УДК 517.55

Дуальная задача к задаче М.А. Гольдштика с неограниченной завихренностью

Исаак И. Вайнштейн*
Ирина М. Федотова†
Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет,
Киренского, 26, Красноярск, 660074,
Россия

Получена 01.11.2011, окончательный вариант 29.03.2012, принята к печати 10.05.2012

В работе доказано существование и единственность решения дуальной задачи к задаче М.А. Гольдштика с неограниченной возрастающей от функции тока завихренностью. На модельном примере для уравнения Лиувилля получены решения в явном виде.

Ключевые слова: вихревые и потенциальные течения, интегральное уравнение, функция Грина, уравнение Лиувилля.

1. Общая постановка задачи

В работе [1] рассмотрена дуальная задача

$$\Delta\Psi(x,y) = \begin{cases} F(\Psi), & \text{если } \Psi > 0, \\ 0, & \text{если } \Psi < 0 \end{cases}, \tag{1}$$

$$\Psi|_\Gamma = \varphi(s) \geqslant 0 \tag{2}$$

к задаче

$$\Delta\Psi(x,y) = \begin{cases} F(\Psi), & \text{если } \Psi < 0, \\ 0, & \text{если } \Psi > 0 \end{cases}, \tag{3}$$

$$\Psi|_\Gamma = \varphi(s) \geqslant 0.$$

Решение задачи ищут в ограниченной области D с границей Γ. Решение должно быть непрерывно дифференцируемо в области D, $F(\Psi) > 0$ при всех Ψ.

Задача (3), (2) описывает модель М.А. Лаврентьева отрывных течений с завихренностью $\omega = F(\Psi)$, Ψ — функция тока, $v_x = \dfrac{\partial\Psi}{\partial x}$, $v_y = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}$, $\overline{v} = \{v_x, v_y\}$ — вектор-скорость [2, 3].

Задача (1), (2) при $\omega = const$ является модельной задачей, описывающей движение идеальной жидкости в поле кориолисовых сил [2, 4].

Решение задачи (1), (2) не может быть отрицательным ни в одной точке области D. Пусть $\Psi(x_0, y_0) < 0$, точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Из неотрицательности граничной функции $\varphi(s)$ следует существование области $D_1 \subset D$, содержащей точку M_0, внутри которой $\Psi \leqslant 0$, а на ее границе $\Psi = 0$. Внутри D_1 решение является гармонической функцией ($\Delta\Psi = 0$), принимающей на границе нулевое значение. Отсюда следует, что в D_1 $\Psi \equiv 0$.

*isvain@mail.ru
†firim@mail.ru

В связи с этим задачу (1), (2) можно переформулировать следующим образом: требуется найти неотрицательное непрерывно дифференцируемое в области D решение уравнения

$$\Delta\Psi = F(\Psi), \quad \text{если } \Psi > 0, \tag{4}$$

удовлетворяющее условию (2), причем решение должно обращаться в ноль в точках области D.

В работе [1] доказано: если функция $F(\Psi)$ непрерывно дифференцируема и

$$0 < F(\Psi) \leqslant M, \tag{5}$$

то задача (4), (2) имеет решение, причем при выполнении неравенств

$$0 < \omega_0 \leqslant F(\Psi) \text{ при } \Psi > 0, \quad \omega_0 \geqslant \frac{4K}{R^2},$$

решение обращается в нуль в точках области D. $K = \max\varphi(s)$, R — радиус максимального по площади круга, который можно вписать в область D.

На модельной задаче к задаче (4), (2)

$$\Delta\Psi = e^{\lambda\Psi}, \quad \Psi > 0, \quad \lambda < 0, \tag{6}$$

$$\Psi|_{r=R} = K > 0, \tag{7}$$

D — круг радиуса R, установлено, что при выполнении неравенства

$$e^{\frac{\lambda K}{2}} < \frac{R^2\lambda}{8} + 1$$

задача имеет неотрицательное решение, обращающееся в нуль в области D. На конкретном примере показано существование двух таких решений.

2. Теорема существования и единственности решения

Рассмотрим задачу (4), (2) при условии

$$\frac{dF}{d\Psi} > 0, \tag{8}$$

без требования ограниченности функции $F(\Psi)$.

Рассмотрим последовательность задач

$$\Delta\Psi_n = \frac{1}{2}F(\Psi_n)(1 + \operatorname{th}(\Psi_n n)), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

$$\Psi_n|_\Gamma = \varphi(s). \tag{10}$$

Обозначим $\Phi(\Psi_n) = \dfrac{1}{2}F(\Psi_n)(1 + \operatorname{th}(\Psi_n n))$. С учетом (8)

$$\frac{d\Phi(\Psi_n)}{d\Psi_n} = \frac{1}{2}\frac{dF(\Psi_n)}{d\Psi_n}(1 + \operatorname{th}(\Psi_n n)) + \frac{1}{2}F(\Psi_n)\frac{n}{\operatorname{ch}^2(\Psi_n n)} > 0. \tag{11}$$

Отсюда следует единственность решения задачи (9), (10) [2, 5].

