>0$.

Доказательство. Представим функцию $\Phi(z,w)$ в виде (13)

$$\Phi(z,w)=\sum_{k,l=0}^{\infty}P_{k,l}(z,w).$$

По условию теоремы разложение (13) примет вид

$$\Phi(z,w)=\sum_{k\geqslant l\geqslant 0}P_{k,l}(z,w),$$

поскольку производные $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta}\Phi(0,0)}{\partial z^\alpha\partial w^\beta}=0$ при $\|\beta\|>\|\alpha\|$.

Введем функции $\Phi_k(z,w)=\sum\limits_{l=k}^{\infty}P_{k,l}(z,w)$, тогда

$$\Phi(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k(z,w). \tag{14}$$

Рассматриваемые ряды сходятся абсолютно в $B\times B$ и равномерно на компактах из $B\times B$, поскольку двойной ряд (13) сходится абсолютно в $B\times B$ и равномерно на компактах их $B\times B$, а ряд (14) является повторным рядом ряда (13).

Из вида ряда $\Phi_k(z,w)$ получаем, что $\Phi_k(tz,w)=t^k\Phi_k(z,w)$ для любого $t\in\mathbb{C}$. По условию теоремы

$$\Phi(0,w)=\Phi_0(0,w)=\sum_{l=0}^{\infty}P_{0,l}(0,w)=\mathrm{const} \tag{15}$$

и

$$\Phi(a,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k(a,w)=\mathrm{const}\,.$$

Рассмотрим

$$\Phi(at,w)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k\Phi_k(a,w). \tag{16}$$

Вычислим

$$\frac{d^m}{dt^m}\Phi(at,w)=m!\Phi_m(a,w)+\dots+k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1)t^{k-m}\Phi_k(a,w)+\cdots.$$

Вычислим эту же производную как производную сложной функции

$$\frac{d^m}{dt^m}\Phi(at,w)=\sum_{\|\alpha\|=m}\frac{\partial^\alpha\Phi(at,w)}{\partial z^\alpha}\cdot a^\alpha.$$

Приравнивая производные, получим равенство

$$\sum_{\|\alpha\|=m} \frac{\partial^\alpha \Phi(at,w)}{\partial z^\alpha} \cdot a^\alpha = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-m+1)t^{k-m}\Phi_k(a,w). \tag{17}$$

Подставляя в равенство (17) значение $t = 0$, получим, что $\dfrac{d^m}{dt^m}\Phi(0,w) = m!\Phi_m(a,w)$ — многочлен степени не выше чем m по w, поскольку левая часть этого равенства многочлен степени не выше чем m по w по условию теоремы. При $m = 0$ получим $\Phi(0,w) = \Phi_0(a,w) = \mathrm{const}$ и из (15) имеем $\Phi(0,w) = \Phi_0(a,w) = \Phi_0(0,w)$.

В равенство (16) подставим $t = 1$, получим

$$\Phi(a,w) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(a,w) = \mathrm{const}\,.$$

Поскольку $\Phi_k(a,w) = \displaystyle\sum_{l=k}^{\infty} P_{k,l}(a,w)$ — многочлен по w степени не выше чем k, то $\displaystyle\sum_{l=k}^{\infty} P_{k,l}(a,w) = P_{k,k}(a,w)$. Поэтому

$$\mathrm{const} = \Phi(a,w) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(a,w) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k,k}(a,w).$$

Следовательно, $P_{k,k}(a,w) = 0$ при $k > 0$. Отсюда $\Phi_k(a,w) = 0$ при $k > 0$, поэтому из (16) получим $\Phi(at,w) = \mathrm{const}$ и $\dfrac{\partial^\beta \Phi(at,w)}{\partial w^\beta} = 0$ при $\|\beta\| > 0$.

□

Следствие 2. *Пусть функция $f(\zeta) \in \mathcal{C}(S)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{\{0,a\}}$, тогда $\Phi(z,w) = \mathrm{const}$ для точек z, принадлежащих комплексной прямой $l_{0,a} \cap B$, т. е. $\dfrac{\partial^\beta \Phi(z,w)}{\partial w^\beta} = 0$ при $\|\beta\| > 0$.*

Доказательство следует из предложения 1 и теоремы 1.

