УДК 517.9

О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса

Юрий Я. Белов*
Кирилл В. Коршун
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 29.03.2012, окончательный вариант 14.05.2012, принята к печати 13.08.2012

Рассмотрена задача идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса. Данная задача исследована в случае данных Коши и первой краевой задачи. Получены условия на входные данные, гарантирующие однозначную разрешимость указанных задач в классах гладких ограниченных функций.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение Бюргерса, краевая задача, аппроксимация.

1. Задача Коши

Задача Коши

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2(t,x)}{2} = \mu\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \mu > 0 \ - \ \text{const} \tag{2}$$

исследовалась И.Бюргерсом [1], Э.Хопфом [2], И.Коулом [3]. Эта задача широко известна в теории турбулентности. Само уравнение (1) часто называют уравнением Бюргерса [4].

В работе [5] изучены задачи определения неизвестных коэффициентов для уравнений типа Хопфа в случае данных Коши, когда входные данные допускают преобразование Фурье по пространственной переменной. В настоящей работе исследуется задача определения функции источника в случаях задачи Коши и первой краевой задачи в классах гладких функций. Методы решения различных обратных задач математической физики см. в [6, 7].

В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \leqslant t \leqslant T, -\infty < x < \infty\}$ рассмотрим уравнение типа Бюргерса

$$u_t(t,x) = \mu(t)u_{xx} + A(t)uu_x + B(t)u + C(t) + g(t)f(t,x), \tag{3}$$

где $A(t), B(t), C(t), f(t,x)$ — заданные функции, с данными Коши

$$u(0,x) = u_0(x), \ -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

Функции $u(t,x), g(t)$ неизвестны. Считаем, что выполнены условие переопределения

$$u(t,x_0) = \phi(t), \ x_0 = \text{const}, \tag{5}$$

и условие согласования

$$\phi(0) = u_0(x_0). \tag{6}$$

*belov@lan.krasu.ru

Приведем задачу (3)–(6) к прямой задаче. Подставим $x = x_0$ в уравнение (3). Учитывая условие (5), получим соотношение

$$g(t) \quad = \quad \frac{\psi(t) - \mu(t)u_{xx}(t,x_0) - A(t)\phi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)}, \tag{7}$$

где $\psi(t) = \phi'(t) - B(t)\phi(t) - C(t)$.

Подставляя (7) в (3), получим задачу

$$u_t(t,x) = \mu(t)u_{xx} + A(t)uu_x + B(t)u + C(t) + \frac{\psi(t) - \mu(t)u_{xx}(t,x_0) - A(t)\phi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)} f(t,x), \tag{8}$$

$$u(0, x = u_0(x). \tag{9}$$

Предположим, что входные данные задачи (3)–(5) удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{6}\left|\frac{\partial^k u_0(x)}{\partial x^k}\right| + \sum_{k=0}^{6}\left|\frac{\partial^k f(t,x)}{\partial x^k}\right| + |A(t)| + |B(t)| + |C(t)| + |\psi(t)| \leqslant K,\\ |f(t,x_0)| \geqslant \frac{1}{K}, \qquad K = \mathrm{const} > 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Существование достаточно гладкого решения задачи (8), (9) докажем методом слабой аппроксимации [8, 9]. Аппроксимируем задачу (8), (9) задачей

$$u_t^\tau \quad = \quad 3\mu(t)u_{xx}^\tau + 3B(t)u^\tau, \ \ t \in \left(n\tau, \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau\right], \tag{11}$$

$$\begin{aligned} u_t^\tau \quad = \quad & 3\frac{\psi(t) - \mu(t)u_{xx}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x_0) - A(t)\phi(t)u_x^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x_0)}{f(t,x_0)} f(t,x) + 3C(t),\\ & t \in \left(\left(n + \frac{1}{3}\right)\tau, \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau\right], \end{aligned} \tag{12}$$

$$u_t^\tau \quad = \quad 3A(t)u^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x)u_x^\tau(t,x), \qquad t \in \left(\left(n + \frac{2}{3}\right)\tau, (n+1)\tau\right], \tag{13}$$

$$u^\tau(0,x) \quad = \quad u_0(x). \tag{14}$$

Введем неотрицательные, монотонно возрастающие функции:

$$U_0^\tau(t) \quad = \quad 1 + \sup_{\xi \in [0,t]} \sup_{x \in E_1} |u^\tau(\xi, x)|, U_{0,0} = 1 + \sup_{x \in E_1}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_0(x)\right| \tag{15}$$

$$U_k^\tau(t) \quad = \quad \sup_{\xi \in [0,t]} \sup_{x \in E_1}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(\xi,x)\right|, \quad U^\tau(t) = \sum_{i=0}^{2} U_i^\tau(t), \tag{16}$$

$$U_{0,k} \quad = \quad \sup_{x \in E_1}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_0(x)\right|, \quad U_0 = \sum_{i=0}^{2} U_{0,i}, \quad k = 1..6. \tag{17}$$