Перейдем к

$$\Psi_n = U_n + \Psi_0, \tag{12}$$

Ψ_0 — гармоническая в области D функция, удовлетворяющая условию (10). Задача (9), (10) перепишется в виде

$$\Delta U_n = \frac{1}{2}F(U_n + \Psi_0)(1 + \mathrm{th}((U_n + \Psi_0)n)), \tag{13}$$

$$U_n|_\Gamma = 0. \tag{14}$$

С учетом формулы конечных приращений

$$\frac{1}{2}F(U_n + \Psi_0)(1 + \mathrm{th}((U_n + \Psi_0)n)) = \frac{1}{2}F(\Psi_0)(1 + \mathrm{th}(\Psi_0 n)) + \frac{d\Phi(\overline{U}_n)}{d\Psi_n}U_n \tag{15}$$

($\overline{U}_n$ находится между Ψ_0 и $U_n + \Psi_0$) задачу (13), (14) перепишем в виде

$$\Delta U_n - \frac{d\Phi(\overline{U}_n)}{d\Psi_n}U_n = \frac{1}{2}F(\Psi_0)(1 + \mathrm{th}(\Psi_0 n)), \tag{16}$$

$$U_n|_\Gamma = 0. \tag{17}$$

Для решения задачи (16), (17) имеет место оценка [5]

$$|U_n| \leqslant C \max \frac{1}{2}F(\Psi_0)(1 + \mathrm{th}(\Psi_0 n)) \leqslant CF(\Psi_0).$$

Константа C зависит только от области D. Возвращаясь к Ψ_n, получаем

$$|\Psi_n| \leqslant K + CM = C_1, \tag{18}$$

где $M = \max F(\Psi_0(x, y))$, $(x, y) \in D$, $K = \max \varphi(s)$.

При условии (8), с учетом (11), задача (9), (10) имеет единственное решение при каждом n [5]. Это решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Psi_n(x, y) = \Psi_0(x, y) - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_D F(\Psi_n(\xi, \eta))(1 + \mathrm{th}(\Psi_n(\xi, \eta)n))G(x, y, \xi, \eta)d\xi d\eta, \tag{19}$$

$G(x, y, \xi, \eta)$ — функция Грина для области D задачи Дирихле для оператора Лапласа. Учитывая неравенство (18) для решений задачи (9), (10) и свойства интеграла в (19) (интеграла типа потенциала), заключаем, что последовательность Ψ_n компактна в пространстве $C^1(D)$. Пусть подпоследовательность Ψ_{n_k} сходится к непрерывно дифференцируемой функции $\Psi(x, y)$. Докажем, что предельная функция $\Psi(x, y)$ в точках, где $\Psi > 0$, является решением уравнения $\Delta\Psi = F(\Psi)$ в области D.

Пусть в точке $m_0 \in D$, $\Psi(m_0) > 0$. Возьмем круговую окрестность $B_\varepsilon \subset D$ точки m_0, в которой, начиная с некоторого номера, $\Psi_{n_k} > 0$. В B_ε рассмотрим последовательность задач

$$\Delta V_{n_k} = \frac{1}{2}F(V_{n_k})(1 + \mathrm{th}(V_{n_k} n_k)), \tag{20}$$

$$V_{n_k}|_{\Gamma_{B_\varepsilon}} = \Psi_{n_k}|_{\Gamma_{B_\varepsilon}} > 0. \tag{21}$$

За V_{n_k} возьмем Ψ_{n_k}. $V_{n_k} \to \Psi > 0$. В замкнутой области B_ε функция $\frac{1}{2}F(V_{n_k})(1+\mathrm{th}(V_{n_k} n_k))$ равномерно стремится к $F(\Psi)$ ($\lim \frac{1}{2}(1 + \mathrm{th}(V_{n_k} n_k) = 1)$, тогда в уравнении (12) можно перейти к пределу при $n_k \to \infty$. В результате получаем $\Delta\Psi = F(\Psi)$ в B_ε. Аналогично доказывается, что в точках, в которых $\Psi < 0$, $\Delta\Psi = 0$. А далее, как доказывалось выше, решение Ψ не может принимать отрицательные значения в D.

Если множество точек границы области D, в которых граничная функция $\varphi(s) > 0$, связно,то множество точек, в которых $\Psi > 0$, связно. Доказательство этого факта дословно переносится из аналогичного утверждения работы [1], в которой рассматривается случай ограниченной $F(\Psi)$.

Получим условия, при которых Ψ обращается в нуль в области D. Пусть $\Psi > 0$ для всех точек D. Тогда

$$\Delta\Psi = F(\Psi), \quad x, y \in D.$$

Запишем для Ψ интегральное уравнение

$$\Psi = \Psi_0 - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D F(\Psi)G(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{22}$$

Пусть C_R – наибольший по площади круг радиусом R, который можно вписать в область D (можно считать, что его центр находится в начале координат), $G_R(x,y,\xi,\eta)$ – функция Грина задачи Дирихле оператора Лапласа для круга C_R.