□

Следствие 3. *В условиях следствия 2 производные $\dfrac{\partial^\beta F(z)}{\partial \bar{z}^\beta} = 0$ для точек $z \in l_{0,a} \cap B$ и $\|\beta\| > 0$.*

Теорема 2. *Пусть функция $f(\zeta) \in \mathcal{C}(S)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{\{c,d\}}$, $c, d \in B$, тогда $\Phi\big(c + (d-c)t, w\big) = \mathrm{const}$ по w при $|t| < 1$, т. е. $\dfrac{\partial^\beta \Phi\big(c + (d-c)t, w\big)}{\partial w^\beta} = 0$ при $\|\beta\| > 0$.*

Доказательство. Пусть точки $c, d \in B$. Рассмотрим автоморфизм $\varphi_c(z)$, переводящий точку c в 0 и наоборот, т.е. $\varphi_c(c) = 0$ и $\varphi_c(0) = c$. Пусть при этом автоморфизме точка d переходит в некоторую точку $a = \varphi_c(d)$. Обозначим $f_c(\zeta) = f(\varphi_c(\zeta))$ и

$$\Phi_c(z,w) = \int_S f_c(\zeta) Q(z,w,\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Из равенства (11) имеем $\Phi(z,w) = \Phi_c\big(\varphi_c(z), \varphi_{\bar{c}}(w)\big)$. Поскольку по предложению 1 $\Phi_c\big(0, \varphi_{\bar{c}}(w)\big) = \mathrm{const}$, то $\Phi(c,w) = \mathrm{const}$.

Покажем, что при автоморфизме шара комплексная прямая переходит в комплексную прямую. Действительно, пусть $z = c + (d-c)t$. Вычислим $\langle z, c\rangle = |c|^2 + t\big(\langle d, \bar c\rangle - |c|^2\big)$, тогда

$$\varphi_c\big(c+(d-c)t\big) = t\,\frac{c\big(|c|^2 - \langle d,\bar c\rangle\big) - \sqrt{1-|c|^2}\big(d|c|^2 - \langle d,\bar c\rangle c\big)}{|c|^2\big(1-|c|^2 - t(\langle d,\bar c\rangle - |c|^2)\big)}.$$

При $t = 0$ получим $\varphi_c\big(c+(d-c)0\big) = \varphi_c(c) = 0$, при $t = 1$ получим

$$a = \varphi_c\big(c+(d-c)1\big) = \varphi_c(d) = \frac{c\big(|c|^2 - \langle d,\bar c\rangle\big) - \sqrt{1-|c|^2}\big(d|c|^2 - \langle d,\bar c\rangle c\big)}{|c|^2\big(1-\langle d,\bar c\rangle\big)},$$

а в остальных точках t оно примет вид

$$\varphi_c\big(c+(d-c)t\big) = \frac{tg}{e_1 - e_2 t},$$

где g — вектор из $\mathbb{C}^n$. Положим $z_1 = \dfrac{tg_1}{e_1 - e_2 t}$, тогда $t = \dfrac{e_1 z_1}{g_1 + e_2 z_1}$, а $z_j = \dfrac{tg_j}{e_1 - e_2 t} = \dfrac{e_1 z_1 g_1}{e_1 g_1}$. Поэтому $\varphi_c\big(c+(d-c)t\big)$ определяет комплексную прямую, проходящую через точки 0 и a. По теореме 1 имеем $\Phi_c(ct, w) = \mathrm{const}$, тогда $\Phi\big(c+(d-c)t, w\big) = \mathrm{const}$.

□

Следствие 4. *В условиях теоремы 2 верно равенство* $\dfrac{\partial^\beta F(z)}{\partial \bar z^\beta}\Big|_{z=c+(d-c)t} = 0$ *при* $\|\beta\| > 0$.

Теорема 3. *Пусть $n = 2$ и функция $f(\zeta) \in \mathcal{C}(S)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{\{a,c,d\}}$, точки a, c, $d \in B$ не лежат на одной комплексной прямой в $\mathbb{C}^2$, тогда* $\dfrac{\partial^\beta \Phi(z,w)}{\partial w^\beta} = 0$ *для любого $z \in B$ и $\|\beta\| > 0$, а $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в B.*

Доказательство. Переведем точку d автоморфизмом φ в точку 0. При этом условия относительно точек 0, $\varphi(a)$ и $\varphi(c)$ останутся прежними. Поэтому точки $\varphi(a)$ и $\varphi(c)$ снова обозначим через a и c.

Пусть $\tilde z$ — произвольная точка прямой $l_{a,c}$, тогда по теореме 2 имеем $\dfrac{\partial^\beta \Phi(\tilde z, w)}{\partial w^\beta} = 0$ при $\|\beta\| > 0$. А по теореме 1 (по предложению 1 функция Φ удовлетворяет условиям теоремы 1 в нуле) тогда $\dfrac{\partial^\beta \Phi(z,w)}{\partial w^\beta} = 0$ для всех $z \in l_{0,\tilde z}$, т. е. для всех точек z из некоторого открытого множества в B. Подставляя в последнее равенство $w = \bar z$ и используя равенство (7), получим, что $\dfrac{\partial^\beta F(z)}{\partial \bar z^\beta} = 0$. Так как точки 0, a, c не лежат на одной комплексной прямой, то $\dfrac{\partial^\beta F(z)}{\partial \bar z^\beta} = 0$ для всех точек z из некоторого открытого множества и, следовательно, во всех точках шара B в силу вещественной аналитичности функции $F(z)$. В частности, $\dfrac{\partial F(z)}{\partial \bar z_j} = 0$ для любого $z \in B$ и $j = 1, \ldots, n$, поэтому $F(z)$ голоморфна в B, а значит, $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в B.