Рассмотрим нулевой целый шаг ($n = 0$). На первом дробном шаге решается задача Коши (11), (14). В силу принципа маскимума [9, 10] имеем $U_0^\tau(t) \leqslant U_{0,0}e^{3Kt}, 0 < t \leqslant \dfrac{\tau}{3}$. Дифференцируя задачу (11),(14) дважды по x получаем, что

$$U_k^\tau(t) \leqslant U_{0,k}e^{3Kt}, \ \ 0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}, \ \ k = 0, 1, 2, \tag{18}$$

откуда следует, что

$$U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) \leqslant U_0 e^{K\tau}. \tag{19}$$

На втором дробном шаге решается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (12) с начальными данными $u^\tau\left(\frac{\tau}{3}, x\right)$. Заметим, что, по построению, правая часть уравнения (12) — известная функция. Решение $u^\tau(t,x)$ этой задачи и его производные записываются в явном виде:

$$\begin{aligned} u^\tau(t,x) &= u^\tau\left(\frac{\tau}{3}, x\right) + 3\int_{\frac{\tau}{3}}^{t}\left(\frac{f(\xi,x)}{f(\xi,x_0)}\left(\psi(\xi) - \mu(\xi)u^\tau_{xx}\left(\xi - \frac{\tau}{3}, x_0\right) - \right.\right.\\ &\left.\left. - A(\xi)\phi(\xi)u^\tau_x\left(\xi - \frac{\tau}{3}, x_0\right)\right) + C(\xi)\right) d\xi,\\ \frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(t,x) &= \frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau\left(\frac{\tau}{3}, x\right) + 3\int_{\frac{\tau}{3}}^{t}\left(\frac{\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(\xi,x)}{f(\xi,x_0)}\left(\psi(\xi) - \right.\right.\\ &\left.\left. - \mu(\xi)u^\tau_{xx}\left(\xi - \frac{\tau}{3}, x_0\right) - A(\xi)\phi(\xi)u^\tau_x\left(\xi - \frac{\tau}{3}, x_0\right)\right) + C(\xi)\right) d\xi, \quad t \in \left(\frac{\tau}{3}, \frac{2\tau}{3}\right]. \end{aligned}$$

В это выражение входят производные u^τ_x, u^τ_{xx}, взятые при $0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}$, которые оценены на первом дробном шаге. Отсюда

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(t,x)\right| \leqslant U^\tau_k\left(\frac{\tau}{3}\right) + 3K\frac{\tau}{3}\left(1 + U^\tau_1\left(\frac{\tau}{3}\right) + U^\tau_2\left(\frac{\tau}{3}\right)\right). \tag{20}$$

В неравенствах (20) возьмем sup по $x \in E_1$ и $t \in \left[0, \frac{2\tau}{3}\right]$ от левой части. Складывая полученные из (20) неравенства при $k = 0, 1, 2$, имеем неравенство

$$U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) \leqslant U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + 3K\tau\left(1 + U^\tau_1\left(\frac{\tau}{3}\right) + U^\tau_2\left(\frac{\tau}{3}\right)\right). \tag{21}$$

Учитывая, что $U^\tau_0\left(\frac{\tau}{3}\right) \geqslant U_{0,0} \geqslant 1$ (см. (15)), можно записать

$$\begin{aligned} U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) &\leqslant U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + 3K\tau\left(U^\tau_0\left(\frac{\tau}{3}\right) + U^\tau_1\left(\frac{\tau}{3}\right) + U^\tau_2\left(\frac{\tau}{3}\right)\right) =\\ &= U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)(1 + 3K\tau) \leqslant U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)e^{3K\tau}. \end{aligned} \tag{22}$$

На третьем дробном шаге $\left(t \in \left(\frac{2\tau}{3}, \tau\right]\right)$ решается задача Коши для уравнения переноса

$$u^\tau_t = 3A(t)u^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x)u^\tau_x(t,x) \tag{23}$$