Учитывая, что в C_R

$$\Delta\left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D F(\Psi)Gd\xi d\eta - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_R} F(\Psi)G_R d\xi d\eta\right) = -F(\Psi) + F(\Psi) = 0$$

и

$$\left.\left(\iint\limits_D F(\Psi)Gd\xi d\eta - \iint\limits_{C_R} F(\Psi)G_R d\xi d\eta\right)\right|_{r=R} > 0,$$

заключаем, что в C_R

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D F(\Psi)Gd\xi d\eta > \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_R} F(\Psi)G_R d\xi d\eta.$$

Отсюда и из (22) следует неравенство

$$\Psi \leqslant K - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_R} F(\Psi)G_R d\xi d\eta,\ (x,y) \in C_R.$$

Так же, как в работе [1], требуем выполнение неравенства

$$0 < \omega_0 \leqslant F(\Psi) \text{ при } \Psi > 0.$$

Тогда

$$\Psi \leqslant K - \frac{\omega_0}{2\pi}\iint\limits_{C_R} G_R d\xi d\eta,\ (x,y) \in C_R. \tag{23}$$

Интеграл в (23) вычисляется в явном виде. После чего

$$\Psi \leqslant K + \frac{\omega_0}{4}\,(r^2 - R^2),\ r^2 = x^2 + y^2,\ r \leqslant R.$$

Если

$$R^2 - \frac{4K}{\omega_0} \geqslant 0,\ \left(\omega_0 \geqslant \frac{4K}{R^2}\right),$$

то $\Psi \leqslant 0$ в C_{R_1}, $\quad R_1 = \sqrt{R^2 - \dfrac{4K}{\omega_0}}$. Это противоречит предположению, что Ψ строго больше нуля всюду в D. Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть функция $F(\Psi)$ непрерывно дифференцируема по Ψ. При выполнении неравенств*

$$\frac{dF(\Psi)}{d\Psi} > 0, \quad 0 < \omega_0 \leqslant F(\Psi) \ \text{при} \ \Psi > 0, \quad \omega_0 \geqslant \frac{4K}{R^2},$$

задача (4), (2) имеет решение, которое обращается в нуль в точках области D.

Докажем единственность решения задачи (4), (2). Доказательство проведем на решениях, для которых $\Delta\Psi = 0$ на множестве E, где $\Psi = 0$. Пусть еще E имеет гладкую границу. Этот случай соответствует модельной задаче, которая будет рассмотрена ниже в настоящей работе.

Пусть Ψ_1, Ψ_2 — два различных решения задачи (4),(2) и $\Psi_1 < 0$ в $B_1 \in D$, $\Psi_2 < 0$ в $B_2 \in D$.

$$\Delta\Psi_1 = \begin{cases} F(\Psi_1), & \text{если } (x,y) \in B_1, \\ 0, & \text{если } (x,y) \in E_1 = D \setminus \overline{B}_1, \end{cases} \tag{24}$$

$$\Delta\Psi_2 = \begin{cases} F(\Psi_2), & \text{если } (x,y) \in B_2, \\ 0, & \text{если } (x,y) \in E_2 = D \setminus \overline{B}_2. \end{cases} \tag{25}$$

Возможны два случая: ни одно из множеств E_1, E_2 либо не содержится в другом, либо содержится. Рассмотрим второй случай (этот случай соответствует рассматриваемой ниже задаче). Аналог первого случая рассмотрен в [2, 4]. Пусть $E_1 \subset E_2$ и Γ_1, Γ_2 — границы E_1, E_2 соответственно. Рассмотрим функцию $U = \Psi_2 - \Psi_1$. На множестве E_1 функция $U = 0$, на множестве $E_2 \setminus E_1$ функция $U < 0$. $U|_\Gamma = 0$.

В области $D \setminus \overline{E_2}$ имеем: $\Delta U = F(\Psi_2) - F(\Psi_1) = \dfrac{\partial F(\overline{\Psi})}{\partial \Psi}(\Psi_2 - \Psi_1) = cU(x,y)$, $c(x,y) = \dfrac{\partial F(\overline{\Psi})}{\partial \Psi} > 0$, $\overline{\Psi}$ находится между Ψ_2 и Ψ_1. Таким образом,

$$\Delta U = cU \quad \text{в } D \setminus \overline{E_2}, \tag{26}$$

$$\Delta U = -F(\Psi_1) < 0 \quad \text{в } E_2 \setminus \overline{E_1}. \tag{27}$$

Покажем, что функция U супергармонична в $D \setminus \overline{E_1}$. Учитывая $U|_\Gamma = 0$, $\underline{U}|_{\Gamma_2} < 0$, свойства максимума и минимума решений уравнений (26), заключаем, что в $D \setminus \overline{E_2}$ функция $U < 0$.