□

Из теоремы 3 следует, что в шаре $B \subset \mathbb{C}^2$ достаточным множеством для непрерывной функции, заданной на границе шара, является множество $\mathfrak{L}_{\{a,c,d\}}$, где a, c, d — произвольные точки из шара, не лежащие на одной комплексной прямой.

Обозначим $\mathcal{A}$ множество точек $a_k \in B \subset \mathbb{C}^n$, $k = 1, \ldots, n+1$, не лежащих на комплексной гиперплоскости в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 4. *Пусть $f(\zeta) \in \mathcal{C}(S)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}$, тогда $\dfrac{\partial^\beta \Phi(z,w)}{\partial w^\beta} = 0$ для любого $z \in B$ и $\|\beta\| > 0$, а $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в B.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n. Основанием индукции является теорема 3 ($n = 2$). Предположим, что для всех размерностей $k < n$ теорема верна. Не ограничивая общности при $k = n$, будем считать, что $a_{n+1} = 0$.

Рассмотрим комплексную плоскость Γ, проходящую через точки $a_1, \dots, a_n$, ее размерность по условию теоремы равна $n-1$ и $0 \notin \Gamma$. Пересечение $\Gamma \cap B$ является некоторым шаром в $\mathbb{C}^{n-1}$. Функция $f\big|_{\Gamma\cap S}$ непрерывна и обладает свойством голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}_1}$, где $\mathcal{A}_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$. По предположению индукции $\dfrac{\partial^\beta \Phi(z', w)}{\partial w^\beta} = 0$ при $\|\beta\| > 0$ для всех $z' \in \Gamma \cap B$.

Соединяя точки $z' \in \Gamma$ с точкой 0, получим по теореме 1, что $\dfrac{\partial^\beta \Phi(z,w)}{\partial w^\beta} = 0$ при $\|\beta\| > 0$ для некоторого открытого множества в B. Отсюда, как и в теореме 3, получаем, что $F(z)$ голоморфна в B, а значит, $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в B. $\square$

При написании статьи авторы были поддержаны грантом РФФИ 11-01-00852.

Список литературы

[1] М.Л.Аграновский, Р.Е.Вальский, Максимальность инвариантных алгебр функций, *Сиб. матем. журн.*, **12**(1971), №1, 3–12.

[2] E.L.Stout, The boundary values of holomorphic functions of several complex variables, *Duke Math. J.*, **44**(1977), no. 1, 105–108.

[3] Л.А.Айзенберг, А.П.Южаков, Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, Наука, 1979.

[4] A.M.Kytmanov, S.G.Myslivets, Higher-dimensional boundary analogs of the Morera theorem in problems of analytic continuation of functions, *J. Math. Sci.*, **120**(2004), no. 6, 1842-1867.

[5] J.Globevnik, E.L.Stout, Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables, *Duke Math. J.*, **64**(1991), no. 3, 571–615.

[6] А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец, О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения, *Матем. заметки*, **83**(2008), №4, 545-551.

[7] А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец, В.И.Кузоватов, Семейства комплексных прямых минимальной размерности, достаточные для голоморфного продолжения функций, *Сиб. матем. журн.*, **52**(2011), №2, 326–339.

[8] M.Agranovsky, Propagation of boundary CR-foliations and Morera type theorems for manifolds with attached analytic discs, **Advances in Math.**, **211**(2007) no. 1, 284–326.

[9] M.Agranovsky, Analog of a theorem of Forelli for boundary values of holomorphic functions on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Journal d'Analyse Mathematique*, **113**(2011), no. 1, 293-304.

[10] L.Baracco, Holomorphic extension from the sphere to the ball, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **388**(2012), no. 2, 760–762.

[11] J. Globevnik, Small families of complex lines for testing holomorphic extendibility, *Amer. J. of Math.* (to appear), http://arxiv.org/abs/0911.5088.

[12] А.М.Кытманов, Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения, Новосибирск, Наука, 1992.

[13] У.Рудин, Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$, М, Мир, 1984.

Holomorphic Continuation of Functions Along Finite Families of Complex Lines in the Ball

Alexander M. Kytmanov
Simona G. Myslivets

In this paper we consider continuous functions given on the boundary of a ball B of $\mathbb{C}^n$, $n > 1$ and having one-dimensional property of holomorphic extension along the families of complex lines, passing through finite number of points of B. We study the problem of existence of holomorphic continuation of such functions in a ball B.

Keywords: holomorphic continuation, Poisson integral.