с начальными данными $u^\tau\left(\frac{2\tau}{3}, x\right)$. Решение уравнения (23) примет вид $u^\tau(t,x) = u^\tau\left(\frac{2\tau}{3}, \widetilde{\phi}(t,x)\right)$ [11, теорема 2.6], где $\widetilde{\phi}$ — характеристическая функция этого уравнения. Отсюда следует оценка

$$|u^\tau(t,x)| \leqslant U^\tau_0\left(\frac{2\tau}{3}\right), \quad \frac{2\tau}{3} < t \leqslant \tau. \tag{24}$$

Продифференцируем уравнение (23) по x, получим:

$$z_t^\tau \quad = \quad 3A(t)u_x^\tau(t-\frac{\tau}{3},x)z^\tau + 3A(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{3},x)z_x^\tau, \tag{25}$$

где $z^\tau(t,x) = u_x^\tau(t,x)$. Решение этого уравнения имеет вид [11] (здесь $\bar{\psi}$ — характеристики уравнения (25))

$$z^\tau(t,x) \quad = \quad \exp\left(-\int_{\frac{2\tau}{3}}^t 3A(\xi)u_x^\tau(\xi-\frac{\tau}{3},\bar{\psi}(\xi,x))d\xi\right)u_x^\tau\left(\frac{2\tau}{3},x\right),$$

откуда следует

$$|z^\tau(t,x)| \leqslant U_1\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{K\tau U_1(\frac{2\tau}{3})}, \quad \frac{2\tau}{3} < t \leqslant \tau. \tag{26}$$

Продифференцируем уравнение (23) два раза по x. Обозначим $v^\tau(t,x) = u_{xx}^\tau(t,x)$. Получим при $t \in (\frac{2\tau}{3},\tau]$ для $v^\tau(t,x)$ уравнение

$$v_t^\tau(t,x) = 6A(t)u_x^\tau(t-\frac{\tau}{3},x)v^\tau + 3A(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{3},x)v_x^\tau + (3A(t)u_{xx}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x)u_x^\tau(t,x)) \tag{27}$$

с начальными данными

$$v^\tau(t,x)\Big|_{t=\frac{2\tau}{3}} \quad = \quad v^\tau(\frac{2\tau}{3},x). \tag{28}$$

Решение v^τ задачи (27), (28) имеет вид [11]

$$\begin{aligned} v^\tau(t,x) \quad = \quad & e^{\int_{\frac{2\tau}{3}}^t 6A(t)u_x^\tau(\xi-\frac{\tau}{3},\widetilde{\psi})d\xi}\Big(u_{xx}^\tau(\frac{2\tau}{3},x) + \int_{\frac{2\tau}{3}}^t 3A(t)u_{xx}^\tau(\xi-\frac{\tau}{3},\widetilde{\psi}) \times \\ & \times u_x^\tau(\xi,\widetilde{\psi})e^{-\int_{\frac{2\tau}{3}}^\xi 6A(t)u_x^\tau(\eta-\frac{\tau}{3},\widetilde{\psi})d\eta}d\xi\Big), \end{aligned}$$

откуда следует оценка

$$\begin{aligned} |v^\tau(t,x)| \quad & \leqslant \quad e^{2K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}\left(U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + K\tau U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)U_1^\tau(\tau)\,e^{2K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}\right) = \\ & = \quad e^{2K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + K\tau U_1^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{5K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})} = \\ & = \quad U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\left(e^{2K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})} + K\tau U_1^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{5K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}\right) \leqslant \\ & \leqslant \quad U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{5K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}\left(1 + K\tau U_1^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\right) \leqslant U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{6K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}. \end{aligned} \tag{29}$$

Взяв sup по $x \in E_1$ и $t \in [0,\frac{2\tau}{3}]$ от левых частей в оценках (24),(26),(29) и сложив полученные неравенства, получаем при $t \in [0,\tau]$

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(\tau) = U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{6K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})} \leqslant U_0e^{4K\tau}e^{6K\tau U_0e^{4K\tau}}. \tag{30}$$