В соответствии с (26), (27)

$$\Delta U = cU < 0 \quad \text{в } D \setminus \overline{E_2}, \quad \Delta U = -F(\Psi_1) < 0 \quad \text{в } E_2 \setminus \overline{E_1}.$$

Так что функция U супергармонична отдельно в $D \setminus \overline{E_2}$ и $E_2 \setminus \overline{E_1}$. Покажем, что она супергармонична и на Γ_2. В соответствии с определением супергармоничности требуется показать, что в любой окрестности Γ_ε точки Γ_2 (окрестности Γ_ε принадлежат $D \setminus \overline{E_1}$) $U > U_0$, где U_0 — гармоническая в этой окрестности функция, принимающая на границе этой окрестности те же значения, что и функция U [6]. Это следует из неравенства

$$U = U_0 - \frac{1}{2\pi}\int\int_{O_1} cUG_{\Gamma_\varepsilon}(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi}\int\int_{O_2} F(\Psi_1)G_{\Gamma_\varepsilon}(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta > U_0.$$

Здесь $O_1 = \Gamma_\varepsilon \setminus \overline{E_2}$, $O_2 = \Gamma_\varepsilon \setminus (D \setminus \overline{E_2})$, $G_{\Gamma_\varepsilon}(x,y,\xi,\eta)$ — функция Грина для области Γ_ε задачи Дирихле для оператора Лапласа. При выводе неравенства учли, что в O_1 $U < 0$.

Супергармоническая функция не может достигать отрицательного минимума внутри области супергармоничности. Учитывая, что $U|_\Gamma = \ U|_{\Gamma_1} = 0$, из супергармоничности U следует, что $U > 0$ в $D \setminus \overline{E_2}$, что противоречит выведенному неравенству $U < 0$ в $D \setminus \overline{E_2}$.

Другой случай, указанный в начале доказательства единственности решения, рассматривается аналогично.

3. Решения модельной задачи

Рассмотрим модельный пример задачи (6), (7) при $\lambda > 0$. В этом случае условие $\left(\dfrac{dF(\Psi)}{d\Psi}) > 0\right)$ выполнено. Ищем неотрицательное решение.

Ищем решение, зависящее только от r, $r^2 = x^2+y^2$. Тогда задачу (6), (7) можно записать в виде

$$\Delta\Psi = \begin{cases} e^{\lambda\psi}, & \text{если } a < r < R, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant r < a. \end{cases} \tag{28}$$

$$\Psi|_{r=a} = 0, \quad \Psi|_{r=R} = K. \tag{29}$$

Пусть C_a — круг радиусом a с центром в начале координат. Из условий $\Delta\Psi = 0$ в C_a и $\Psi|_{r=a} = 0$ следует (из принципа экстремума для гармонических функций), что $\Psi \equiv 0$ в C_a. Тогда $\dfrac{d\Psi}{dr}|_{r=a-0} = 0$. Из требования непрерывной дифференцируемости решения следует

$$\frac{d\Psi}{dr}|_{r=a-0} = \frac{d\Psi}{dr}|_{r=a+0} = \frac{d\Psi}{dr}|_{r=a} = 0.$$

Для эллиптического уравнения Лиувилля $\Delta\Psi = e^{\lambda\Psi}$ известны формулы представления решений. Для рассматриваемого случая $\lambda > 0$

$$\Psi = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{2(v_x^2+v_y^2)}{\lambda v^2(x,y)}, \quad \Psi = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{2(v_x^2+v_y^2)}{\lambda \operatorname{sh}^2 v(x,y)}, \quad \Psi = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{2(v_x^2+v_y^2)}{\lambda \sin^2 v(x,y)}, \tag{30}$$

где $v(x,y)$ — произвольная гармоническая функция [7].

Возьмем

$$\Psi = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{2(v_x^2+v_y^2)}{\lambda \operatorname{sh}^2 v(x,y)}. \tag{31}$$

За гармоническую функцию $v(x,y)$ возьмем $v(x,y) = c_1\ln r + c_2$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Решение задачи (28) (29) ищем в виде

$$\Psi(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant r \leqslant a, \\ \dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{2c_1^2}{\lambda r^2\operatorname{sh}^2(c_1\ln r + c_2)}, & \text{если } a \leqslant r \leqslant R, \end{cases} \tag{32}$$

при условии

$$\Psi|_{r=R} = K, \quad \Psi|_{r=a} = 0, \quad \frac{d\Psi}{dr}|_{r=a} = 0, \quad 0 < a < R. \tag{33}$$

Имеем три неизвестные: $a,\ c_1,\ c_2$.

Удовлетворяя условиям (33), получаем систему для нахождения этих неизвестных:

$$\frac{2c_1^2}{\lambda R^2\operatorname{sh}^2(c_1\ln R + c_2)} = e^{\lambda K}, \quad \frac{2c_1^2}{\lambda a^2\operatorname{sh}^2(c_1\ln a + c_2)} = 1, \tag{34}$$

$$1 + \frac{c_1\operatorname{ch}(c_1\ln a + c_2)}{\operatorname{sh}(c_1\ln a + c_2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1\ln a + c_2 = -\operatorname{arcth} c_1. \tag{35}$$

Тогда

$$\Psi(r) = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{2c_1^2}{\lambda r^2\operatorname{sh}^2(\frac{c_1}{2}\ln\frac{r^2}{a^2} - \operatorname{arcth} c_1)}, \quad \text{если } a \leqslant r \leqslant R. \tag{36}$$

$$\frac{2c_1^2}{\lambda R^2 \operatorname{sh}^2(\frac{c_1}{2}\ln\frac{R^2}{a^2} - \operatorname{arcth} c_1)} = e^{\lambda K}, \quad \frac{2c_1^2}{\lambda a^2 \operatorname{sh}^2(\operatorname{arcth} c_1)} = 1 \Rightarrow c_1 = \pm\sqrt{1 - \frac{\lambda a^2}{2}}. \tag{37}$$

$$\frac{\lambda R^2 \operatorname{sh}^2(\frac{\sqrt{1-\frac{\lambda a^2}{2}}}{2}\ln\frac{R^2}{a^2} - \operatorname{arcth}\sqrt{1-\frac{\lambda a^2}{2}})}{2(1-\frac{\lambda a^2}{2})} = e^{-\lambda K}. \tag{38}$$

Константу c_1 из (37) взяли со знаком плюс, так как изменение знака на минус не изменяет соотношений (32), (34). Из уравнение (38) определяем величину a.

Введем функцию

$$y(a) = \frac{\lambda R^2 \operatorname{sh}^2(\frac{\sqrt{1-\frac{\lambda a^2}{2}}}{2}\ln\frac{R^2}{a^2} - \operatorname{arcth}\sqrt{1-\frac{\lambda a^2}{2}})}{2(1-\frac{\lambda a^2}{2})}, \quad 0 < a < \sqrt{\frac{2}{\lambda}}. \tag{39}$$

Рассмотрим два случая ($0 < a < R < \sqrt{\frac{2}{\lambda}}$, $0 < a < \sqrt{\frac{2}{\lambda}} < R$).

1. $0 < a < R < \sqrt{\frac{2}{\lambda}}$. Тогда

$$\frac{R^2\lambda}{2} < 1. \tag{40}$$

Находим $y(R) = 1, \quad y(0) = \left(1 - \frac{R^2\lambda}{8}\right)^2 < 1$. Тогда из вида уравнения (38) следует, что при выполнении неравенства

$$e^{-\lambda K} > \left(1 - \frac{R^2\lambda}{8}\right)^2 \tag{41}$$

оно имеет решение.

Пусть $a = a_1$ — корень уравнения (38). Подставив $a = a_1$ в (32), получим решение задачи (6), (7) для рассматриваемого случая

$$\Psi(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant r \leqslant a_1. \\ \dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{2(1-\frac{\lambda a_1^2}{2})}{\lambda r^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}}\ln\frac{r}{a_1} - \operatorname{arcth}\sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}})}, & \text{если } a_1 \leqslant r \leqslant R, \end{cases} \tag{42}$$

если $\operatorname{sh}^2(\sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}}\ln\frac{r}{a_1} - \operatorname{arcth}\sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}})$ не обращается в нуль при $a_1 \leqslant r < R$.

Обозначим

$$g_1(r) = \sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}}\ln\frac{r}{a_1} - \operatorname{arcth}\sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}}. \tag{43}$$

Функция $g_1(r)$ возрастает по r $\left(g_1'(r) = \sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}}\frac{1}{r} > 0\right)$.

$$g_1(a_1) = -\operatorname{arcth}\sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}} < 0, \quad g_1(R) = \sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}}\ln\frac{R}{a_1} - \operatorname{arcth}\sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}}.$$

Рассмотрим функцию

$$g_2(a) = \sqrt{1-\frac{\lambda a^2}{2}}\ln\frac{R}{a} - \operatorname{arcth}\sqrt{1-\frac{\lambda a^2}{2}} \quad (R \text{ зафиксировали}).$$

Имеем

$$\lim_{a\to 0} g_2(a) = \frac{1}{2}\ln\frac{R^2\lambda}{8} < 0,\ \ g_2(R) = -\operatorname{arcth}\sqrt{1-\frac{\lambda R^2}{2}} < 0. \tag{44}$$

Далее $g_2'(a) = -\dfrac{\lambda a}{2\sqrt{1-\frac{\lambda a^2}{2}}}\left(\ln\dfrac{R}{a}-1\right)$. Производная $g_2'(a)$ обращается в нуль только в одной точке $a = \dfrac{R}{e}$. В этой точке

$$g_2\left(\frac{R}{e}\right) = \sqrt{1-\frac{\lambda R^2}{2e^2}} - \operatorname{arcth}\sqrt{1-\frac{\lambda R^2}{2e^2}} < 0. \tag{45}$$

Отсюда, учитывая (44), следует, что функция $g_2(a) < 0$ на промежутке $0 < a \leqslant R$. Учитывая, что a_1 также принадлежит промежутку $(0, R]$, получаем

$$g_1(R) = g_2(a_1) = \sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}}\ln\frac{R}{a_1} - \operatorname{arcth}\sqrt{1-\frac{\lambda a_1^2}{2}} < 0.$$

Из возрастания функции $g_1(r)$ и неравенств $g_1(a_1) < 0$, $g_1(R) < 0$, следует, что $g_1(r)$ на промежутке $[a_1, R]$ не обращается в нуль.

Таким образом, формула (32) является решением при выполнении неравенств (40), (41).

2. $0 < a < \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}} < R$. Тогда

$$\frac{R^2\lambda}{2} > 1. \tag{46}$$

Находим $\displaystyle\lim_{a\to\sqrt{\frac{2}{\lambda}}} y(a) = \frac{\lambda R^2(\frac{1}{2}\ln\frac{R^2\lambda}{2}-1)^2}{2}$, $y(0) = \left(1-\dfrac{R^2\lambda}{8}\right)^2$.