На первом целом шаге ($n=1$) повторим все рассуждения, проведённые нами на нулевом шаге. Для этого в соотношение (30) подставим вместо U_0 значение $U^\tau(\tau)$, удовлетворяющее неравенству (30):

$$\begin{aligned} U(2\tau) \quad & \leqslant \quad U^\tau(\tau)e^{4K\tau}e^{6K\tau U^\tau(\tau)e^{4K\tau}} = \\ & = \quad U_0e^{4K\tau}e^{6K\tau U_0e^{4K\tau}}e^{4K\tau}\exp(6K\tau U_0e^{4K\tau}e^{6K\tau U_0e^{4K\tau}}e^{4K\tau}). \end{aligned} \tag{31}$$

Пусть положительная постоянная t^* удовлетворяет неравенству

$$e^{12Kt^* U_0 e^{4Kt^*}} \leqslant 2. \tag{32}$$

Здесь и далее будем считать τ достаточно малыми ($\tau \ll t^*$) и такими, что для некоторых целых $N = N(\tau)$ выполнено равенство $N\tau = t^*$. В силу (32)

$$e^{6(2i-1)K\tau U_0 e^{4iK\tau}} \leqslant 2, \quad i = 1..N. \tag{33}$$

При $i = 1$ выполняется неравенство $e^{6K\tau U_0 e^{4K\tau}} \leqslant 2$, учитывая которое упростим оценку (31):

$$U^\tau(2\tau) \leqslant U_0 e^{8K\tau} e^{18K\tau U_0 e^{8K\tau}}. \tag{34}$$

На втором шаге ($n = 2$) в (30) берем U_0 равное $U^\tau(2\tau)$. Получим соотношения

$$\begin{aligned} U^\tau(3\tau) &\leqslant U^\tau(2\tau) e^{4K\tau} e^{6K\tau U^\tau(2\tau) e^{4K\tau}} \leqslant \\ &\leqslant U_0 e^{8K\tau} e^{18K\tau U_0 e^{8K\tau}} e^{4K\tau} \exp(6K\tau U_0 e^{8K\tau} e^{18K\tau U_0 e^{8K\tau}} e^{4K\tau}). \end{aligned}$$

Так как (при $i = 2$) $e^{18K\tau U_0 e^{8K\tau}} \leqslant 2$, то $U^\tau(3\tau) \leqslant U_0 e^{12K\tau} e^{30K\tau U_0 e^{12K\tau}}$. На третьем шаге

$$\begin{aligned} U^\tau(4\tau) &\leqslant U^\tau(3\tau) e^{4K\tau} e^{6K\tau U^\tau(3\tau) e^{4K\tau}} \leqslant \\ &\leqslant U_0 e^{12K\tau} e^{30K\tau U_0 e^{12K\tau}} e^{4K\tau} \exp(6K\tau U_0 e^{12K\tau} e^{30K\tau U_0 e^{12K\tau}} e^{4K\tau}) \leqslant \\ &\leqslant U_0 e^{16K\tau} e^{42K\tau U_0 e^{16K\tau}}. \end{aligned}$$

На (i-1)-м целом шаге

$$U^\tau(i\tau) \quad \leqslant \quad U_0 e^{4iK\tau} e^{6(2i-1)K\tau U_0 e^{4iK\tau}} \leqslant U_0 e^{4Kt^*} e^{12Kt^* U_0 e^{4Kt^*}} = K', \quad K' - \text{const}.$$

В силу монотонности функции $U^\tau(t)$

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(N\tau) = U^\tau(t^*) = K', \qquad t \in [0, t^*]. \tag{35}$$

Отсюда следует (см. 15), что равномерно по τ

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau(t,x) \right| \leqslant K', (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}, \quad k = 0, 1, 2, \tag{36}$$

где $\Pi_{[0,t^*]} = \{(t,x) | 0 \leqslant t \leqslant t^*, x \in (-\infty, \infty)\}$.

Трижды дифференцируем задачу (11)–(14) по x, рассматривая третью производную u^τ_{xxx} в качестве неизвестной функции и учитывая уже доказанную равномерную по τ ограниченность производных по x меньшего порядка (см. (36)), получим оценку

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial x^3} u^\tau(t,x) \right| \leqslant K, (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}.$$

Дифференцируя задачу по x четыре раза, получаем задачу, где в качестве неизвестной функции рассматривается производная u^τ_{xxxx}, и производные по x меньшего порядка уже оценены. Получим равномерную по τ оценку на производную $\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} u^\tau(t,x)$. Аналогично оценим производные пятого и шестого порядков. Получим равномерную по τ оценку

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau(t,x) \right| \leqslant K', (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}, \quad k = 0, 1 ... 6. \tag{37}$$

Из (37) следует (в силу уравнений (11)–(13)) равномерная по τ ограниченность производных

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^s u^\tau}{\partial x^s}(t,x), \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^s u^\tau}{\partial x^s}(t,x), (t,x)\in \Pi_{[0,t^*]}, \quad s=0...4,$$

откуда следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность в

$$\Pi^M_{[0,t^*]} = \{(t,x), t\in[0,t^*], |x|<M\}$$

(при любом фиксированном M) семейств функций $\{u^\tau\}, \{u^\tau_x\}, \{u^\tau_{xx}\}, \{u^\tau_{xxx}\}, \{u^\tau_{xxxx}\}$.