Функция $y_1(x) = x(\dfrac{1}{2}\ln x - 1)^2$, $x = \dfrac{R^2\lambda}{2}$, $x > 1$ на промежутке $[1, +\infty)$ имеет единственный экстремум (минимум) в точке $x = e^2$, $y(e^2) = 0$. Уравнение

$$x(\frac{1}{2}\ln x - 1)^2 = 1 \tag{47}$$

на промежутке $[1, +\infty)$ имеет два корня.

Пусть x^* — больший корень ($x^* = 12,89615347 > e^2$). Меньший корень меньше e^2. На промежутке $(1, x^*)$ $y_1(x) < 1$.

Потребуем выполнения неравенства $y(0) < 1$. Оно выполняется при $\dfrac{R^2\lambda}{2} < 8$. Так как $x^* > 8$, то при

$$1 < \frac{R^2\lambda}{2} < 8 \tag{48}$$

$y(0) < 1$ и $y\left(\sqrt{\dfrac{2}{\lambda}}\right) < 1$.

Обозначим

$$M = \max\left\{\left(1-\frac{R^2\lambda}{8}\right)^2, \frac{\lambda R^2(\frac{1}{2}\ln\frac{R^2\lambda}{2}-1)^2}{2}\right\}, m = \min\left\{\left(1-\frac{R^2\lambda}{8}\right)^2, \frac{\lambda R^2(\frac{1}{2}\ln\frac{R^2\lambda}{2}-1)^2}{2}\right\}.$$

Тогда при выполнении неравенства

$$m < e^{-\lambda K} < M \tag{49}$$

уравнение (38) имеет решение.

Пусть $a = a_1$ — корень уравнения (38). Подставив $a = a_1$ в (32), получаем решение рассматриваемой модельной задачи (6), (7) в виде (42), если знаменатель в (42) не обращается в нуль при $a_1 \leqslant r < R$.

Функция $g_1(r)$ (43) возрастает по r $\left(g_1'(r) = \sqrt{1 - \frac{\lambda a_1^2}{2}}\frac{1}{r} > 0\right)$.

$$g_1(a_1) = -\operatorname{arcth}\sqrt{1 - \frac{\lambda a_1^2}{2}} < 0, \quad g_1(R) = \sqrt{1 - \frac{\lambda a_1^2}{2}}\ln\frac{R}{a_1} - \operatorname{arcth}\sqrt{1 - \frac{\lambda a_1^2}{2}}.$$

Рассмотрим функцию

$$g_2(a) = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda a^2}{2}}\ln\frac{R}{a} - \operatorname{arcth}\sqrt{1 - \frac{\lambda a^2}{2}} \quad (\lambda \text{ — зафиксировали}),\ 0 < a < \sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}.$$

Далее

$$\lim_{a\to 0} g_2(a) = \frac{1}{2}\ln\frac{R^2\lambda}{8}, \quad g_2(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}) = 0, \quad g_2'(a) = -\frac{\lambda a}{2\sqrt{1 - \frac{\lambda a^2}{2}}}\left(\ln\frac{R}{a} - 1\right). \tag{50}$$

Производная $g_2'(a)$ обращается в нуль только в одной точке $a = \dfrac{R}{e}$. В этой точке

$$g_2(\frac{R}{e}) = \sqrt{1 - \frac{\lambda R^2}{2e^2}} - \operatorname{arcth}\sqrt{1 - \frac{\lambda R^2}{2e^2}} < 0. \tag{51}$$

Пусть

$$\frac{R^2\lambda}{8} \leqslant 1, \tag{52}$$

тогда $\lim\limits_{a\to 0} g_2(a) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{R^2\lambda}{8} \leqslant 0$, отсюда, учитывая (50), (51), заключаем, что функция $g_2(a) < 0$ на промежутке $0 < a < \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}}$. Учитывая, что $a_1 < \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}}$, получаем

$$g_1(R) = g_2(a_1) = \sqrt{1 - \frac{\lambda a_1^2}{2}}\ln\frac{R}{a_1} - \operatorname{arcth}\sqrt{1 - \frac{\lambda a_1^2}{2}} < 0.$$

Из возрастания функции $g_1(r)$ и неравенств $g_1(a_1) < 0$, $g_1(R) < 0$, следует, что $g_1(r)$ на промежутке $[a_1, R]$ не обращается в нуль.

Таким образом, формула (32) является решением при выполнении неравенств (48), (49), (52).

Далее, решение задачи ищем в виде

$$\Psi = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{2(v_x^2 + v_y^2)}{\lambda\sin^2 v(x,y)}. \tag{53}$$

За гармоническую функцию $v(x,y)$ возьмем $v(x,y) = c_1\ln r + c_2$.

В соответствии с (53) решение задачи (28), (29) ищем в виде

$$\Psi(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant r \leqslant a, \\ \dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{2c_1^2}{\lambda r^2\sin^2(c_1\ln r + c_2)}, & \text{если } a \leqslant r \leqslant R, \end{cases} \tag{54}$$

при условии (33). Имеем три неизвестные — a, c_1, c_2.