По теореме Арцела [12] о компактности в C существует подпоследовательность u^{τ_k}, сходящаяся равномерно в $\Pi^M_{[0,t^*]}$ вместе со своими производными по x до четвертого порядка включительно к некоторой функции $u(t,x)$. По теореме сходимости метода слабой аппроксимации [8, 9] функция $u(t,x) = \lim\limits_{k\to\infty} u^{\tau_k}(t,x)$, принадлежащая классу

$$C^{1,4}_{t,x}(\Pi^M_{[0,t^*]}) = \{u(t,x)| \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,x)\in C(\Pi^M_{[0,t^*]}), \quad k=0,1...4\},$$

удовлетворяет уравнению (8) и удовлетворяет условию (9) при $|x|\leqslant M$. Так как M произвольно, функция u является решением класса $C^{1,4}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]})$ задачи (8), (9).

Докажем, что пара функций $u(t,x), g(t)$, где $g(t)$ определяется соотношением (7), является решением обратной задачи (3)–(6).

Так как $u(t,x)$ — решение задачи (8), (9), то следующие функции $u(t,x)$, $g(t) = \dfrac{\psi(t)-\mu(t)u_{xx}(t,x_0)-A(t)\phi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)}$ являются решением задачи (3), (4). Докажем выполнение условия (5).

Подставим $x=x_0$ в уравнение (8):

$$\begin{aligned} u_t(t,x_0) &= \mu(t)u_{xx}(t,x_0) + A(t)u(t,x_0)u_x(t,x_0) + B(t)u(t,x_0) + \\ &+C(t) + \frac{\psi(t)-\mu(t)u_{xx}(t,x_0)-A(t)\phi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)}f(t,x_0), \\ u_t(t,x_0)-\phi'(t) &= A(t)u_x(t,x_0)(u(t,x_0)-\phi(t)). \end{aligned}$$

Для функции $\gamma(t) = u(t,x_0)-\phi(t)$, учитывая условие согласования (6), получим задачу Коши

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (A(t)u_x(t,x_0)+B(t))\gamma(t), \\ \gamma(0) &= 0, \end{aligned}$$

которая имеет единственное нулевое решение. Следовательно, $u(t,x_0)=\phi(t)$ и условие переопределения (5) выполнено. Доказано существования решения $(u(t,x), g(t))$ задачи (3)–(6) в классе

$$Z = \{u(t,x), g(t) | u(t,x)\in C^{1,4}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}),$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right| + \sum_{s=0}^{4}\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}u(t,x)\right| \leqslant K, (t,x)\in\Pi_{[0,t^*]}, \quad g(t)\in C([0,t^*])\}.$$

2. Единственность решения задачи (3)–(6)

Пусть $(u^1(t,x), g^1(t)), (u^2(t,x), g^2(t))$ — два решения задачи (3)–(5) в классе Z. Обозначим $z=u^2-u^1, g^*=g^2-g^1$. Пара функций (z,g^*) является решением обратной задачи

$$\begin{aligned} z_t &= \mu(t)z_{xx} + A(t)(u^2 z_x + u^1_x z) + B(t)z + g^*(t)f(t,x), && (38) \\ z(0,x) &= 0, && (39) \\ z(t,x_0) &= 0. && (40) \end{aligned}$$

Положим $x = x_0$ в (38). Получим соотношения

$$\begin{aligned} z_t(t,x_0) &= \mu(t)z_{xx}(t,x_0) + A(t)(u^2(t,x_0)z_x(t,x_0) + u^1_x(t,x_0)z(t,x_0)) + \\ &+B(t)z(t,x_0) + g^*(t)f(t,x_0), \\ g^*(t) &= -\frac{\mu(t)z_{xx}(t,x_0) + z(t,x_0)(B(t) + u^1_x(t,x_0)) + A(t)u^2(t,x_0)z_x(t,x_0)}{f(t,0)}. \end{aligned}$$

Следовательно, z является решением уравнения

$$z_t = \mu(t)z_{xx} + A(t)(u^2 z_x + u^1_x z) + B(t)z + g^*(t)f(t,x), \tag{41}$$

$$z(0,x) = 0. \tag{42}$$

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$\gamma_k(t) = \sup_{\xi\in[0,t]} \sup_{x\in E_1} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} z(\xi,x) \right|, \quad k = 0,1,2. \tag{43}$$

В силу принципа максимума для уравнения (41) получим

$$|z(\xi,x)| \leqslant e^{K\xi} K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))\xi, \quad (\xi,x) \in \Pi_{[0,t]},\ 0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Возьмем от обеих частей данного неравенства sup по $x \in E_1$ и $\xi \in [0,t]$:

$$\gamma_0(t) \leqslant e^{Kt} K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t. \tag{44}$$

Продифференцируем уравнение (41) k раз (k=1,2) по x. Применяя принцип максимума, получим неравенства

$$\gamma_1(t) \leqslant e^{Kt} K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t, \tag{45}$$

$$\gamma_2(t) \leqslant e^{Kt} K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t. \tag{46}$$

Сложим неравенства (44)–(46): $\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t) \leqslant 3Ke^{Kt}(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t$. Отсюда следует, что при некотором $\eta > 0$ таком, что $3K\eta e^{K\eta} < 1$, при всех $t \in [0,\eta]$ функции $\gamma_k(t) \equiv 0$. Повторяя данные рассуждения при $t \in [\eta, 2\eta]$, затем при $t \in [2\eta, 3\eta]$ и так далее, через конечное число шагов получим, что $\gamma_k \equiv 0$ при всех $t \in [0,t^*]$. Следовательно, $z(t,x) \equiv 0$ и $u^1 \equiv u^2$ в $\Pi_{[0,t^*]}$.

Подставим $z = 0$ в (41), получим, что $g^*(t)f(t,x_0) = 0$ при $t \in [0,t^*]$. Так как $|f(t,x_0)| > \dfrac{1}{K}$, то $g^*(t) = 0, t \in [0,t^*]$.

Следовательно, решение обратной задачи (3),(6) единственно в классе Z. Доказана

Теорема 1. *Пусть выполняется условие (10). Тогда существует единственное решение (u,g) задачи (3)–(6) в классе Z. Для любого $M > 0$*

$$\left\| \frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k} - \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|_{C(\Pi^M_{[0,t^*]})} \to 0, \quad k = 0,1...4,$$

при $\tau \to 0$.

3. Краевая задача

В области $Q_T = \{(t,x)|0 < t < T, 0 < x < l\}, T, l - const > 0$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \mu u_{xx} + A(t)uu_x + Bu + g(t)f(t,x), & (47)\\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in [0,l], & (48)\\ u(t,0) &= u(t,l) = 0, \quad t \in [0,T], & (49)\\ u(t,x_0) &= \phi(t), \quad 0 < x_0 < l, & (50)\\ u_0(x_0) &= \phi(0). & (51) \end{aligned}$$

В уравнении (47) в отличие от уравнения (3) функция $B(t) = B - \text{const}$ и $C(t) \equiv 0$. Предположим, что функции $u_0(x)$, $f(t,x)$ имеют непрерывные производные по x до шестого порядка включительно. Продолжим функцию $u_0(x)$ на отрезок $[-l,l]$: определим $u_0(x) = -u_0(-x)$ при $-l \leqslant x < 0$. Затем продолжим функцию с $[-l,l]$ на $\Re$ периодическим образом. Продолжим функцию $f(t,x)$ с $[0,T] \times [0,l]$ на $[0,T] \times \Re$ до периодической и нечётной по x функции. Заметим, что функции $u_0(x), f(t,x)$ по способу построения удовлетворяют условиям:

$$\begin{array}{ll} u_0(-x) = -u_0(x), & u_0(l-x) = -u_0(l+x),\\ f(t,-x) = -f(t,x), & f(t,l-x) = -f(t,l+x). \end{array} \qquad (52)$$

Продолженные данным способом функции $u_0(x), f(t,x)$ используем в качестве входных данных для задачи Коши

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \mu u_{xx} + A(t)uu_x + Bu + g(t)f(t,x), & (53)\\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in (-\infty,\infty). & (54) \end{aligned}$$