Удовлетворяя условиям (33), получаем систему для нахождения этих неизвестных:

$$\frac{2c_1^2}{\lambda R^2 \sin^2(c_1 \ln R + c_2)} = e^{\lambda K}, \quad \frac{2c_1^2}{\lambda a^2 \sin^2(c_1 \ln a + c_2)} = 1, \tag{55}$$

$$1 + \frac{c_1 \cos(c_1 \ln a + c_2)}{\sin(c_1 \ln a + c_2)} = 0. \tag{56}$$

Из (56) $c_1 \ln a + c_2 = \pi - \operatorname{arcctg}(\frac{1}{c_1}) + n\pi$. Тогда

$$\Psi(r) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{2c_1^2}{\lambda r^2 \sin^2(\frac{c_1}{2} \ln \frac{r^2}{a^2} - \operatorname{arcctg} \frac{1}{c_1})}, \quad \text{если } a \leqslant r \leqslant R. \tag{57}$$

$$\frac{2c_1^2}{\lambda R^2 \sin^2(\frac{c_1}{2} \ln \frac{R^2}{a^2} - \operatorname{arcctg} \frac{1}{c_1})} = e^{\lambda K}, \quad \frac{2c_1^2}{\lambda a^2 \sin^2(\operatorname{arcctg} \frac{1}{c_1})} = 1 \Rightarrow c_1 = \pm\sqrt{\frac{\lambda a^2}{2} - 1}. \tag{58}$$

$$\frac{\lambda R^2 \sin^2(\frac{\sqrt{\frac{\lambda a^2}{2} - 1}}{2} \ln \frac{R^2}{a^2} - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda a^2}{2} - 1}})}{2(\frac{\lambda a^2}{2} - 1)} = e^{-\lambda K}. \tag{59}$$

Из уравнения (59) определяем величину a. Введем функцию

$$y(a) = \frac{\lambda R^2 \sin^2(\frac{\sqrt{\frac{\lambda a^2}{2} - 1}}{2} \ln \frac{R^2}{a^2} - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda a^2}{2} - 1}})}{2(\frac{\lambda a^2}{2} - 1)}, \quad \sqrt{\frac{2}{\lambda}} < a \leqslant R, \quad y(R) = 1. \tag{60}$$

$$\lim_{a \to \sqrt{\frac{2}{\lambda}}} y(a) = \frac{\lambda R^2 (\frac{1}{2} \ln \frac{R^2 \lambda}{2} - 1)^2}{2} = y_1(\frac{R^2 \lambda}{2}),$$

что совпадает со случаем 2, когда решение задачи искали в виде (32), где было установлено, что на промежутке $(1, x^*)$ $y_1(\frac{R^2\lambda}{2}) < 1$.

Пусть

$$1 \leqslant \frac{R^2 \lambda}{2} < x^*. \tag{61}$$

Учитывая, что $y(R) = 1$ и $y(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}) = y_1(\frac{R^2\lambda}{2}) < 1$, заключаем, что уравнение (59) относительно a ($\sqrt{\frac{2}{\lambda}} < a \leqslant R$,) имеет хотя бы одно решение, если

$$e^{-\lambda K} > \frac{\lambda R^2 (\frac{1}{2} \ln \frac{R^2 \lambda}{2} - 1)^2}{2}. \tag{62}$$

Пусть $a = a_1$ — корень уравнения (59). Подставив $a = a_1$ в (54), получаем решение рассматриваемой модельной задачи (6), (7):

$$\Psi(r) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } 0 \leqslant r \leqslant a_1. \\ \dfrac{1}{\lambda} \ln \dfrac{2(\frac{\lambda a_1^2}{2} - 1)}{\lambda r^2 \sin^2(\sqrt{\frac{\lambda a_1^2}{2} - 1} \ln \frac{r}{a_1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda a_1^2}{2} - 1})}, \quad \text{если } a_1 \leqslant r \leqslant R, \end{cases} \tag{63}$$

если $\sin^2(\sqrt{\frac{\lambda a_1^2}{2}-1}\ln\frac{r}{a_1}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda a_1^2}{2}-1})$ не обращается в нуль при $a_1\leqslant r<R$.

Обозначим

$$g_1(r)=\sqrt{\frac{\lambda a_1^2}{2}-1}\ln\frac{r}{a_1}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda a_1^2}{2}-1}.$$

Функция $g_1(r)$ возрастает по r $\left(g_1'(r)=\sqrt{\frac{\lambda a_1^2}{2}-1}\frac{1}{r}>0\right)$, $g_1(a_1)=-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda a_1^2}{2}-1}>-\frac{\pi}{2}$, $g_1(r)=\sqrt{\frac{\lambda a_1^2}{2}-1}\ln\frac{R}{a_1}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda a_1^2}{2}-1}$. Рассмотрим функцию

$$g_2(a)=\sqrt{\frac{\lambda a^2}{2}-1}\ln\frac{R}{a}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda a^2}{2}-1}\quad (R \text{ зафиксировали}).$$

Далее, $g_2'(a)=\frac{\lambda a}{2\sqrt{\frac{\lambda a^2}{2}-1}}\left(\ln\frac{R}{a}-1\right)$. Производная $g_2'(a)$ обращается в нуль при $a=\frac{R}{e}$.