Расщепим задачу (53), (54):

$$\begin{cases} u_t^\tau = 3\mu u_{xx}^\tau + 3Bu^\tau, & t \in \left(n\tau, \left(n+\dfrac{1}{3}\right)\tau\right],\\ u_t^\tau = 3\dfrac{\psi(t) - \mu u_{xx}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x_0) - A(t)\phi(t)u_x^\tau(t-\frac{\tau}{3},x_0)}{f(t,x_0)}f(t,x), & t \in \left((n+\dfrac{1}{3})\tau, (n+\dfrac{2}{3})\tau\right],\\ u_t^\tau = 3A(t)u^\tau\left(t-\dfrac{\tau}{3},x\right)u_x^\tau(t,x), & t \in \left(\left(n+\dfrac{2}{3}\right)\tau, (n+1)\tau\right],\\ u^\tau(0,x) = u_0(x), \end{cases} \qquad (55)$$

где $\psi(t) = \phi'(t) - B\phi(t)$.

Пусть $u^\tau(t,x)$ — решение расщепленной задачи. Покажем, что $u^\tau(t,x)$ удовлетворяет условиям

$$u^\tau(t,-x) = -u^\tau(t,x), \qquad u^\tau(t,l-x) = -u^\tau(t,l+x). \qquad (56)$$

На первом дробном шаге сделаем замену $u^\tau(t,x) = v^\tau(t,x)e^{3Bt}$, получим для v^τ уравнение $v_t^\tau = 3\mu v_{xx}^\tau$. Функцию v^τ можно представить в виде интеграла Пуассона [13]. Тогда

$$u^\tau(t,x) = \frac{e^{3Bt}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3\mu t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{12\mu t}}u_0(\xi)d\xi.$$

Проверим первое из условий (56):

$$u^\tau(t,x) + u^\tau(t,-x) = \frac{e^{3Bt}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3\mu t}}(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{12\mu t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{12\mu t}})u_0(\xi)d\xi.$$

Подынтегральная функция меняет знак при замене ξ на $-\xi$, следовательно, интеграл от нее равен нулю. Второе условие из (56) проверяется аналогично с помощью замены $\eta = l - \xi$ переменной интегрирования.

На втором дробном шаге $u^\tau(t,x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} u^\tau(t,x) &= u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x\right) + \int_{\frac{\tau}{3}}^{t} \zeta(\xi) f(\xi,x) d\xi, \\ \zeta(\xi) &= 3\frac{\psi(\xi) - \mu u^\tau_{xx}(\xi - \frac{\tau}{3}, x_0) - A(\xi)\phi(\xi) u^\tau_x(t - \frac{\tau}{3}, x_0)}{f(\xi,x_0)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u^\tau(t,x) + u^\tau(t,-x) = u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x\right) + u^\tau\left(\frac{\tau}{3},-x\right) + \int_{\frac{\tau}{3}}^{t} \zeta(\xi)\big(f(\xi,x) + f(\xi,-x)\big) d\xi = 0.$$

Второе условие (56), очевидно, также выполнено.

Лемма 1. *Пусть функция $v(t,x)$ является решением уравнения $v_t = a(t,x)v_x$ в области $D = \{(t,x) | t_0 < t < t_1, x \in \Re\}$ с начальным условием $v(t_0,x) = v_0(x)$. Пусть функция $a(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x и выполнены соотношения*

$$a(t,c+x) = -a(t,c-x), v_0(c+x) = -v_0(c-x), \quad c - \text{const}. \tag{57}$$

Тогда функция $v(t,x)$ удовлетворяет соотношению $v(t,c+x) = -v(t,c-x)$.

Доказательство. Рассмотрим семейство характеристик уравнения $v_t = a(t,x)v_x$. Любая характеристика удовлетворяет в D уравнению $\dfrac{dx}{dt} = -a(t,x)$. Так как $a(t,x)$ липшиц-непрерывна, то через каждую точку $(t,x) \in D$ проходит одна и только одна характеристика. Возьмем две характеристики $x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t)$, пересекающие прямую $t = t_0$ в точках $x = c + \alpha$ и $x = c - \alpha$ ($\alpha > 0 - const$) соответственно. Легко видеть, что $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ симметричны относительно прямой $x = c$: $\phi_1(t) - c = c - \phi_2(t)$. Действительно, $\zeta_1 = \phi_1(t) - c$ является решением задачи

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = -a(t, c+\zeta_1), \quad \zeta_1(t_0) = \alpha,$$