Пусть $R<e$ $(R>\sqrt{\frac{2}{\lambda}})$, $g_2'<0$. Функция $g_2(a)$ убывает. $g_2(\sqrt{\frac{2}{\lambda}})=0$. А так как $a_1>\sqrt{\frac{2}{\lambda}}$, то $g_2(a_1)<0$, $g_1(R)<0$. Из возрастания функции $g_1(r)$ и неравенств $g_1(a_1)<0$, $g_1(R)<0$, следует, что $g_1(r)$ на промежутке $[a_1,R]$ не обращается в нуль.

Учитывая возрастание функции $g_1(r)$ и $g_1(a)>-\frac{\pi}{2}$, $g_1(R)<0$, заключаем, что на промежутке $[a_1,R]$ функция $g_1(r)$ не принимает значения $-\pi$.

Таким образом, доказали, что функция $\sin^2 g_1(r)$ не обращается в нуль на промежутке $[a_1,R]$ и формула (54) является решением задачи при $R<e$ и выполнении неравенств (61), (62).

Далее решение задачи ищем в виде

$$\Psi=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{2(v_x^2+v_y^2)}{\lambda v^2(x,y)}. \tag{64}$$

За гармоническую функцию $v(x,y)$ возьмем $v(x,y)=c_1\ln r+c_2$.

В соответствии с (64) решение задачи (28), (29) ищем в виде

$$\Psi(r)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqslant r\leqslant a.\\ \frac{1}{\lambda}\ln\frac{2c_1^2}{\lambda r^2(c_1\ln r+c_2)^2}, & \text{если } a\leqslant r\leqslant R,\end{cases} \tag{65}$$

при условии (33). Имеем три неизвестные — $a,\ c_1,\ c_2$.

Удовлетворяя условиям (33), получаем систему уравнений для нахождения этих неизвестных:

$$\frac{2c_1^2}{\lambda R^2(c_1\ln R+c_2)^2}=e^{\lambda K},\quad \frac{2c_1^2}{\lambda a^2(c_1\ln a+c_2)^2}=1,\quad 1+\frac{c_1}{(c_1\ln a+c_2)}=0\Rightarrow a=\sqrt{\frac{2}{\lambda}}. \tag{66}$$

При выполнении равенства

$$\frac{\lambda R^2}{2}(\frac{1}{2}\ln\frac{R^2\lambda}{2}-1)^2=e^{-\lambda K} \tag{67}$$

функция

$$\Psi(r)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqslant r\leqslant \sqrt{\frac{2}{\lambda}},\\ \frac{1}{\lambda}\ln\frac{2}{\lambda r^2(\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda r^2}{2}-1)^2}, & \text{если } \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\leqslant r\leqslant R,\end{cases} \tag{68}$$

будет решением задачи, если $\ln \dfrac{r^2\lambda}{2} - 1$ не обращается в нуль при $\sqrt{\dfrac{2}{\lambda}} < r < R$. Функция $\ln \dfrac{r^2\lambda}{2} - 1$ обращается в нуль при $r = e\sqrt{\dfrac{2}{\lambda}}$. Учитывая, что $\sqrt{\dfrac{2}{\lambda}} \leqslant r \leqslant R$, получаем, что при выполнении неравенства

$$1 < \frac{\lambda R^2}{2} < e^2 \tag{69}$$

$\ln \dfrac{r^2\lambda}{2} - 1$ не обращается в нуль на промежутке $[\sqrt{\frac{2}{\lambda}}, R]$.

Равенство (67) выполняется, как ранее установлено, при $\dfrac{\lambda R^2}{2} < x^* = 12,89615347$, его левая часть меньше единицы.

Таким образом формула (65) дает решение задачи при выполнении условий (69).

Список литературы

[1] И.И.Вайнштейн, Дуальная задача к задаче М.А. Гольдштика с произвольной завихренностью, *Журнал Сибирского федерального университета, Математика и физика*, **3**(2010), №4, 500–506.

[2] М.А.Гольдштик, Вихревые потоки, Наука, Новосибирск, 1961.

[3] И.И.Вайнштейн, Решение двух дуальных задач о склейке вихревых и потенциальных течений вариационным методом М.А. Гольдштика, *Журнал Сибирского федерального университета, Математика и физика*, **4**(2011), №3, 320–331.

[4] И.И.Вайнштейн, М.А.Гольдштик, О движении идеальной жидкости в поле кориолисовых сил, *Докл. АН СССР*, **6**(1967), №6, 1277–1230.

[5] Р.Курант, Уравнения с частными производными, М., Наука, 1964.

[6] И.И.Привалов, Субгармонические функции, М., ОНТИ, 1937.

[7] Э.И.Семенов, О новых точных решениях неавтономного уравнения Лиувилля, *Сиб. матем. журн.*, **49**(2008), №1, 207–216.

The Dual Problem to M.A.Goldshtik Problem with Unbounded Vorticity

Isaak I. Vainshtein
Irina M. Fedotova

The existence and uniqueness of solutions of the dual problem to M.A.Goldshtik problem with unbounded increasing from the flow function vorticity. The solutions in the explicit form was determined on a model example for Liouville equation.

Keywords: vortex and potential flows, integral equation, Green function, Liouville equation.