Функция $\zeta_2 = c - \phi_2(t)$ является решением задачи $\dfrac{d\zeta_2}{dt} = a(t,c-\zeta_2) = -a(t,c+\zeta_2)$, $\zeta_2(t_0) = \alpha$, т. е. ζ_1, ζ_2 — решение одной и той же задачи, значит, $\phi_1(t) - c = c - \phi_2(t)$. Функция $v(t,x)$ обладает свойством постоянства вдоль характеристик $\phi(t)$, т.е. $v(t,\phi(t)) = \text{const}$. Рассмотрим сумму $v(t,c+x) + v(t,c-x)$. Через точки $(t,c+x)$ и $(t,c-x)$ проходят симметричные относительно $x = c$ характеристики $\phi_1(t), \phi_2(t)$. В силу (57) $v(t,c+x) + v(t,c-x) = v(t,\phi_1(t)) + v(t,\phi_2(t)) = v(t_0,\phi_1(t_0)) + v(t_0,\phi_2(t_0)) = v_0(c + (\phi_1(t_0) - c)) + v_0(c - (c - \phi_2(t_0))) = 0$, что и требовалось доказать. □

Применяя лемму 2.1 при $c = 0$, затем при $c = l$, докажем выполнение условий (56) на третьем дробном шаге.

Доказано выполнение условий (56) на нулевом целом шаге. Так же рассуждая на последующих шагах, получим, что условия (56) выполнены для всех $t \in [0,T]$. Подставляя $x = 0$ в (56), получим, что

$$u^\tau(t,0) = u^\tau(t,l) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{58}$$

Предположим, что выполнены условия (10) и $C(t) \equiv 0$. По теореме 1 последовательность $u^\tau(t,x)$ решений задачи (55) сходится к решению $u(t,x)$ задачи (53),(54) равномерно в $\Pi^M_{[0,t^*]}$

при любом $M > 0$ и, следовательно, в $[0, t^*] \times [0, l]$, вместе с производными по переменной x до четвертого порядка включительно.

Так как для u^τ выполняется условие (56), то $u(t, 0) = u(t, l) = 0$. Следовательно, сужение $u(t, x), g(t)$ решения задачи (53),(54) на $[0, t^*] \times [0, l]$ есть решение задачи (47)–(51) в классе

$W = \{u(t, x), g(t) | u(t, x) \in C^{1,4}_{t,x}([0, t^*] \times [0, l]),\ g(t) \in C([0, t^*])\}$. Доказана

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (10),(52) и* $C(t) \equiv 0$. *Тогда существует единственное в классе W решение (u, g) задачи (47)–(51). При этом* $\left\| \frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k} - \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|_{C([0,t^*]\times[0,l])} \to 0, \quad k = 0, 1...4, \quad \tau \to 0.$

Список литературы

[1] I.M.Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances of mechanics*, 1948, №1, 171–199.

[2] E.Hopf, The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1950, №3, 201–230.

[3] I.D.Cole, On a quasilinear parabolic equation occuring in aerodynamics, *Quart, Appl. Math.*, 1951, №9, 226–236.

[4] Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко, Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., Наука, 1978.

[5] Yu.Ya.Belov, Inverse problems for partial differential equations, Utrecht etc., VSP 2002.

[6] A.I.Prilepko, D.G.Orlovsky, I.A.Vasin, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York, Marcel Dekkar, inc., 1999.

[7] В.Г.Романов, Устойчивость в обратных задачах, М., Научный мир, 2005.

[8] Н.Н.Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Наука, сибирское отделение, Новосибирск, 1967.

[9] Ю.Я.Белов, С.А.Кантор, Метод слабой аппроксимации, КрасГУ, Красноярск, 1999.

[10] А.М.Ильин, А.С.Калашников, О.А.Олейник, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, *Успехи мат. наук*, **17**(1962), №3, 3–146.

[11] Э.Камке, Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, М., Наука, 1966.

[12] В.А.Треногин, Функциональный анализ, М., Наука, 1980.

[13] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Уравнения математической физики, М., Наука, 1977.

An Identification Problem of Source Function in the Burgers-type Equation

Yuri Ya. Belov
Kirill V. Korshun

An identification problem of source function in the Burgers-type equation is considered. Given problem is investigated in Cauchy and boundary-value cases. Sufficient conditions for existence and uniqueness of solution are obtained.

Keywords: inverse problem, Burgers' equation, boundary-value problem, approximation.